Aufgabe 1

`[P, Q, R, S]`	`[Q, P, R, S]`	`[R, P, Q, S]`	`[S, P, Q, R]`
`[P, Q, S, R]`	`[Q, P, S, R]`	`[R, P, S, Q]`	`[S, P, R, Q]`
`[P, R, Q, S]`	`[Q, R, P, S]`	`[R, Q, P, S]`	`[S, Q, P, R]`
`[P, R, S, Q]`	`[Q, R, S, P]`	`[R, Q, S, P]`	`[S, Q, R, P]`
`[P, S, Q, R]`	`[Q, S, P, R]`	`[R, S, P, Q]`	`[S, R, P, Q]`
`[P, S, R, Q]`	`[Q, S, R, P]`	`[R, S, Q, P]`	`[S, R, Q, P]`

Aufgabe 2

$6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$

Aufgabe 3

- Routenplanung
- Steuerung von Bohrern bei Leiterplatten

Aufgabe 4

$$|V| = \frac{n \cdot (n-1)}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{201 \cdot 200}{2} = 201 \cdot 100 = 20\,100\,\text{Kanten}$$

Aufgabe 5

Wählt man eine Stadt als Start- und Zielort, gibt es noch

$(n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = (n-1)!$

Möglichkeiten, die übrigen Städte zu besuchen.

Bei jeder dieser $(n-1)!$ Rundreisen müssen n Distanzen aus der Distanzmatrix gelesen und addiert werden:

$n \cdot (n-1)! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \cdots \cdot 2 \cdot 1 = n!$ Schritte.

$\Rightarrow O(n!)$

Sind die Distanzen symmetrisch, müssen wir nur die Hälfte der Routenberechnungen durchführen, weil es zu jeder Route auch eine Route in umgekehrter Richtung mit gleicher Länge gibt.

Auch in diesem Fall gilt: $O(\frac{1}{2} \cdot n!) = O(n!)$

Aufgabe 6

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir bei der Suche nach der kürztesten Rundreise in der Stadt A beginnen.

A, B, C, D, A: 13

A, B, D, C, A: 11 $\Leftarrow$ kürzeste Rundreise

A, C, B, D, A: 18

A, C, D, B, A: 11 $\Leftarrow$ kürzeste Rundreise

A, D, B, C, A: 18

A, D, C, B, A: 13

Aufgabe 7

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir bei der Suche nach der kürztesten Rundreise in der Stadt A beginnen.

A, B, C, D, A: 32

A, B, D, C, A: 28

A, C, B, D, A: 32

A, C, D, B, A: 21

A, D, B, C, A: 19 $\Leftarrow$ kürzeste Rundreise

A, D, C, B, A: 24

Aufgabe 8

Die Brute-Force-Methode des TSP liegt in $O(n!)$

$T(n) = C \cdot n!$

$T(11) = C \cdot 11! = 10\,\mathrm{s}$

$T(12) = C \cdot 12! = C \cdot 12 \cdot 11! = 12 \cdot C \cdot 11! = 12 \cdot 10\,\mathrm{s} = 120\,\mathrm{s}$

also etwa 2 Minuten

Aufgabe 9

Die Brute-Force-Lösung des TSP liegt in $O(n!)$.

Somit beträgt die Laufzeit $T(n) = C \cdot n!$

$T(12) = C \cdot 12! = 30\,\mathrm{s}$

$T(14) = C \cdot 14! = 14 \cdot 13 \cdot C \cdot 12! = 14 \cdot 13 \cdot 30\,\mathrm{s} = 91\,\text{Minuten}$

Aufgabe 10

	A	B	C	D	E
A	0	4	9	8	2
B	4	0	6	5	3
C	9	6	0	7	10
D	8	5	7	0	1
E	2	3	10	1	0

(a) $A \xrightarrow{2} E \xrightarrow{1} D \xrightarrow{5} B \xrightarrow{6} C \xrightarrow{9} A$ (Total: 23)

(b) $D \xrightarrow{1} E \xrightarrow{2} A \xrightarrow{4} B \xrightarrow{6} C \xrightarrow{7} D$ (Total: 20)

Aufgabe 11

	A	B	C	D
A	0	50	3	4
B	50	0	2	5
C	3	2	0	1
D	4	5	1	0

(a) $A \xrightarrow{3} C \xrightarrow{1} D \xrightarrow{5} B \xrightarrow{50} A$ (Total: 59)

$B \xrightarrow{2} C \xrightarrow{1} D \xrightarrow{4} A \xrightarrow{50} B$ (Total: 57)

$C \xrightarrow{1} D \xrightarrow{4} A \xrightarrow{50} B \xrightarrow{2} C$ (Total: 57)

$D \xrightarrow{1} C \xrightarrow{2} B \xrightarrow{50} A \xrightarrow{4} D$ (Total: 57)

(b) kürzteste Route $A \xrightarrow{3} C \xrightarrow{2} B \xrightarrow{5} D \xrightarrow{4} A$ (Total: 14)

Aufgabe 12

	A	B	C	D	E
A	0	4	9	8	2
B	4	0	6	5	3
C	9	6	0	7	10
D	8	5	7	0	1
E	2	3	10	1	0

(a) $A \xrightarrow{3} E \xrightarrow{1} D \xrightarrow{7} C \xrightarrow{10} B \xrightarrow{4} A$ (Total: 25)

(b) $D \xrightarrow{1} E \xrightarrow{2} B \xrightarrow{4} A \xrightarrow{6} C \xrightarrow{7} D$ (Total: 20)

Die Route in (a) ist 25% länger als die Länge der kürzesten Routen.

Aufgabe 13

Brute-Force-Lösung:

- *Vorteil:* Findet immer (eine) optimale Lösung.
- *Nachteil:* Für grosse n nicht handhabbar.

Nearest-Neighbor-Methode:

- *Vorteil:* Ist schnell.
- *Nachteil:* Findet im Allgemeinen keine optimale Lösung.

Aufgabe 14

	A	B	C	D
A	0	7	6	2
B	7	0	2	8
C	6	2	0	9
D	2	8	9	0

Überprüfe systematisch für jede Wahl von drei Städten (ABC, ABD, ACD, BCD), ob jeweils alle Dreiecksungleichungen erfüllt sind oder suche „auf gut Glück“ nach drei Städten, deren Entfernungen eine der Dreiecksungleichungen verletzen.

Kandidat: $CD = 9$

Teste $CD \leq CA + AD$: $9 \leq 6 + 2 = 8 \Rightarrow$ verletzt

Wir können die Suche beenden, da wir wissen, dass die Distanzmatrix *nicht* metrisch ist.

Andernfalls hätten wir weiter testen müssen; etwa ob $CD \leq CB + BD$ gilt. Im schlimmsten Fall müssten alle anderen Varianten überprüft werden.

Aufgabe 15

Schnellere Methode: Prüfe nach absteigenden Distanzen da bei grossen Distanzen die Wahrscheinlichkeit am grössten ist, dass die Dreicksungleichung nicht erfüllt wird, sofern die Zahlen zufällig gewählt wurden.

$AD = 8$: Teste die Umwege über B und C

$8 = AD \leq AB + BD = 3 + 5 = 8$ (richtig)

$8 = AD \leq AC + CD = 6 + 1 = 7$ (falsch)

Aufgabe 16

$A,\,B,\,C$: $6 = AB \leq AC + CB = 7 + 6 = 13$ richtig
$7 = AC \leq AB + BC = 6 + 6 = 12$ richtig
$6 = BC \leq BA + AC = 6 + 7 = 13$ richtig

$A,\,B,\,D$: $6 = AB \leq AD + DB = 5 + 2 = 7$ richtig
$5 = AD \leq AB + BD = 6 + 2 = 8$ richtig
$2 = BD \leq BA + AD = 6 + 5 = 11$ richtig

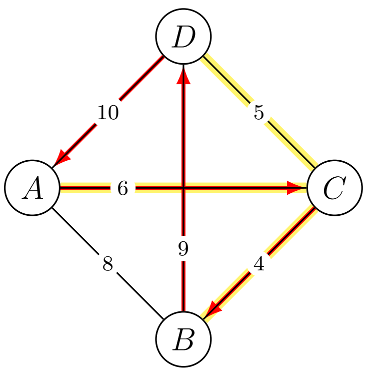
$A,\,C,\,D$: $7 = AC \leq AD + DC = 5 + 8 = 13$ richtig
$5 = AD \leq AC + CD = 7 + 8 = 15$ richtig
$8 = CD \leq CA + AD = 7 + 5 = 12$ richtig

$B,\,C,\,D$: $6 = BC \leq BD + DC = 2 + 8 = 10$ richtig
$2 = BD \leq BC + CD = 6 + 8 = 14$ richtig
$8 = CD \leq CB + BD = 6 + 2 = 8$ richtig

Das TSP ist metrisch.

Bemerkung: Eine solche „Fleissaufgabe“ wird an Prüfungen nicht gestellt. Es wird dann so sein, dass man zeigen, muss dass das TSP nicht metrisch ist, so dass nicht mehr alle Ungleichungen geprüft werden müssen.

Aufgabe 17



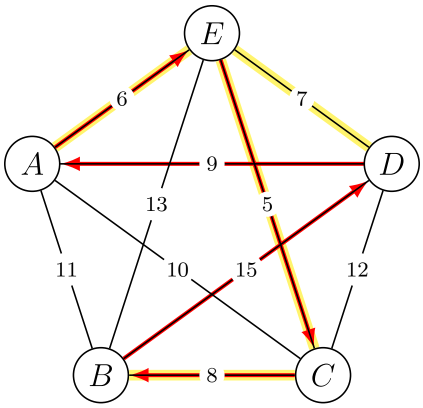
MST:

A	C
B	C
C	$A,\,B,\,D$
D	C

DFS: $A \xrightarrow{6} C \xrightarrow{4} B \xrightarrow{9} D \xrightarrow{10} A$ (Total: 29)

eine optimale Tour: $A \xrightarrow{8} B \xrightarrow{4} C \xrightarrow{5} D \xrightarrow{10} A$ (Total: 27)

Aufgabe 18



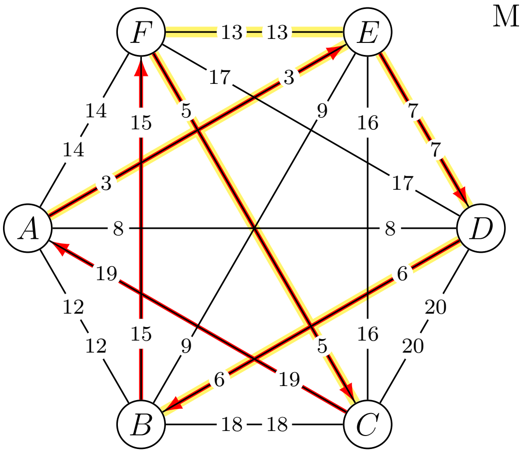
MST:

A	E
B	C
C	$E,\,B$
D	E
E	$A,\,C,\,D$

DFS: $A \xrightarrow{6} E \xrightarrow{5} C \xrightarrow{8} B \xrightarrow{15} D \xrightarrow{9} A$ (Total: 43)

eine optimale Tour: $A \xrightarrow{11} B \xrightarrow{8} C \xrightarrow{5} E \xrightarrow{7} D \xrightarrow{9} A$ (Total: 40)

Aufgabe 19



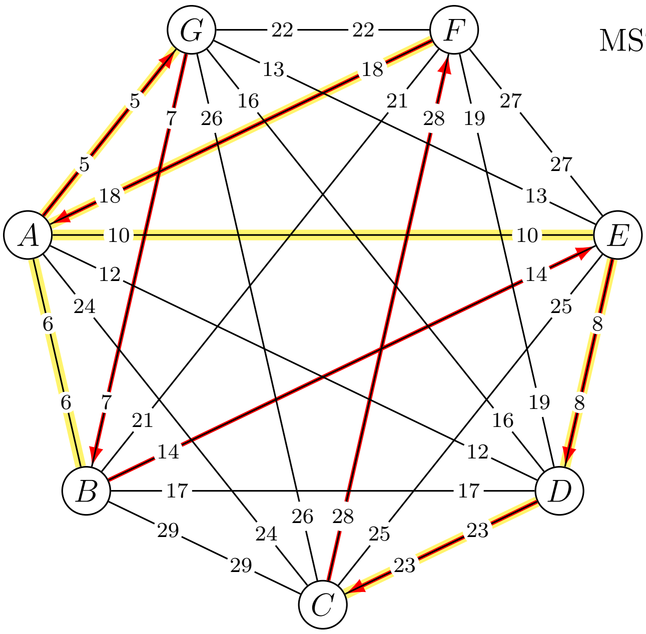
MST:

A	E
B	D
C	F
D	E, B
E	A, D, F
F	E, C

DFS: $A \xrightarrow{3} E \xrightarrow{7} D \xrightarrow{6} B \xrightarrow{15} F \xrightarrow{5} C \xrightarrow{19} A$ (55)

eine optimale Tour: $A \xrightarrow{8} D \xrightarrow{6} B \xrightarrow{18} C \xrightarrow{5} F \xrightarrow{13} E \xrightarrow{3} A$ (53)

Aufgabe 20



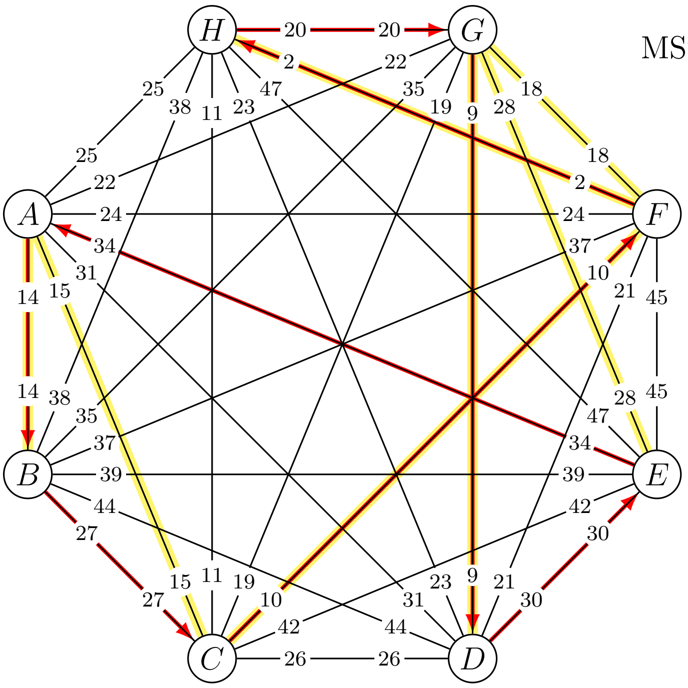
MST:

A	G, B, E, F
B	A
C	D
D	E, C
E	A, D
F	A
G	A

DFS: $A \xrightarrow{5} G \xrightarrow{7} B \xrightarrow{14} E \xrightarrow{8} D \xrightarrow{23} C \xrightarrow{28} F \xrightarrow{18} A$ (Total: 103)

eine optimale Tour: $A \xrightarrow{10} E \xrightarrow{8} D \xrightarrow{23} C \xrightarrow{28} F \xrightarrow{21} B \xrightarrow{7} G \xrightarrow{5} A$ (Total: 102)

Aufgabe 21



MST:		
	A	B, C
	B	A
	C	A, F
	D	G
	E	G
	F	C, H, G
	G	F, D, E
	H	F

DFS: $A \xrightarrow{14} B \xrightarrow{27} C \xrightarrow{10} F \xrightarrow{2} H \xrightarrow{20} G \xrightarrow{9} D \xrightarrow{30} E \xrightarrow{34} A \quad (146)$

eine optimale Tour: $A \xrightarrow{14} B \xrightarrow{39} E \xrightarrow{30} D \xrightarrow{9} G \xrightarrow{18} F \xrightarrow{2} H \xrightarrow{11} C \xrightarrow{15} A \quad (138)$