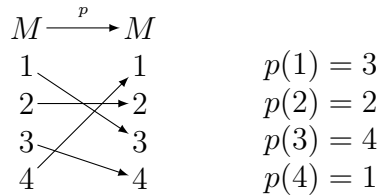


Permutationen und ihre Erzeugung

Permutationen

Eine *Permutation* von n Objekten einer Menge M ist eine umkehrbar eindeutige Abbildung der Elemente von M auf sich selbst. *Beispiel:* $M = \{1, 2, 3, 4\}$



M kann eine beliebige Menge (z. B. $M = \{P, Q, R, S\}$) sein. Wenn die spezielle Bezeichnung der Elemente keine Rolle spielt, verwenden wir jedoch wie im Beispiel oben die ersten n natürlichen Zahlen.

Die Zweizeilenform

Um Permutationen platzsparender darzustellen, verwendet man die *Matrixschreibweise* (Zweizeilenform). Die Permutation p aus dem obigen Beispiel kann dann so dargestellt werden:

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Das in der oberen Zeile stehende Element wird jeweils auf das darunter liegende Element abgebildet. Es ist üblich (aber nicht zwingend), dass die Elemente in der ersten Zeile aufsteigend sortiert sind. Daher ist auch

$$p = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

eine gültige Zweizeilendarstellung der Permutation p .

Die „Einzeilenform“

Wir denken uns die Elemente in der oberen Zeile aufsteigend sortiert. Dann ist die Zweizeilenform eindeutig und es genügt, nur die Elemente der unteren Zeile aufzuschreiben.

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow p = (3 \ 2 \ 4 \ 1)$$

Fehlstände einer Permutation

Um die „Unordnung“ einer Permutation, d. h. den Grad der Abweichung einer Permutation p von der identischen Permutation

$$\text{id} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{pmatrix}$$

zu messen, wird die Zahl der Paare (i, j) gezählt, für die $i < j$ aber $p(i) > p(j)$ gilt; d. h. deren permutierte Positionen absteigend sortiert sind. Diese Zahl wird *Fehlstands-* oder *Inversionszahl* genannt.

Beispiele: (in Einzeilenform)

- $p = (2\ 3\ 1) \Rightarrow$
- $p = (2\ 4\ 1\ 3\ 5) \Rightarrow$
- $p = (4\ 3\ 2\ 1) \Rightarrow$

Permutationen in der Informatik

Permutationen spielen in vielen Gebieten der Informatik eine wichtige Rolle.

- zur Analyse von Sortierverfahren und anderer Algorithmen,
- für die Verschlüsselung von Nachrichten,
- bei Algorithmen, die alle Permutationen berücksichtigen.

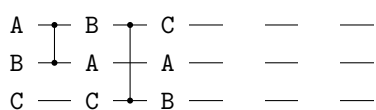
Anzahl Permutationen von n Elementen

Auf wie viele Arten können sich ...

- 2 Personen nebeneinander aufstellen?
- 3 Personen nebeneinander aufstellen?
- 4 Personen nebeneinander aufstellen?
- 5 Personen nebeneinander aufstellen?

Netzwerkdarstellung von Permutationen

Bei dieser Darstellung werden jeweils zwei zu tauschende Elemente durch eine Linie mit Punkten an ihren Enden hervorgehoben.



Vervollständige das Netzwerk, so dass alle Permutationen der drei Elemente A , B und C möglichst ohne Wiederholungen erzeugt werden.

Algorithmische Erzeugung aller Permutationen

Ein Algorithmus ist ein Verfahren, das auf eindeutige Weise beschreibt, wie eine Aufgabe zu lösen ist.

Der folgende Algorithmus wurde von B. R. HEAP im Jahre 1963 vorgeschlagen und erzeugt alle Permutationen von $n = 2, 3, 4, \dots$ Elementen, indem bei jedem Schritt genau zwei Elemente vertauscht werden.

Der Algorithmus von Heap

- (a) Tausche die Elemente in den Zeilen $2/1$ gerade: aufsteigend von 1
- (b) Tausche die Elemente in den Zeilen $3/1$ (a) $3/1$ (a) ungerade immer mit 1
- (c) Tausche die Elemente in den Zeilen $4/1$ (b) $4/2$ (b) $4/3$ gerade: aufsteigend von 1
- (d) Tausche die Elemente in den Zeilen $5/1$ (c) $5/1$ (c) $5/1$ (c) $5/1$
- (e) Tausche die Elemente in den Zeilen $6/1$ (d) $6/2$ (d) $6/3$ (d) $6/4$ (d) $6/5$
- (f) usw.

Beispiel mit 4 Elementen

1	A	B	C	A	B	C	D	B	A	D	B	A	A	C	D	A	C	D	D	C	B	D	C	B
2	B	A	A	C	C	B	B	D	D	A	A	B	C	A	A	D	D	C	C	D	D	B	B	C
3	C	C	B	B	A	A	A	A	B	B	D	D	D	D	C	C	A	A	B	B	C	C	D	D
4	D	D	D	D	D	D	C	C	C	C	C	C	C	B	B	B	B	B	B	A	A	A	A	A