Das Travelling Salesman Problem

Übungen

Aufgabe 1

Notiere alle Permutationen der Elemente der Liste `[P, Q, R, S]`.

Aufgabe 1

```
[P, Q, R, S]  [Q, P, R, S]  [R, P, Q, S]  [S, P, Q, R]
[P, Q, S, R]  [Q, P, S, R]  [R, P, S, Q]  [S, P, R, Q]
[P, R, Q, S]  [Q, R, P, S]  [R, Q, P, S]  [S, Q, P, R]
[P, R, S, Q]  [Q, R, S, P]  [R, Q, S, P]  [S, Q, R, P]
[P, S, Q, R]  [Q, S, P, R]  [R, S, P, Q]  [S, R, P, Q]
[P, S, R, Q]  [Q, S, R, P]  [R, S, Q, P]  [S, R, Q, P]
```

Aufgabe 2

Wie viele Permutationen gibt es für eine Liste mit 6 verschiedenen Elementen?

Aufgabe 2

$$6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$$

Aufgabe 3

Nenne zwei verschiedene Anwendungen des TSP.

Aufgabe 3

- Routenplanung
- Steuerung von Bohrern bei Leiterplatten

Aufgabe 4

Wie viele Kanten hat ein vollständiger (einfacher) Graph mit $n = 201$ Knoten?

Aufgabe 4

$$|V| = \frac{n \cdot (n-1)}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{201 \cdot 200}{2} = 201 \cdot 100 = 20\,100 \,\text{Kanten}$$

Aufgabe 5

Leite her, warum die Laufzeitkomplexität für die Lösung des Travelling Salesman Problems mit dem Brute-Force-Algorithmus $n!$ beträgt

Aufgabe 5

Wählt man eine Stadt als Start- und Zielort, gibt es noch

$(n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = (n-1)!$

Möglichkeiten, die übrigen Städte zu besuchen.

Bei jeder dieser $(n-1)!$ Rundreisen müssen n Distanzen aus der Distanzmatrix gelesen und addiert werden:

$n \cdot (n-1)! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \cdots \cdot 2 \cdot 1 = n!$ Schritte.

$\Rightarrow O(n!)$

Sind die Distanzen symmetrisch, müssen wir nur die Hälfte der Routenberechnungen durchführen, weil es zu jeder Route auch eine Route in umgekehrter Richtung mit gleicher Länge gibt.

Auch in diesem Fall gilt: $O(\frac{1}{2} \cdot n!) = O(n!)$

Aufgabe 6

Bestimme die kürzeste Rundreise im Travelling Salesman Problem auf der Grundlage der folgenden Distanztabelle:

	nach A	nach B	nach C	nach D
von A	0	2	5	6
von B	2	0	4	3
von C	5	4	0	1
von D	6	3	1	0

Aufgabe 6

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir bei der Suche nach der kürztesten Rundreise in der Stadt A beginnen.

A, B, C, D, A: 13

A, B, D, C, A: 11 $\Leftarrow$ kürzeste Rundreise

A, C, B, D, A: 18

A, C, D, B, A: 11 $\Leftarrow$ kürzeste Rundreise

A, D, B, C, A: 18

A, D, C, B, A: 13

Aufgabe 7

Bestimme die kürzeste Rundreise im Travelling Salesman Problem auf der Grundlage der folgenden unsymmetrischen Distanztabelle:

	nach A	nach B	nach C	nach D
von A	0	11	10	2
von B	1	0	8	3
von C	5	12	0	6
von D	7	4	9	0

Aufgabe 7

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir bei der Suche nach der kürztesten Rundreise in der Stadt A beginnen.

A, B, C, D, A: 32

A, B, D, C, A: 28

A, C, B, D, A: 32

A, C, D, B, A: 21

A, D, B, C, A: 19 $\Leftarrow$ kürzeste Rundreise

A, D, C, B, A: 24

Aufgabe 8

Eine Implementation des Brute-Force-Verfahrens für das TSP benötigt auf einem PC 10 Sekunden für 11 Städte. Wie lange wird dasselbe Programm auf dem gleichen PC für 12 Städte benötigen?

Aufgabe 8

Die Brute-Force-Methode des TSP liegt in $O(n!)$

$T(n) = C \cdot n!$

Aufgabe 8

Die Brute-Force-Methode des TSP liegt in $O(n!)$

$$T(n) = C \cdot n!$$

$$T(11) = C \cdot 11! = 10\,\mathrm{s}$$

Aufgabe 8

Die Brute-Force-Methode des TSP liegt in $O(n!)$

$$T(n) = C \cdot n!$$

$$T(11) = C \cdot 11! = 10\,\mathrm{s}$$

$$T(12) = C \cdot 12! = C \cdot 12 \cdot 11! = 12 \cdot C \cdot 11! = 12 \cdot 10\,\mathrm{s} = 120\,\mathrm{s}$$

Aufgabe 8

Die Brute-Force-Methode des TSP liegt in $O(n!)$

$$T(n) = C \cdot n!$$

$$T(11) = C \cdot 11! = 10\,\mathrm{s}$$

$$T(12) = C \cdot 12! = C \cdot 12 \cdot 11! = 12 \cdot C \cdot 11! = 12 \cdot 10\,\mathrm{s} = 120\,\mathrm{s}$$

also etwa 2 Minuten

Aufgabe 9

Eine Implementierung des Brute Force-Algorithmus zur Lösung eines TSPs benötigt auf einem Computer für 12 Städte etwa 30 Sekunden. Wie lange wird dieselbe Implementierung auf demselben Computer zur Lösung eines TSP mit 14 Städten ungefähr benötigen?

Aufgabe 9

Die Brute-Force-Lösung des TSP liegt in $O(n!)$.

Somit beträgt die Laufzeit $T(n) = C \cdot n!$

$T(12) = C \cdot 12! = 30\,\mathrm{s}$

$T(14) = C \cdot 14! = 14 \cdot 13 \cdot C \cdot 12! = 14 \cdot 13 \cdot 30\,\mathrm{s} = 91\,\mathrm{Minuten}$

Aufgabe 10

Bestimme die Längen der Rundreisen mit der Nearest-Neighbor-Heuristik für das TSP mit folgender Distanzmatrix

	A	B	C	D	E
A	0	4	9	8	2
B	4	0	6	5	3
C	9	6	0	7	10
D	8	5	7	0	1
E	2	3	10	1	0

und dem Startpunkt

(a) A

(b) D

Aufgabe 10

	A	B	C	D	E
A	0	4	9	8	2
B	4	0	6	5	3
C	9	6	0	7	10
D	8	5	7	0	1
E	2	3	10	1	0

(a) $A \xrightarrow{2} E \xrightarrow{1} D \xrightarrow{5} B \xrightarrow{6} C \xrightarrow{9} A$ (Total: 23)

(b) $D \xrightarrow{1} E \xrightarrow{2} A \xrightarrow{4} B \xrightarrow{6} C \xrightarrow{7} D$ (Total: 20)

Aufgabe 11

Gegeben ist ein TSP mit folgender Distanzmatrix

	A	B	C	D
A	0	50	3	4
B	50	0	2	5
C	3	2	0	1
D	4	5	1	0

(a) Bestimme die Länge der Rundreisen mit der Nearest-Neighbor-Heuristik und allen möglichen Startpunkten.

(b) Ist unter den in (a) bestimmten Rundreisen auch die kürzeste? Wenn nicht, gib eine der Rundreisen mit minimaler Länge an.

Aufgabe 11

	A	B	C	D
A	0	50	3	4
B	50	0	2	5
C	3	2	0	1
D	4	5	1	0

(a) $A \xrightarrow{3} C \xrightarrow{1} D \xrightarrow{5} B \xrightarrow{50} A$ (Total: 59)

$B \xrightarrow{2} C \xrightarrow{1} D \xrightarrow{4} A \xrightarrow{50} B$ (Total: 57)

$C \xrightarrow{1} D \xrightarrow{4} A \xrightarrow{50} B \xrightarrow{2} C$ (Total: 57)

$D \xrightarrow{1} C \xrightarrow{2} B \xrightarrow{50} A \xrightarrow{4} D$ (Total: 57)

(b) kürzteste Route $A \xrightarrow{3} C \xrightarrow{2} B \xrightarrow{5} D \xrightarrow{4} A$ (Total: 14)

Aufgabe 12

Gegeben ist ein TSP mit der Distanzmatrix

	A	B	C	D	E
A	0	4	6	5	3
B	4	0	10	8	2
C	6	10	0	7	9
D	5	8	7	0	1
E	3	2	9	1	0

(a) Bestimme die Länge der Rundreise mit der Nearest-Neighbor-Heuristik (NNH) für den Startknoten A.

(b) $DEBACD$ ist eine (von mehreren) kürzesten Rundreisen. Um wie viel Prozent ist die Lösung in (a) länger als diesee optimale Route?

Aufgabe 12

	A	B	C	D	E
A	0	4	9	8	2
B	4	0	6	5	3
C	9	6	0	7	10
D	8	5	7	0	1
E	2	3	10	1	0

(a) $A \xrightarrow{3} E \xrightarrow{1} D \xrightarrow{7} C \xrightarrow{10} B \xrightarrow{4} A$ (Total: 25)

(b) $D \xrightarrow{1} E \xrightarrow{2} B \xrightarrow{4} A \xrightarrow{6} C \xrightarrow{7} D$ (Total: 20)
Die Route in (a) ist 25% länger als die Länge der kürzesten Routen.

Aufgabe 13

Vergleiche die Vor- und Nachteile der Brute-Force-Methode und der Nearest-Neighbor-Heuristik zur Lösung des TSP.

Aufgabe 13

Brute-Force-Lösung:

- *Vorteil:* Findet immer (eine) optimale Lösung.
- *Nachteil:* Für grosse n nicht handhabbar.

Nearest-Neighbor-Methode:

- *Vorteil:* Ist schnell.
- *Nachteil:* Findet im Allgemeinen keine optimale Lösung.

Aufgabe 14

Ein symmetrisches TSP heisst *metrisch*, wenn für jeweils drei beliebige Städte X, Y, Z der direkte Weg X nach Y nie länger ist, als der von X via Z nach Y. Formal:

$d(X, Y) \leq d(X, Z) + d(Z, Y)$ für alle Städte X, Y, Z

Untersuche, ob die folgende Distanzmatrix zu einem metrischen TSP gehört.

	A	B	C	D
A	0	7	6	2
B	7	0	2	8
C	6	2	0	9
D	2	8	9	0

Aufgabe 14

	A	B	C	D
A	0	7	6	2
B	7	0	2	8
C	6	2	0	9
D	2	8	9	0

Überprüfe systematisch für jede Wahl von drei Städten (ABC, ABD, ACD, BCD), ob jeweils alle Dreiecksungleichungen erfüllt sind oder suche „auf gut Glück“ nach drei Städten, deren Entfernungen eine der Dreiecksungleichungen verletzen.

Kandidat: $CD = 9$

Teste $CD \leq CA + AD$: $9 \leq 6 + 2 = 8 \Rightarrow$ verletzt

Wir können die Suche beenden, da wir wissen, dass die Distanzmatrix *nicht* metrisch ist.

Andernfalls hätten wir weiter testen müssen; etwa ob $CD \leq CB + BD$ gilt. Im schlimmsten Fall müssten alle anderen Varianten überprüft werden.

Aufgabe 15

Ist das TSP mit der folgenden Distanzmatrix metrisch?

	A	B	C	D
A	0	3	6	8
B	3	0	5	5
C	6	5	0	1
D	8	5	1	0

Aufgabe 15

	A	B	C	D
A	0	3	6	8
B	3	0	5	5
C	6	5	0	1
D	8	5	1	0

Aufwändige Methode: Prüfe *alle* Dreiecksungleichungen bis zum ersten Fehler

A, B, C: $3 = AB \leq AC + CB = 6 + 5 = 11$ richtig

$6 = AC \leq AB + BC = 3 + 5 = 8$ richtig

$5 = BC \leq BA + AC = 3 + 6 = 9$ richtig

A, B, D: $3 = AB \leq AD + DB = 8 + 5 = 13$ richtig

$8 = AD \leq AB + BD = 3 + 5 = 8$ richtig

$5 = BD \leq BA + AD = 3 + 8 = 11$ richtig

A, C, D: $6 = AC \leq AD + DC = 8 + 1 = 9$ richtig

$8 = AD \leq AC + CD = 6 + 1 = 7$ falsch

Stop, da eine Dreicksungleichung verletzt wird.

$\Rightarrow$ Das TSP ist nicht metrisch

Aufgabe 15

	A	B	C	D
A	0	3	6	8
B	3	0	5	5
C	6	5	0	1
D	8	5	1	0

Schnellere Methode: Prüfe nach absteigenden Distanzen da bei grossen Distanzen die Wahrscheinlichkeit am grössten ist, dass die Dreicksungleichung nicht erfüllt wird, sofern die Zahlen zufällig gewählt wurden.

$AD = 8$: Teste die Umwege über B und C

$8 = AD \leq AB + BD = 3 + 5 = 8$ (richtig)

$8 = AD \leq AC + CD = 6 + 1 = 7$ (falsch)

Aufgabe 16

Ist das TSP mit der folgenden Distanzmatrix metrisch?

	A	B	C	D
A	0	6	7	5
B	6	0	6	2
C	7	6	0	8
D	5	2	8	0

Aufgabe 16

$$
\begin{aligned}
A, B, C:\ & 6 = AB \leq AC + CB = 7 + 6 = 13 \quad \text{richtig} \\
& 7 = AC \leq AB + BC = 6 + 6 = 12 \quad \text{richtig} \\
& 6 = BC \leq BA + AC = 6 + 7 = 13 \quad \text{richtig}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
A, B, D:\ & 6 = AB \leq AD + DB = 5 + 2 = 7 \quad \text{richtig} \\
& 5 = AD \leq AB + BD = 6 + 2 = 8 \quad \text{richtig} \\
& 2 = BD \leq BA + AD = 6 + 5 = 11 \quad \text{richtig}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
A, C, D:\ & 7 = AC \leq AD + DC = 5 + 8 = 13 \quad \text{richtig} \\
& 5 = AD \leq AC + CD = 7 + 8 = 15 \quad \text{richtig} \\
& 8 = CD \leq CA + AD = 7 + 5 = 12 \quad \text{richtig}
\end{aligned}
$$

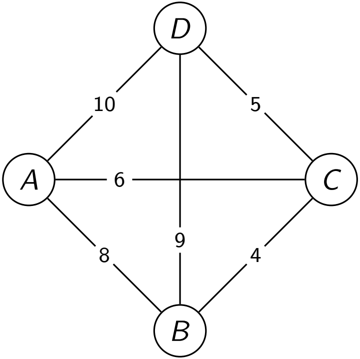
$$
\begin{aligned}
B, C, D:\ & 6 = BC \leq BD + DC = 2 + 8 = 10 \quad \text{richtig} \\
& 2 = BD \leq BC + CD = 6 + 8 = 14 \quad \text{richtig} \\
& 8 = CD \leq CB + BD = 6 + 2 = 8 \quad \text{richtig}
\end{aligned}
$$

Das TSP ist metrisch.

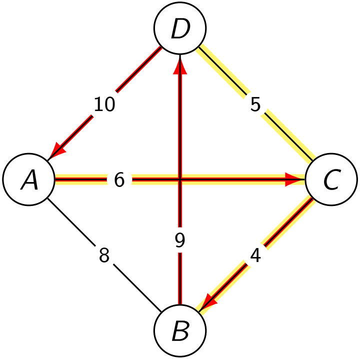
Bemerkung: Eine solche „Fleissaufgabe“ wird an Prüfungen nicht gestellt. Es wird dann so sein, dass man zeigen, muss dass das TSP nicht metrisch ist, so dass nicht mehr alle Ungleichungen geprüft werden müssen.

Aufgabe 17

Löse das TSP mit der MST-Heuristik und dem Startknoten A.



Aufgabe 17



MST:

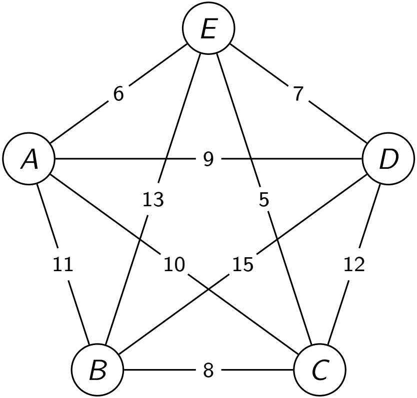
A	C
B	C
C	$A,\ B,\ D$
D	C

DFS: $A \xrightarrow{6} C \xrightarrow{4} B \xrightarrow{9} D \xrightarrow{10} A$ (Total: 29)

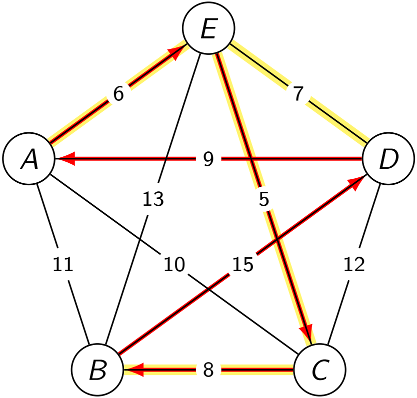
eine optimale Tour: $A \xrightarrow{8} B \xrightarrow{4} C \xrightarrow{5} D \xrightarrow{10} A$ (Total: 27)

Aufgabe 18

Löse das TSP mit der MST-Heuristik und dem Startknoten A.



Aufgabe 18



MST:

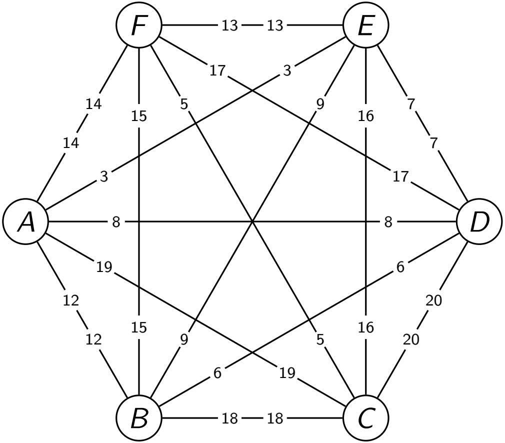
A	E
B	C
C	E, B
D	E
E	A, C, D

DFS: $A \xrightarrow{6} E \xrightarrow{5} C \xrightarrow{8} B \xrightarrow{15} D \xrightarrow{9} A$ (Total: 43)

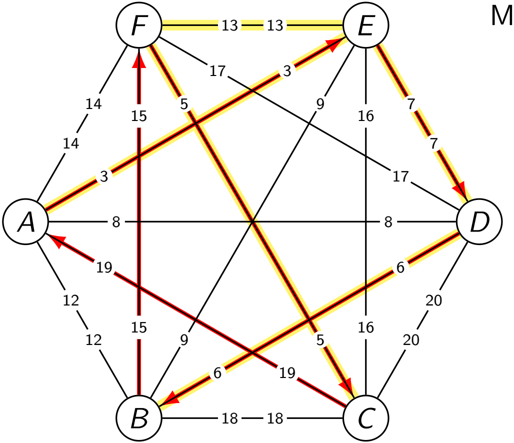
eine optimale Tour: $A \xrightarrow{11} B \xrightarrow{8} C \xrightarrow{5} E \xrightarrow{7} D \xrightarrow{9} A$ (Total: 40)

Aufgabe 19

Löse das TSP mit der MST-Heuristik und dem Startknoten A.



Aufgabe 19



MST:

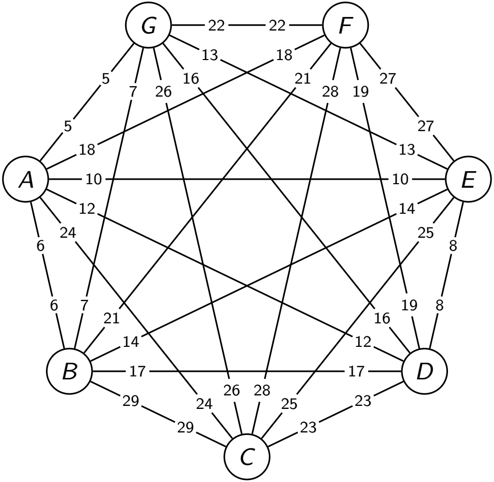
A	E
B	D
C	F
D	E, B
E	A, D, F
F	E, C

DFS: $A \xrightarrow{3} E \xrightarrow{7} D \xrightarrow{6} B \xrightarrow{15} F \xrightarrow{5} C \xrightarrow{19} A \quad (55)$

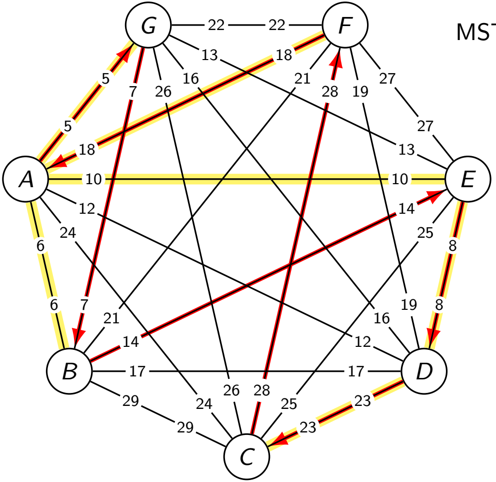
eine optimale Tour: $A \xrightarrow{8} D \xrightarrow{6} B \xrightarrow{18} C \xrightarrow{5} F \xrightarrow{13} E \xrightarrow{3} A \quad (53)$

Aufgabe 20

Löse das TSP mit der MST-Heuristik und dem Startknoten A.



Aufgabe 20



MST:

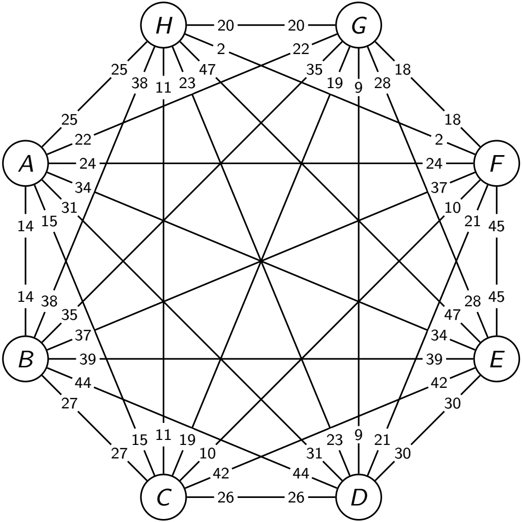
A	G, B, E, F
B	A
C	D
D	E, C
E	A, D
F	A
G	A

DFS: $A \xrightarrow{5} G \xrightarrow{7} B \xrightarrow{14} E \xrightarrow{8} D \xrightarrow{23} C \xrightarrow{28} F \xrightarrow{18} A$ (Total: 103)

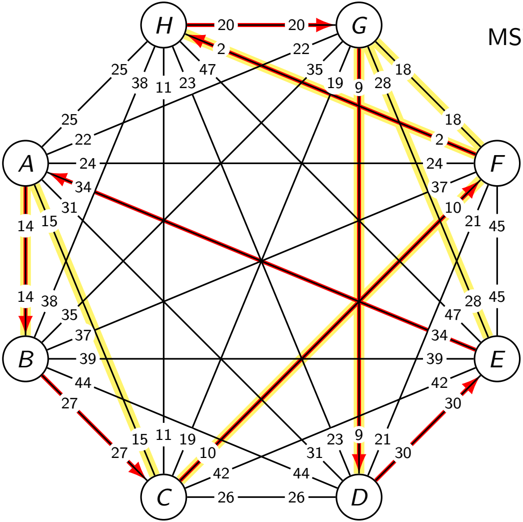
eine optimale Tour: $A \xrightarrow{10} E \xrightarrow{8} D \xrightarrow{23} C \xrightarrow{28} F \xrightarrow{21} B \xrightarrow{7} G \xrightarrow{5} A$ (Total: 102)

Aufgabe 21

Löse das TSP mit der MST-Heuristik und dem Startknoten A.



Aufgabe 21



MST:

A	B, C
B	A
C	A, F
D	G
E	G
F	C, H, G
G	F, D, E
H	F

DFS: $A \overset{14}{\to} B \overset{27}{\to} C \overset{10}{\to} F \overset{2}{\to} H \overset{20}{\to} G \overset{9}{\to} D \overset{30}{\to} E \overset{34}{\to} A \quad (146)$

eine optimale Tour: $A \overset{14}{\to} B \overset{39}{\to} E \overset{30}{\to} D \overset{9}{\to} G \overset{18}{\to} F \overset{2}{\to} H \overset{11}{\to} C \overset{15}{\to} A \quad (138)$