Permutationen

Prüfungsvorbereitung

Aufgabe 1

Beschreibe, was eine n-stellige Permutation ist.

Aufgabe 1

- *Anschaulich:* Eine n-stellige Permutation ist eine Anordnung von n Elementen in einer bestimmten Reihenfolge.
- *Formal:* Eine n-stellige Permutation ist eine bijektive (eineindeutige) Abbildung einer Menge von n Elementen auf sich selbst.

Aufgabe 2

Notiere die Permutation p in Tupeldarstellung.

$$p = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 & 6 & 4 & 8 & 7 & 3 \\ 3 & 4 & 7 & 2 & 6 & 8 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2

$$
\begin{aligned}
p &= \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 & 6 & 4 & 8 & 7 & 3 \\ 3 & 4 & 7 & 2 & 6 & 8 & 5 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 3 & 1 & 6 & 4 & 2 & 5 & 8 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 7 & 3 & 1 & 6 & 4 & 2 & 5 & 8 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Aufgabe 3

Notiere die Permutation p in vereinfachter Zyklendarstellung.

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 8 & 7 & 3 & 5 & 9 & 1 & 2 & 10 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 8 & 7 & 3 & 5 & 9 & 1 & 2 & 10 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 10 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 5 & 9 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4

Notiere die Permutation p in vereinfachter Zyklendarstellung.

$$p = \begin{pmatrix} 8 & 6 & 10 & 5 & 2 & 7 & 3 & 9 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 & 10 & 7 & 9 & 5 & 8 & 6 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4

$$p = \begin{pmatrix} 8 & 6 & 10 & 5 & 2 & 7 & 3 & 9 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 & 10 & 7 & 9 & 5 & 8 & 6 \end{pmatrix}$$

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 3 & 9 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 6 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 5

Stelle die Zyklendarstellung der Permutation der Elemente $1, 2, \ldots, 10$ in der Zweizeilenform dar.

$$p = \begin{pmatrix} 2 & 10 & 9 & 3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 8 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 5

$$p = \begin{pmatrix} 2 & 10 & 9 & 3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 8 \end{pmatrix}$$

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 1 & 10 & 6 & 5 & 4 & 2 & 8 & 7 & 3 & 9 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 6

Berechne $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

Aufgabe 6

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 7

Gegeben ist die Permutation $p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

Berechne damit

(a) $p^2 =$

(b) $p^3 =$

(c) $p^4 =$

(d) $p^{74} =$

Aufgabe 7

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

(a) $p^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

(b) $p^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

(c) $p^4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

(d) $p^{74} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

Aufgabe 8

Bestimme die Inverse p^{-1} von $p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 7 & 6 & 3 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 8

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 7 & 6 & 3 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$p^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 7 & 4 & 1 & 6 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 9

Bestimme die Anzahl der Inversionen der Permutation

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 9

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \text{5 Inversionen}$$

Konkret handelt es sich um die Fehlstände (2,1), (5,1), (5,4), (5,3), (4,3)

Aufgabe 10

Wie viele Inversionen kann eine Permutation von 201 Elementen höchstens haben?

Aufgabe 10

$n = 201$ Elemente

Es sind maximal $s = 200 + 199 + \cdots + 2 + 1$ Inversionen möglich.

$$s = \frac{200 \cdot (200 + 1)}{2} = 20\,100$$

Aufgabe 11

Bestimme die Anzahl der Nullen, die am rechten Ende von $77!$ stehen.

Aufgabe 11

In 77! sind folgende Faktoren einmal durch 5 teilbar:

5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, 65, 70, 75.

Diese Faktoren sind noch ein zweites Mal durch 5 teilbar:

25, 50, 75.

Somit kommt der Faktor 5 insgesamt 18 Mal in 77! vor, weshalb 18 Nullen am Ende von 77! stehen.

Aufgabe 12

Berechne $\dfrac{450!}{449!}$.

Aufgabe 12

$$\frac{450!}{449!} = \frac{450 \cdot 449!}{449!} = 450$$

Aufgabe 13

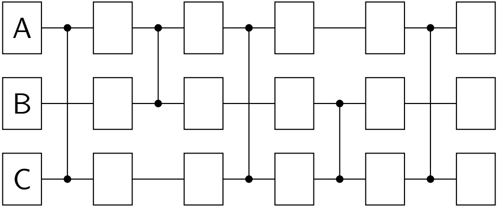
Vereinfache $\dfrac{n!}{(n-2)!}$.

Aufgabe 13

$$\frac{n!}{(n-2)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)!}{(n-2)!} = n(n-1)$$

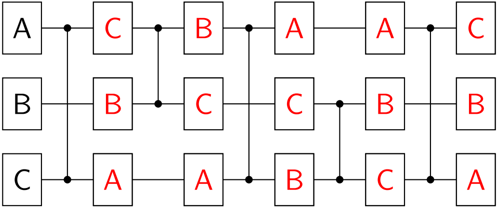
Aufgabe 14

Notiere alle Permutationen, die vom folgenden Permutationsnetzwerk erzeugt werden.



Werden so alle möglichen Permutationen erzeugt?

Aufgabe 14



Das Permutationsnetzwerk erzeugt nicht alle $3! = 6$ Permutationen, denn die Permutationen ABC und CBA kommen, von oben nach unten gelesen, jeweils doppelt vor.

Aufgabe 15

Erstelle analog zur Seite 5 in den Theorieunterlagen eine Tabelle, welche für $n = 2, 3, \ldots, 9$ die Positionen i angibt, die im Algorithmus von Heap jeweils mit der Position n vertauscht werden.

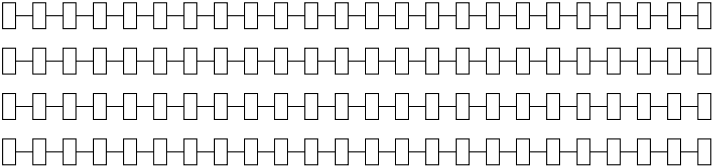
n	$T(n, i)$
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	

Aufgabe 15

n	$T(n,i)$							
2	1							
3	1	1						
4	1	2	3					
5	1	1	1	1				
6	1	2	3	4	5			
7	1	1	1	1	1	1		
8	1	2	3	4	5	6	7	
9	1	1	1	1	1	1	1	1

Aufgabe 16

Zeichne zwischen den Kästchen vertikale Verbindungslinien ein, so dass das Permutationsnetzwerk des Algorithmus von Heap für $n = 4$ entsteht. Das Eintragen aller Permutationen in die (zu kleinen) Kästchen ist nicht verlangt.



Aufgabe 16