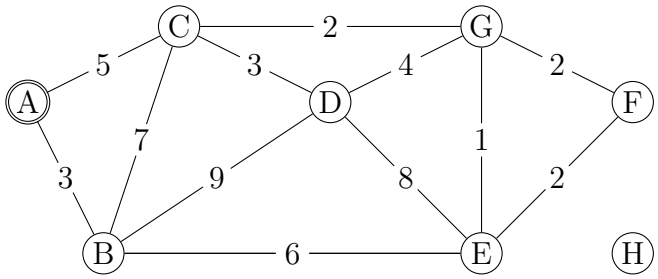
Der Algorithmus von Dijkstra

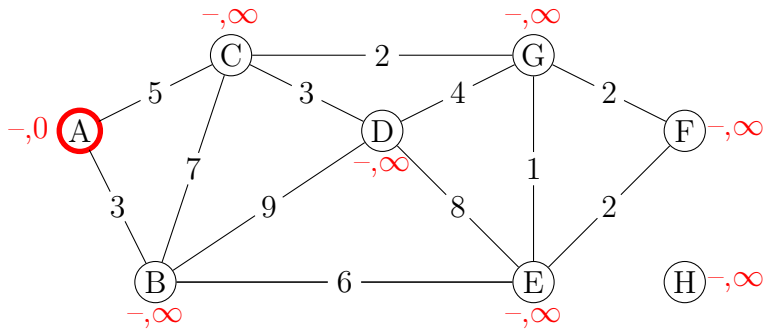
Die Ausgangslage

Gegeben: Kantengewichteter Graph G und Startknoten A

Gesucht: Kürzester Weg von A zu jedem Knoten im Graph

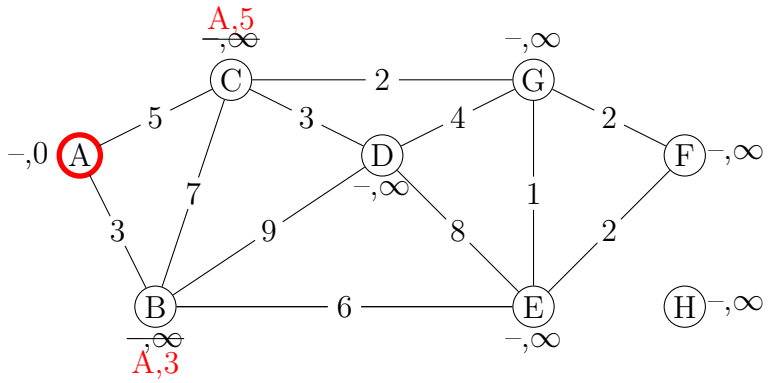


Schritt 1



Mache den Startknoten A zum ersten Arbeitsknoten (rot) und initialisiere jeden von A verschiedenen Knoten provisorisch mit einer leeren Herkunftsangabe (–) und der Distanz ∞, was sinnvoll ist, wenn ein Knoten von A aus nicht erreichbar ist.

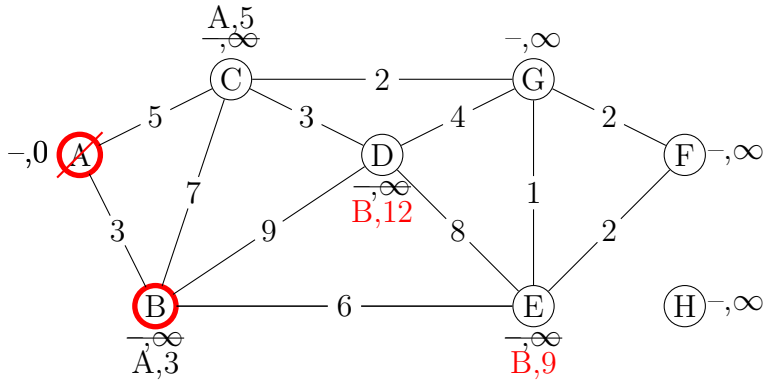
Schritt 2



Gehe vom Arbeitsknoten A (rot) zu jedem Nachbarn, der noch nicht Arbeitsknoten war und untersuche, ob die Distanz zum Zielknoten verkleinert (*relaxiert*) werden kann. Falls ja, ersetze den alten Herkunftsknoten und die alte Distanz zum Startknoten.

Vom Arbeitsknoten A sind die Knoten B und C erreichbar und noch nicht erledigt (durchgestrichen). Da der Knoten B von A die Distanz 3 hat und dies kleiner als ∞ ist, wird die alte Information (*Vorgängerknoten*, *Gesamtdistanz zum Startknoten*) ersetzt. Das gleiche mit Knoten C.

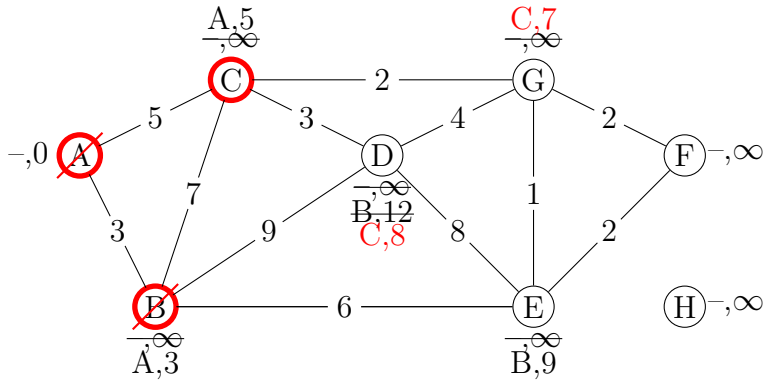
Schritt 3



Markiere den Arbeitsknoten A als erledigt und wähle unter den unerledigten Knoten den mit der kleinsten Gesamtentfernung vom Startknoten ($\rightarrow$ B). Wiederhole Schritt 2 mit Knoten B.

Von Arbeitsknoten B sind die Knoten C, D und E erreichbar und noch nicht erledigt. Geht man von Knoten B zum Knoten C, erhält man die Gesamtdistanz $3 + 7 = 10$, was weiter ist als die Distanz 5 des Pfads von A nach C. Daher lässt sich der Weg nach C nicht über B verkürzen (*relaxieren*). Bei den anderen Knoten D und E ist dies jedoch der Fall. Beachte, dass die Distanzen *kumuliert* werden, da immer die Länge des Gesamtwegs zum Startknoten (A) berechnet wird.

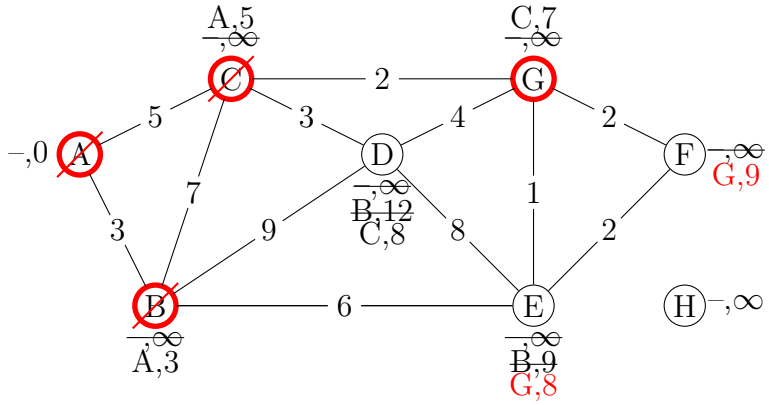
Schritt 4



Markiere Arbeitsknoten B als erledigt und wähle unter den unerledigten Knoten den mit der kleinsten Gesamtentfernung vom Startknoten (→ C). Wiederhole Schritt 2 mit Knoten C.

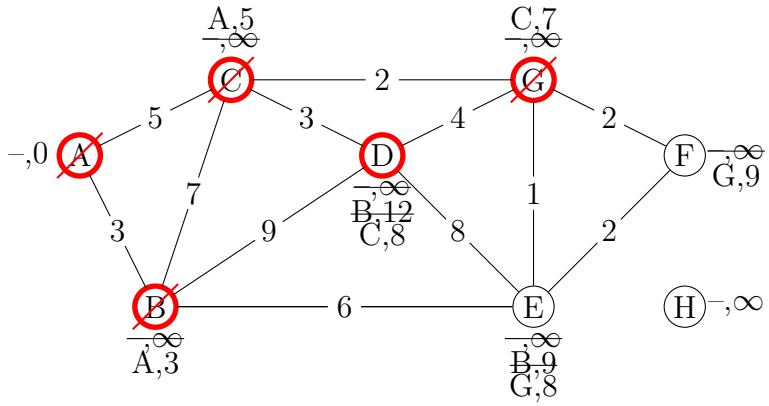
Vom Arbeitsknoten C sind die Knoten D und G erreichbar und noch nicht durchgestrichen. Geht man von Knoten C zum Knoten D, so erhält man die Gesamtdistanz $5 + 3 = 8$, was kürzer ist, als wenn man den vorher bestimmten Weg über B geht. Daher müssen die Weginformationen im Knoten D aktualisiert werden. Ebenso wenn man von C nach G geht.

Schritt 5



Markiere Arbeitsknoten C als erledigt und wähle unter den unerledigten Knoten den mit der kleinsten Gesamtentfernung vom Startknoten (→ G). Wiederhole Schritt 2 mit Knoten G.

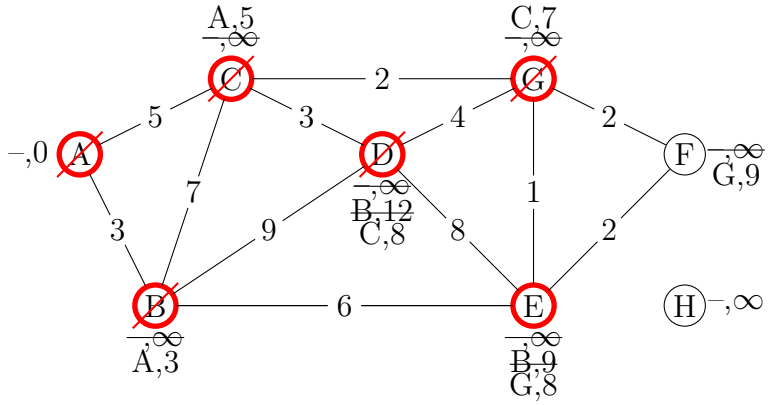
Schritt 6



Markiere Arbeitsknoten C als erledigt und wähle unter den unerledigten Knoten den mit der kleinsten Gesamtentfernung vom Startknoten. Da es zwei solche Knoten (D und E) gibt, wählen wir willkürlich Knoten D und wiederholen damit Schritt 2.

E ist der einzige noch nicht erledigte Nahchbar von D. Er kann nicht relaxiert werden, weil der bisher kürzeste Weg von A nach E (via G) nicht durch den Weg über D verküzrt werden kann.

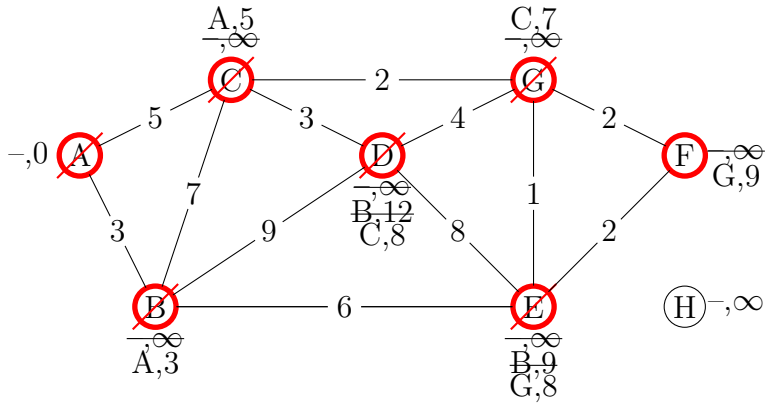
Schritt 7



Markiere Arbeitsknoten D als erledigt und wähle unter den unerledigten Knoten den mit der kleinsten Gesamtentfernung vom Startknoten (→ E). Wiederhole damit Schritt 2.

F ist der einzige noch nicht erledigte Nahchbar von E. Auch er kann nicht relaxiert werden, weil der bisher kürzeste Weg von A nach F (via G) nicht durch den Weg über E verkürzt werden kann.

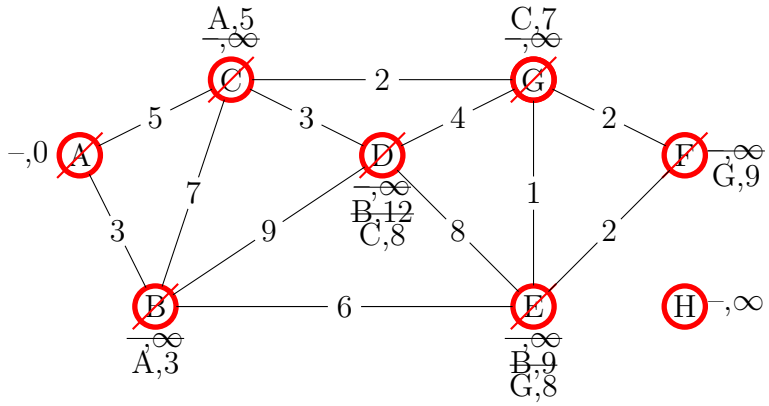
Schritt 8



Markiere Arbeitsknoten E als erledigt und wähle unter den noch unerledigten Knoten den mit der kleinsten Gesamtentfernung vom Startknoten (→ F). Wiederhole damit Schritt 2.

Hier gibt es nichts zu tun, da von F aus keine unmarkierten Nachbarn mehr erreichbar sind.

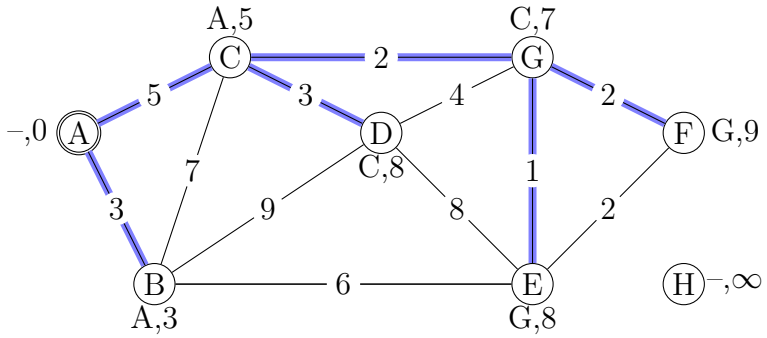
Schritt 9



Markiere Arbeitsknoten F als erledigt und wähle unter den noch unerledigten Knoten den mit der kleinsten Gesamtentfernung vom Startknoten (→ H). Da es keine weiteren unerledigten Knoten mehr gibt endet hier der Algorithmus von Dijkstra.

Grundsätzlich können wir jetzt noch den Knoten H als erledigt markieren.

Der Spannbaum



Geht man von einem Knoten v_1 zu seinem Vorgängerknoten v_2 und von dort wieder zu desssen Vorgängerknoten v_3 usw., erhält man einen kürzesten Pfad zum Startknoten A. Zusammen bilden diese Pfade einen *Spannbaum*, der im Allgemeinen aber nicht minimal sein muss, d. h. bei dem die Summe aller Kanten minimal ist.

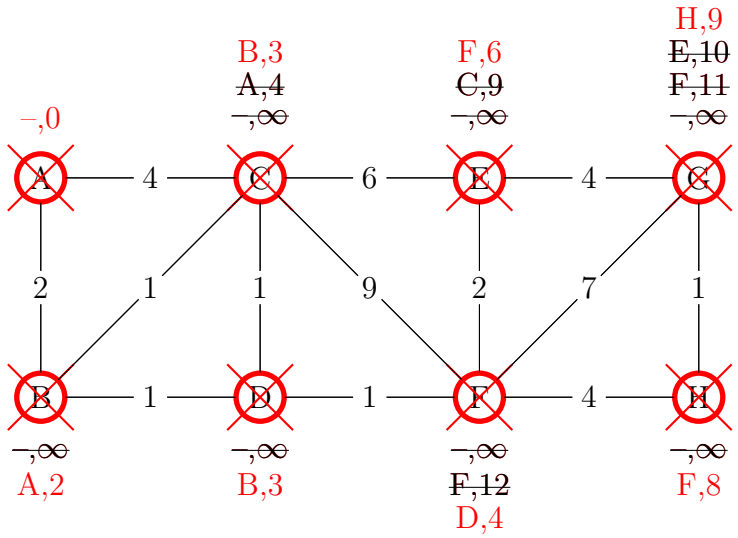
Beschreibung des Algorithmus von Dijkstra

Input: Graph G mit Kantengewichten, Startknoten S

1. *Initialisierung:* Weise jedem Knoten provisorisch seinen *Vorgänger* (–) und die Distanz zum Startknoten (0 bzw. ∞) zu. Markiere alle Knoten als unbesucht.
2. Solange es noch unbesuchte (unerledigte) Knoten gibt:
   - 2.1 Wähle darunter den Knoten v mit der kürzesten Distanz zum Startknoten und markiere ihn als besucht. Falls es mehrere solche Knoten gibt, wähle einen beliebigen aus.
   - 2.2 Berechne für alle Nachbarn w von v die Distanz $\mathrm{d}(S, w) = \mathrm{d}(S, v) + \mathrm{d}(v, w)$.
   - 2.3 *Relaxation:* Ist diese Distanz kleiner als die, welche vorher im Knoten w gepeichert wurde, ersetze die alte Distanz durch die neue und speichere den neuen Vorgänger v. Andernfalls ändere nichts.

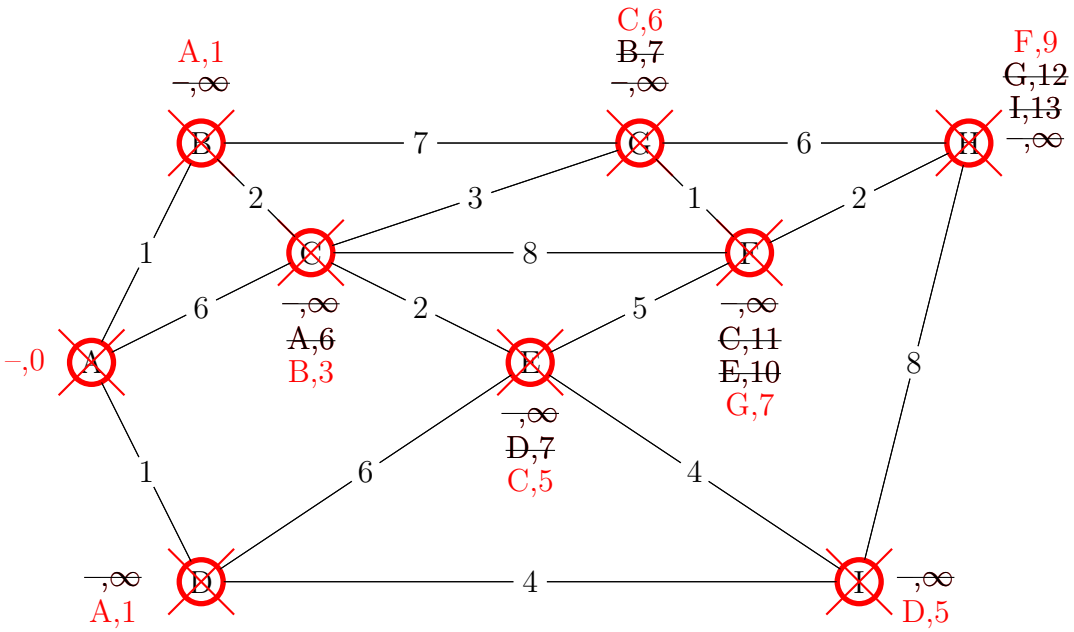
Output: Alle Knoten von G mit ihren Vorgängern und Distanzen

Aufgabe 1



Reihenfolge der Arbeitsknoten: A, B, C, D, F, E, H, G

Aufgabe 2



Reihenfolge der Arbeitsknoten: A, B, D, C, E, I, G, F, H