Der Algorithmus von Hierholzer

Pfade und Zyklen

Es sei $G = (V, E)$ ein nichtleerer Graph mit der Knotenmenge V und der Kantenmenge E.

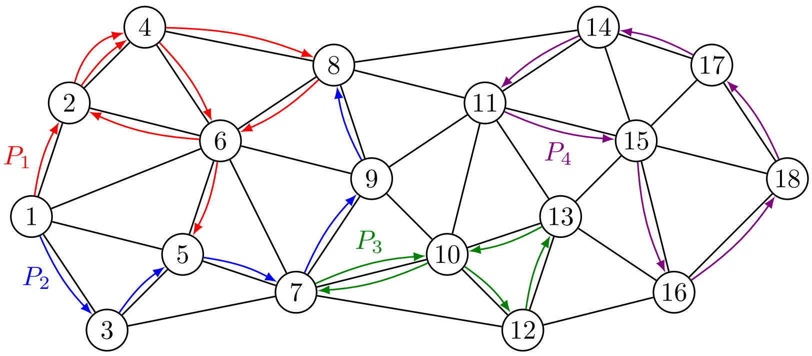
Ein *Pfad* (oder Weg) in G ist eine Folge von Knoten $P = (v_1, v_2, \ldots, v_m)$, wobei jeweils zwei benachbarte Knoten durch eine Kante aus E verbunden sind.

Ein Pfad ist *einfach*, wenn alle Kanten verschieden sind oder wenn alle bis auf die erste und letzte Kante (also v_1 und v_n) verschieden sind.

Ein Pfad $P = (v_1, v_2, \ldots, v_m)$ in G wird *Zyklus* (oder Kreis) genannt, wenn $v_1 = v_m$ gilt.

Ein Zyklus ist *einfach*, wenn er als Pfad einfach ist.

Beispiele



$G = (V, E)$ mit $V = \{1, 2, \ldots, 18\}$ und $E = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \ldots, \{17, 18\}\}$

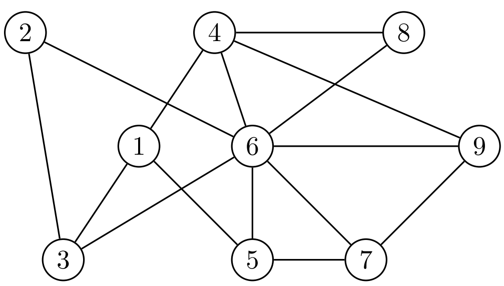
- $P_1 = (1, 2, 4, 8, 6, 2, 4, 6, 5)$ Pfad
- $P_2 = (1, 3, 5, 7, 9, 8)$ einfacher Pfad
- $P_3 = (7, 10, 12, 13, 10, 7)$ Zyklus (geschlossener Pfad)
- $P_4 = (11, 15, 16, 18, 17, 14, 11)$ einfacher Zyklus

Hamiltonkreise und Hamiltonwege

Ein *Hamiltonkreis* in G ist ein einfacher Zyklus der alle Knoten des Graphen enthält.

Entfernt man aus einem Hamiltonkreis eine Kante, so erhält man einen *Hamiltonweg*.

Beispiel: Hamiltonkreis $P_H = (1, 3, 2, 6, 8, 4, 9, 7, 5, 1)$



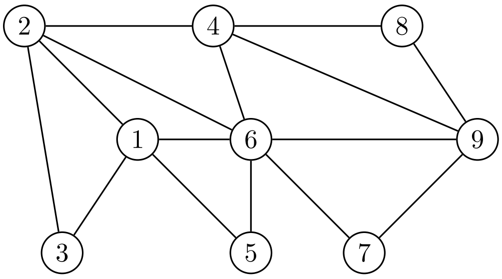
William Rowan Hamilton (4.8.1805–2.9.1865), irischer Mathematiker und Physiker

Eulerkreise und Eulerwege

Ein *Eulerkreis* in G ist ein Zyklus, der alle Kanten von G genau einmal enthält.

Entfernt man aus einem Eulerkreis eine Kante, so erhält man einen *Eulerweg*.

Beispiel: Eulerkreis $P_E = (1, 5, 6, 7, 9, 4, 8, 9, 6, 2, 4, 6, 1, 2, 3, 1)$



Leonhard Euler (15.4.1707–7.9.1783), schweizer Mathematiker, Physiker, Astronom, Geograph, Logiker und Ingenieur

Grad von Knoten und Graphen

Es sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph. Ein Knoten $v \in V$ ist *inzident* zur Kante $e \in E$, wenn $v \in e$ gilt.

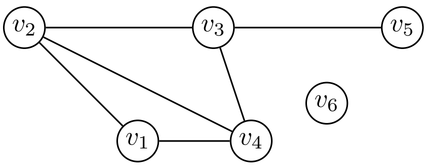
Der *Grad* $\deg(v)$ *eines Knotens* $v \in V$ ist die Anzahl der Kanten, die zu v inzident sind.

$$\deg(v) = \big|\{e \colon e \text{ ist inzident zu } v\}\big|$$

Der *Grad* $\deg(G)$ *des Graphen* G ist die Summe der Grade aller Knoten.

$$\deg(G) = \sum_{v \in V} \deg(v)$$

Beispiele



$\deg(v_1) = 2$	$\deg(v_2) = 3$	$\deg(v_3) = 3$
$\deg(v_4) = 3$	$\deg(v_5) = 1$	$\deg(v_6) = 0$
$\deg(G) = 12$		

Das Handschlaglemma

In einem ungerichteten Graphen $G = (V, E)$ gilt:

$$\deg(G) = \sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E|.$$

Beweis: Jede Kante vergrössert die Grade der beiden inzidenten Knoten jeweils um 1 und damit den Grad des Graphen um 2. Daher ist $\deg(G) = 2|E|$. $\square$

Korrollar: *In einem ungerichteten Graphen G ist die Anzahl der Knoten mit ungeradem Grad gerade.*

Beweis: Wäre die Anzahl der Knoten mit ungeradem Grad ungerade, so wäre die Summe der Grade von Knoten mit ungeradem Grad auch ungerade. Da die Summe der Grade von Knoten mit geradem Grad gerade ist, folgt daraus, dass $\deg(G)$ ungerade ist, was im Widerspruch zum Handschlaglemma steht. Daher ist die Anzahl der Knoten mit ungeradem Grad gerade. $\square$

Notwendige Bedingung für Eulerkreise

Ist $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph und $P = (v_0, v_1, v_2, \ldots, v_m, v_0)$ ein Eulerkreis in G, so hat jeder Knoten $v \in V$ einen geraden Grad.

Beweis: Es sei $P = (v_0, v_1, v_2, \ldots, v_m, v_0)$ Eulerkreis in G.

- *Fall 1 ($v \neq v_0$):* Weil P ein Eulerkreis ist, gibt es eine Kante (x, v), die nach v führt und eine Kante (v, y) die von v wegführt. Somit erhöht sich $\deg(v)$ um 2 mit jedem Mal, bei dem der Knoten v durchlaufen wird. Also hat jeder Knoten $v \neq v_0$ einen geraden Grad.
- *Fall 2 ($v = v_0$):* Die Kanten (v_0, v_1) und (v_m, v_0) vergrössern den Grad von v_0 insgesamt um 2. Wird v im Innern des Pfades noch weitere Male durchlaufen, erhöht sich der Grad wie im Fall 1 jeweils um 2. Somit hat auch v_0 einen geraden Grad. $\square$

Das Rückkehrlemma

Sei $G = (E, K)$ ein ungerichteter Graph, in dem jeder Knoten $v \in V$ einen geraden Grad hat. Dann gibt es für jeden Knoten $w \in V$ einen Kreis, der in w beginnt (und endet).

Beweis: Wir starten in w, gehen zu einem beliebigen Nachbarknoten x und löschen die Kante (w, x). Da nach Voraussetzung $\deg(x)$ gerade ist, gibt es mindestens eine Kante (x, y), über die ich x wieder verlassen kann. Wir gehen von x nach y und löschen die Kante (x, y). Nach dem Löschen der beiden Kanten hat der Knoten x immer noch einen geraden Grad, der auch null sein kann. Auf diese Weise fahren wir fort, indem wir über die noch existierenden Kanten weitere Knoten besuchen. Das es nur endlich viele Kanten gibt, gelangen wir so früher oder später zum Startknoten w, da auch dieser einen geraden Grad hat. $\square$

Satz von Euler und Hierholzer

In einem Graphen $G = (E, K)$ gibt es genau dann einen Eulerkreis, wenn alle Knoten in G einen geraden Grad haben.

Wir haben bereits oben bewiesen, dass in einem Graphen mit einem Eulerkreis alle Knoten einen geraden Grad haben müssen. Also müssen wir noch die Umkehrung beweisen, dass in einem Graphen, dessen Knoten alle geradzahlig sind, ein Eulerkreis existiert.

Der Beweis ist konstruktiv, d. h. er zeigt, wie ein Eulerkreis aufgebaut werden kann. Diese Beschreibung kann daher auch als Algorithmus (von Hierholzer) interpretiert werden.

Der Algorithmus von Hierholzer

Input: ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$

(1) Wähle einen Startknoten v_0. Dieser Knoten bildet den ersten (leeren) Pfad P.

(2) Bestimme einen Kreis P_0 der in v_0 beginnt und endet und markiere alle durchlaufenen Kanten als „besucht". Ein solcher Pfad existiert aufgrund des Rückkehrlemmas.

(3) Füge den Pfad P_0 bei v_0 in P und nenne den neuen Pfad wieder P

(4a) Ist P ein Eulerkreis, dann geben wir P aus und beenden den Algorithmus.

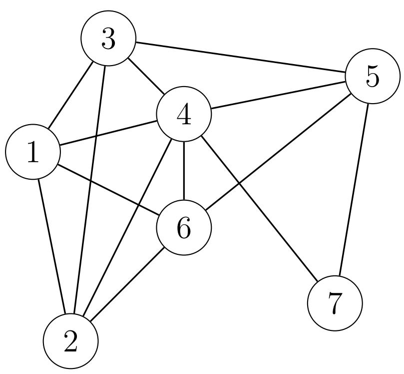
(4b) Ist P kein Eulerkreis, dann gibt es einen Knoten v_0' in P, von dem noch unbesuchte Kanten ausgehen. Wir setzen $v_0 = v_0'$ und gehen zu Schritt (2).

Da früher oder später alle Kanten gelöscht sind, muss der Algorithmus terminieren und einen Eulerkreis P ausgeben.

Hinweis: Für die manuelle Ausführung können wir von jedem Knoten aus den noch nicht besuchten Nachbarn mit der kleisten Nummer wählen.

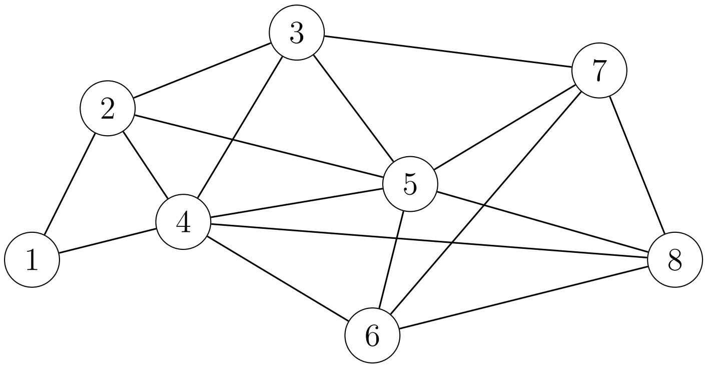
Beispiel 1

Überprüfe, ob ein Eulerkreis existiert. Falls ja, bestimme ihn mit dem Algorithmus von Hierholzer.



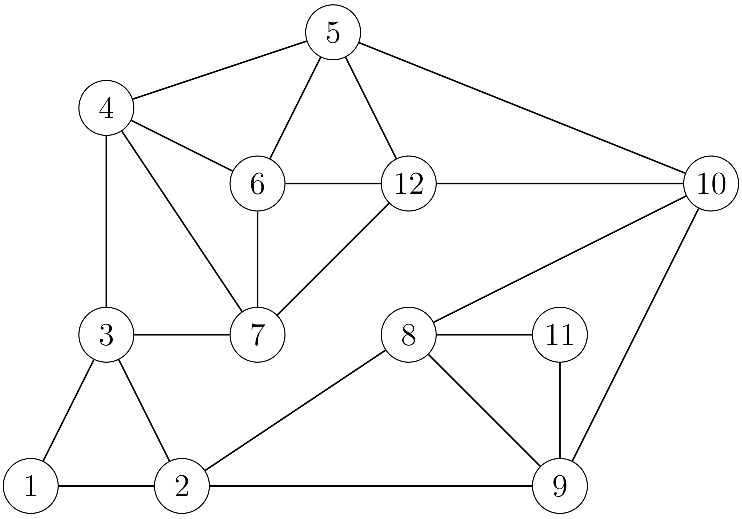
Beispiel 2

Überprüfe, ob ein Eulerkreis existiert. Falls ja, bestimme mit dem Algorithmus von Hierholzer einen Eulerkreis.



Beispiel 3

Überprüfe, ob ein Eulerkreis existiert. Falls ja, bestimme ihn mit dem Algorithmus von Hierholzer.



1 2 3 1

1 (2 8 9 2) 3 1

1 (2 (8 10 5 4 3 7 4 6 5 12 7 6 12 10 9 11 8) 9 2) 3 1