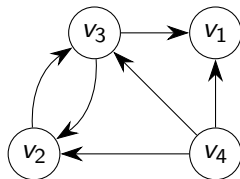


Graphentheorie (Kurzfassung)

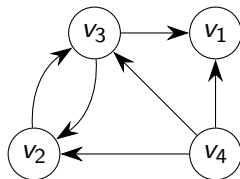
Übungen

Aufgabe 1

Stelle den folgenden gerichteten Graphen durch seine Knoten- und Kantenmenge dar.



Aufgabe 1



$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$$

$$E = \{(v_2, v_3), (v_3, v_1), (v_3, v_2), (v_4, v_1), (v_4, v_2), (v_4, v_3)\}$$

Aufgabe 2

Gegeben ist der Graph $G = (V, E)$ mit

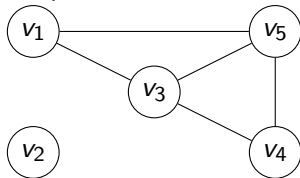
- ▶ $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$
- ▶ $E = \{\{v_1, v_3\}, \{v_1, v_5\}, \{v_3, v_4\}, \{v_3, v_5\}, \{v_4, v_5\}\}$

- (a) Um welche Art von Graph handelt es sich?
- (b) Stelle den Graphen möglichst überschneidungsfrei dar.

Aufgabe 2

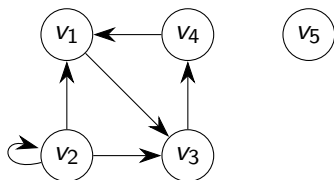
(a) um einen ungerichteten Graphen

(b) Graph:

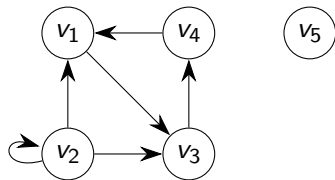


Aufgabe 3

Wie lautet die Adjazenz-Matrix des folgenden Graphen?



Aufgabe 3

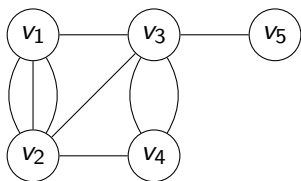


$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Zeilennummer: Index des Herkunftsknotens
Spaltennummer: Index des Zielknotens

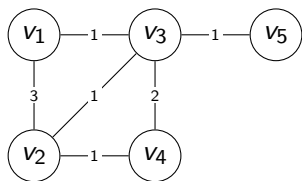
Aufgabe 4

Stelle den folgenden Multigraphen als Graph mit entsprechenden Kantengewichten dar.



Aufgabe 4

Alle Kanten zwischen zwei Ecken werden durch eine Kante mit dem Gewicht der ursprünglichen Anzahl Kanten ersetzt.



Aufgabe 5

Stelle den Graphen $G = (V, E)$ mit

- ▶ $V = \{a, b, c, d, e\}$ und
- ▶ $E = \{\{a, b\}, \{a, d\}, \{b, c\}\}$

durch Adjazenzlisten dar.

Aufgabe 5

Graph:

- ▶ $V = \{a, b, c, d, e\}$ und
- ▶ $E = \{\{a, b\}, \{a, d\}, \{b, c\}\}$

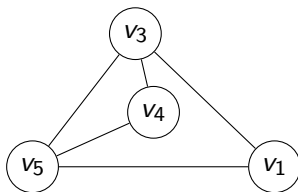
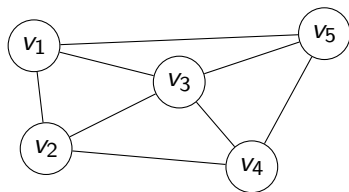
Adjazentlisten:

a	$\rightarrow$	$\{b, d\}$
b	$\rightarrow$	$\{a, c\}$
c	$\rightarrow$	$\{b\}$
d	$\rightarrow$	$\{a\}$
e	$\rightarrow$	$\{\}$

Beachte, dass in einem ungerichteten Graph die Nachbarschaftbeziehungen für Knoten symmetrisch sind: Wenn beispielsweise Knoten b ein Nachbar von Knoten a ist, dann ist auch Knoten b Nachbar von Knoten a . Dies gilt jedoch nicht in gerichteten Graphen.

Aufgabe 6

Ist der Graph rechts ein Teilgraph des linken Graphen?



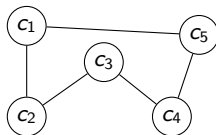
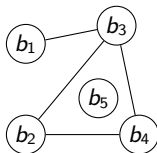
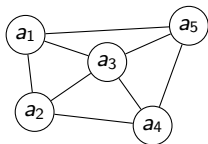
Aufgabe 6

Ja, denn mit $G = (V, E)$ gilt

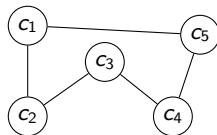
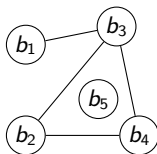
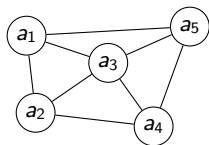
- ▶ $V' = \{e_1, e_3, e_4, e_5\} \subset V$
- ▶ $E' = \{\{e_1, e_3\}, \{e_1, e_5\}, \{e_3, e_4\}, \{e_3, e_5\}, \{e_4, e_5\}\} \subset E$

Aufgabe 7

Berechne jeweils den Grad des Graphen und vergleiche diesen Wert mit der Anzahl seiner Kanten. Was stellst du fest?

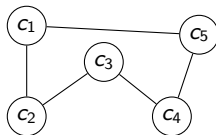
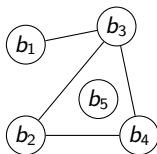
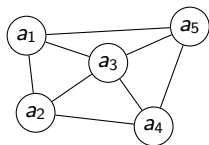


Aufgabe 7



$$\text{Deg}(G_a) = 3 + 3 + 3 + 4 + 3 = 16; |E| = 8$$

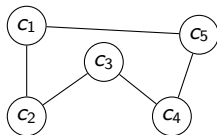
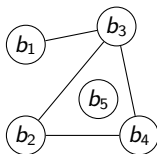
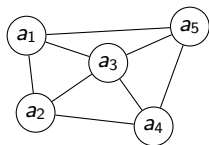
Aufgabe 7



$$\text{Deg}(G_a) = 3 + 3 + 3 + 4 + 3 = 16; |E| = 8$$

$$\text{Deg}(G_b) = 1 + 2 + 3 + 2 + 0 = 8; |E| = 4$$

Aufgabe 7

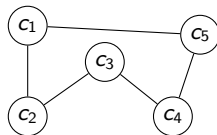
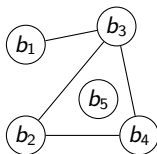
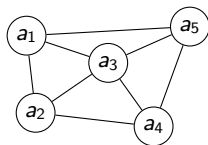


$$\text{Deg}(G_a) = 3 + 3 + 3 + 4 + 3 = 16; |E| = 8$$

$$\text{Deg}(G_b) = 1 + 2 + 3 + 2 + 0 = 8; |E| = 4$$

$$\text{Deg}(G) = 2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 10; |E| = 5$$

Aufgabe 7



$$\text{Deg}(G_a) = 3 + 3 + 3 + 4 + 3 = 16; |E| = 8$$

$$\text{Deg}(G_b) = 1 + 2 + 3 + 2 + 0 = 8; |E| = 4$$

$$\text{Deg}(G) = 2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 10; |E| = 5$$

Behauptung: $\deg(G) = 2|E|$

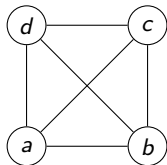
Beweis: Jede Kante ist adjazent zu genau zwei Knoten und wird so in der Summe aller Knotengrade doppelt gezählt.

Aufgabe 8

Zeichne einen vollständigen Graphen der Ordnung 4.

Aufgabe 8

Vollständiger Graph der Ordnung 4:



Aufgabe 9

Wie viele Kanten kann ein einfacher ungerichteter Graph mit 8 Knoten maximal haben?

Aufgabe 9

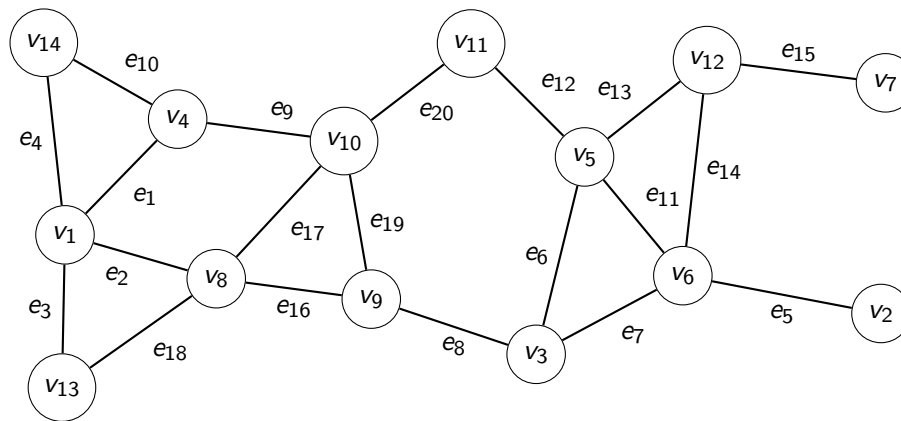
Ein Graph mit 8 Knoten kann maximal

$$\frac{8 \cdot 7}{2} = 28$$

Kanten haben. Grund: Jeder der 8 Knoten kann mit 7 anderen Knoten verbunden werden. Das ergibt $8 \cdot 7$ Kanten. Auf diese Weise zählt man aber jede Kante doppelt, weshalb man das Produkt noch durch 2 dividieren muss.

Aufgabe 10

Ist die Aussage zum abgebildeten Graphen $G = (V, E)$ wahr oder falsch?



- (a) v_8 und e_{17} sind inzident.
- (b) e_5 und e_6 sind adjazent.
- (c) v_5 und v_6 sind adjazent.

Aufgabe 10

- (a) Wahr, denn e_{17} endet in v_8 .
- (b) Falsch, denn e_5 und e_6 enden nicht in einem gemeinsamen Knoten.
- (c) Wahr, denn v_5 und v_6 sind durch die Kante e_{11} verbunden.
- (d) Falsch, denn v_7 ist durch e_{15} mit v_{12} verbunden.
- (e) Wahr (in einem Pfad dürfen Knoten oder Kanten auch mehrfach vorkommen)
- (f) Falsch, denn bei einem Zyklus müssen Anfangs- und Endknoten übereinstimmen.
- (g) Wahr, denn es handelt sich um einen Zyklus in dem, abgesehen vom Start- und vom Endknoten alle Knoten *verschieden* sind.
- (h) Falsch, denn die Knoten v_{10} und v_5 sind nicht durch eine Kante verbunden.
- (i) Wahr, denn es gibt keine Kante, die einen Knoten mit sich selbst verbindet.
- (j) Wahr, denn zwischen zwei beliebigen (verschiedenen) Knoten gibt es einen Pfad, der diese miteinander verbindet.

Aufgabe 11

Gib an, wie viele Cliques mit

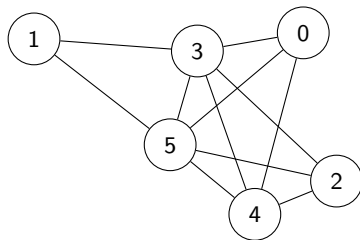
(a) 1 Knoten

(b) 2 Knoten

(c) 3 Knoten

(d) 4 Knoten

der folgende Graph enthält.

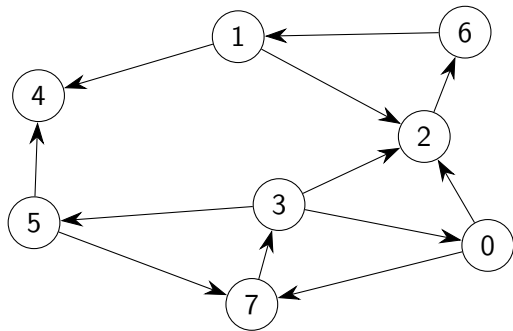


Aufgabe 11

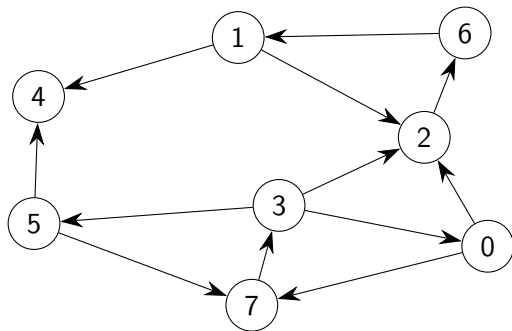
- (a) Anzahl Cliquen mit 1 Knoten: 6
- (b) Anzahl Cliquen mit 2 Knoten: 11
- (c) Anzahl Cliquen mit 3 Knoten: 8
- (d) Anzahl Cliquen mit 4 Knoten: 2

Aufgabe 12

Bestimme alle starken Zusammenhangskomponenten des Graphen. Beachte, dass jede starke Zusammenhangskomponenten maximal sein muss und jeder Knoten in genau einer Zusammenhangskomponente liegt.



Aufgabe 12



starke Zusammenhangskomponenten:

$$V_1 = \{0, 7, 3, 5\}$$

$$V_2 = \{1, 2, 6\}$$

$$V_3 = \{4\}$$

Aufgabe 13

Charakterisiere die Begriffe aus der Graphentheorie kurz und präzise mit den richtigen Fachausdrücken.

- (a) Baum
- (b) Wald

Aufgabe 13

- (a) Ein Baum ist ein zusammenhängender azyklischer (ungerichteter) Graph
- (b) Ein Wald ist ein Graph, dessen Zusammenhangskomponenten Bäume sind.