Das Travelling Salesman Problem

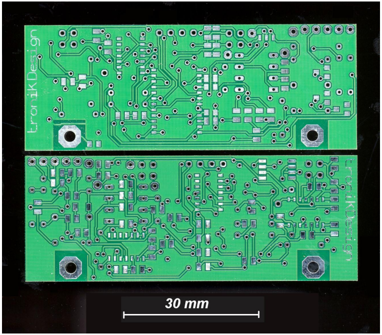
Prüfungsvorbereitung

Aufgabe 1

Nenne zwei verschiedene Anwendungen im Bereich von Technik und Wirtschaft, in denen die Lösung des Travelling Salesman Problems von Bedeutung ist.

Aufgabe 1

- Logistik: Tour eines Postboten oder eines Paketverteilers
- Technik: Bohren von Leiterplatten



Quelle: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Dldklpcb.jpg

Aufgabe 2

Wie viele grundsätzlich verschiedene Rundreisen (also bei denen es nicht auf den Startknoten ankommt) gibt es bei einem

(a) symmetrischen,

(b) unsymmetrischen

TSP mit 9 Städten?

Aufgabe 2

(a) $\frac{1}{2}(9-1)! = \frac{1}{2} \cdot 8!$

(b) $(9-1)! = 8!$

Da es gemäss Aufgabenstellung nicht auf die Startstadt ankommt, kann man irgend eine Stadt als Startort auswählen. Dann gibt es nur noch 8! Möglichkeiten, die übrigen 8 Städte zu besuchen. Beim symmetrischen TSP halbiert sich dieser Wert nochmals.

Aufgabe 3

Bestimme alle Permutationen der Zeichen in $\{U, Z, C, J, D\}$, die mit UZ beginnen.

Aufgabe 3

Alle Permutationen von $\{U, Z, C, J, D\}$, die mit UZ beginnen:

UZCJD	UZJCD	UZDCJ
UZCDJ	UZJDC	UZDJC

Aufgabe 4

Berechne $\dfrac{96!}{95!}$.

Aufgabe 4

$$\frac{96!}{95!} = \frac{96 \cdot 95!}{95!} = 96$$

Aufgabe 5

Vereinfache $146 \cdot 144! \cdot 145$.

Aufgabe 5

$$146 \cdot 144! \cdot 145 = 146 \cdot 145 \cdot 144! = 146!$$

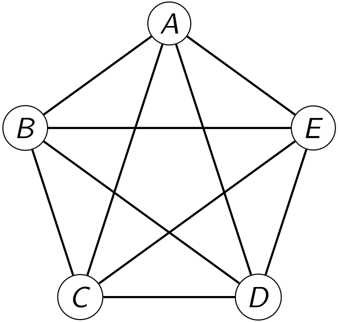
Aufgabe 6

(a) Skizziere einen vollständigen Graphen mit den 5 Knoten $A, B, \ldots, E$.

(b) Wie viele Kanten hat dieser Graph insgesamt?

Aufgabe 6

(a) Vollständiger Graph mit 5 Knoten:



(b) $\dfrac{5 \cdot 4}{2} = 10$ Kanten

Aufgabe 7

Bestimme für die folgende Distanzmatrix die Tour(en) mit minimaler Länge.

	A	B	C	D
A	0	8	8	7
B	8	0	4	2
C	8	4	0	8
D	7	2	8	0

Aufgabe 7

	A	B	C	D
A	0	8	8	7
B	8	0	4	2
C	8	4	0	8
D	7	2	8	0

$$ABCDA \quad \Rightarrow \quad 27$$

$$ABDCA \quad \Rightarrow \quad 26$$

$$ACBDA \quad \Rightarrow \quad 21 \qquad \text{optimale Route}$$

$$ACDBA \sim ABDCA$$

$$ADBCA \sim ACBDA$$

$$ADCBA \sim ABCDA$$

Aufgabe 8

Eine Implementierung des Brute Force-Algorithmus zur Lösung eines TSPs benötigt auf einem Computer für 12 Städte etwa 30 Sekunden.

Wie lange wird dieselbe Implementierung auf demselben Computer zur Lösung eines TSPs mit 14 Städten ungefähr benötigen?

Aufgabe 8

$$T(12) = C \cdot 12! = 30\,\mathrm{s}$$

$$T(14) = C \cdot 14! = 14 \cdot 13 \cdot C \cdot 12! = 182 \cdot 30\,\mathrm{s} = 5460\,\mathrm{s} = 91\,\mathrm{Min}$$

Aufgabe 9

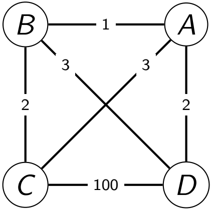
Gegeben ist folgende Distanzmatrix

	A	B	C	D
A	0	1	3	2
B	1	0	2	3
C	3	2	0	100
D	2	3	100	0

Zeige, dass man mit der Nearest-Neighbor-Heuristik für jeden Startknoten dieselbe Tourlänge erhält. Gibt es eine bessere Lösung? Wenn ja, gib eine an.

Aufgabe 9

	A	B	C	D
A	0	1	3	2
B	1	0	2	3
C	3	2	0	100
D	2	3	100	0



$A \xrightarrow{1} B \xrightarrow{2} C \xrightarrow{100} D \xrightarrow{2} A$ Länge: 105

$B \xrightarrow{1} A \xrightarrow{2} D \xrightarrow{100} C \xrightarrow{2} B$ Länge: 105

$C \xrightarrow{2} B \xrightarrow{1} A \xrightarrow{2} D \xrightarrow{100} C$ Länge: 105

$D \xrightarrow{2} A \xrightarrow{1} B \xrightarrow{2} C \xrightarrow{100} D$ Länge: 105

Die Route $ADBCA$ mit der Länge 10 ist deutlich kürzer.

Die Nearest Neighbor-Heuristik sucht *gierig* nach der nächsten kürzesten Verbindung und wird so möglicherweise am Ende dazu gewzungen, Strecken mit hohen Kosten zu durchlaufen.

Aufgabe 10

Erkläre, was eine *Heuristik* in der Informatik ist und wozu sie gebraucht wird.

Aufgabe 10

Eine Heuristik ist ein Lösungsverfahren, das mit beschränkten Informationen über das zu lösende Problem und geringem Rechenaufwand eine plausible Lösung findet. Der Nachteil ist, dass die Lösung nicht zwingend optimal sein muss.

Heuristiken werden dann eingesetzt, wenn für die optimale Lösung ein exponentieller oder grösserer Aufwand betrieben werden muss.

Aufgabe 11

Gegeben eine Distanzmatrix

	A	B	C	D	E
A	0	7	1	2	3
B	7	0	5	10	4
C	1	5	0	6	8
D	2	10	6	0	9
E	3	4	8	9	0

(a) Berechne die Kosten für die Rundreise mit der Nearest-Neighbor-Heuristik und dem Startknoten B.

(b) (A, D, C, B, E, A) ist eine kürzeste Tour. Um wie viel Prozent ist die Approximation in (a) länger als die Länge der kürzesten Tour?

Aufgabe 11

	A	B	C	D	E
A	0	7	1	2	3
B	7	0	5	10	4
C	1	5	0	6	8
D	2	10	6	0	9
E	3	4	8	9	0

(a) $B \xrightarrow{4} E \xrightarrow{3} A \xrightarrow{1} C \xrightarrow{6} D \xrightarrow{10} B$ (Total: 24)

Aufgabe 11

	A	B	C	D	E
A	0	7	1	2	3
B	7	0	5	10	4
C	1	5	0	6	8
D	2	10	6	0	9
E	3	4	8	9	0

(a) $B \xrightarrow{4} E \xrightarrow{3} A \xrightarrow{1} C \xrightarrow{6} D \xrightarrow{10} B$ (Total: 24)

(b) optimale Tour: $A \xrightarrow{2} D \xrightarrow{6} C \xrightarrow{5} B \xrightarrow{4} E \xrightarrow{3} A$ (Total: 20)

Aufgabe 11

	A	B	C	D	E
A	0	7	1	2	3
B	7	0	5	10	4
C	1	5	0	6	8
D	2	10	6	0	9
E	3	4	8	9	0

(a) $B \xrightarrow{4} E \xrightarrow{3} A \xrightarrow{1} C \xrightarrow{6} D \xrightarrow{10} B$ (Total: 24)

(b) optimale Tour: $A \xrightarrow{2} D \xrightarrow{6} C \xrightarrow{5} B \xrightarrow{4} E \xrightarrow{3} A$ (Total: 20)

$$\begin{aligned} 20 &\mathrel{\widehat{=}} 100\% \\ 24 &\mathrel{\widehat{=}} x \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{100\%}{20} \cdot 24 = 120\%$$

Aufgabe 11

	A	B	C	D	E
A	0	7	1	2	3
B	7	0	5	10	4
C	1	5	0	6	8
D	2	10	6	0	9
E	3	4	8	9	0

(a) $B \xrightarrow{4} E \xrightarrow{3} A \xrightarrow{1} C \xrightarrow{6} D \xrightarrow{10} B$ (Total: 24)

(b) optimale Tour: $A \xrightarrow{2} D \xrightarrow{6} C \xrightarrow{5} B \xrightarrow{4} E \xrightarrow{3} A$ (Total: 20)

$$\begin{aligned} 20 &\mathrel{\widehat{=}} 100\% \\ 24 &\mathrel{\widehat{=}} x \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{100\%}{20} \cdot 24 = 120\%$$

Die Approximation in (b) ist 20% länger als die kürzesten Rundreise.

Aufgabe 12

Gegeben ist die Distanzmatrix eines TSP.

	A	B	C	D
A	0	100	5	3
B	100	0	2	4
C	5	2	0	1
D	3	4	1	0

(a) Berechne die Länge der Rundreise mit der Nearest-Neighbor-Heuristik und dem Startknoten A.

(b) Bestimme eine der Rundreisen mit minimaler Länge.

(c) Bestimme eine der Rundreisen mit maximaler Länge.

Aufgabe 12

	A	B	C	D
A	0	100	5	3
B	100	0	2	4
C	5	2	0	1
D	3	4	1	0

(a) NNH mit Start in A:

$A \xrightarrow{3} D \xrightarrow{1} C \xrightarrow{2} B \xrightarrow{100} A$ (Total: 106)

Aufgabe 12

	A	B	C	D
A	0	100	5	3
B	100	0	2	4
C	5	2	0	1
D	3	4	1	0

(a) NNH mit Start in A:

$A \xrightarrow{3} D \xrightarrow{1} C \xrightarrow{2} B \xrightarrow{100} A$ (Total: 106)

(b) Eine Rundreise mit minimaler Länge:

$A \xrightarrow{5} C \xrightarrow{2} B \xrightarrow{4} D \xrightarrow{3} A$ (Total: 14)

Aufgabe 12

	A	B	C	D
A	0	100	5	3
B	100	0	2	4
C	5	2	0	1
D	3	4	1	0

(a) NNH mit Start in A:

$A \xrightarrow{3} D \xrightarrow{1} C \xrightarrow{2} B \xrightarrow{100} A$ (Total: 106)

(b) Eine Rundreise mit minimaler Länge:

$A \xrightarrow{5} C \xrightarrow{2} B \xrightarrow{4} D \xrightarrow{3} A$ (Total: 14)

(c) Eine Rundreise mit maximaler Länge:

$A \xrightarrow{100} B \xrightarrow{4} D \xrightarrow{1} C \xrightarrow{5} A$ (Total: 110)

Aufgabe 13

Zeige, dass die folgende Distanzmatrix nicht metrisch ist.

	A	B	C	D
A	0	8	7	6
B	8	0	9	5
C	7	9	0	3
D	6	5	3	0

Aufgabe 13

	A	B	C	D
A	0	8	7	6
B	8	0	9	5
C	7	9	0	3
D	6	5	3	0

Wir beginnen den Test mit dem grössten Distanzwert $BC = 9$. Als dritte Knoten kommen dann A und D in Frage.

$$9 = BC \leq BA + AC = 8 + 7 = 15 \quad \text{richtig}$$
$$9 = BC \leq BD + DC = 5 + 3 = 8 \quad \text{falsch}$$

Somit ist mindestens eine der Dreicksungleichungen verletzt und die Distanzmatrix ist nicht metrisch.

Aufgabe 14

Zeige, dass die folgende Distanzmatrix nicht metrisch ist.

	A	B	C	D	E
A	0	11	10	12	8
B	11	0	9	7	6
C	10	9	0	5	4
D	12	7	5	0	3
E	8	6	4	3	0

Aufgabe 14

	A	B	C	D	E
A	0	11	10	12	8
B	11	0	9	7	6
C	10	9	0	5	4
D	12	7	5	0	3
E	8	6	4	3	0

Wir beginnen den Test mit dem grössten Distanzwert $AD = 12$. Als dritte Knoten kommen B, C und E in Frage.

$12 = AD \leq AB + BD = 11 + 7 = 18$ richtig

$12 = AD \leq AC + CD = 10 + 5 = 15$ richtig

$12 = AD \leq AE + ED = 8 + 3 = 11$ falsch

Somit ist mindestens eine der Dreicksungleichungen verletzt und die Distanzmatrix ist nicht metrisch.

Aufgabe 15

Zeige, dass die folgende Distanzmatrix nicht metrisch ist.

	A	B	C	D
A	0	9	7	2
B	9	0	6	8
C	7	6	0	4
D	2	8	4	0

Aufgabe 15

	A	B	C	D
A	0	9	7	2
B	9	0	6	8
C	7	6	0	4
D	2	8	4	0

Beginne den Test mit dem grössten Distanzwert $AB = 9$.

$9 = AB \leq AC + CB = 7 + 6 = 13$ richtig

$9 = AB \leq AD + DB = 2 + 8 = 10$ richtig

Setze den Test mit den nächsttieferen Distanzwerten fort.

$8 = BD \leq BA + AD = 9 + 2 = 11$ richtig

$8 = BD \leq BC + CD = 6 + 4 = 10$ richtig

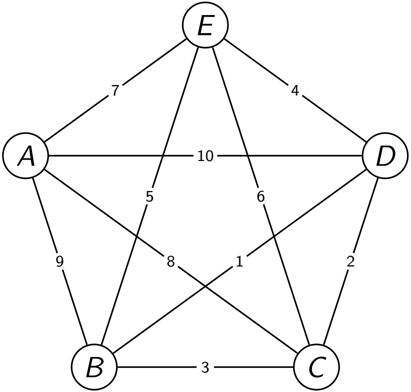
$7 = AC \leq AB + BC = 9 + 6 = 15$ richtig

$7 = AC \leq AD + DC = 2 + 4 = 6$ falsch

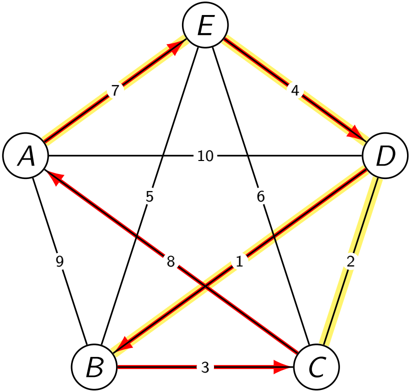
$\Rightarrow$ Die Distanzmatrix ist nicht metrisch.

Aufgabe 16

Löse das TSP mit der MST-Heuristik und dem Startknoten A.



Aufgabe 16



MST:

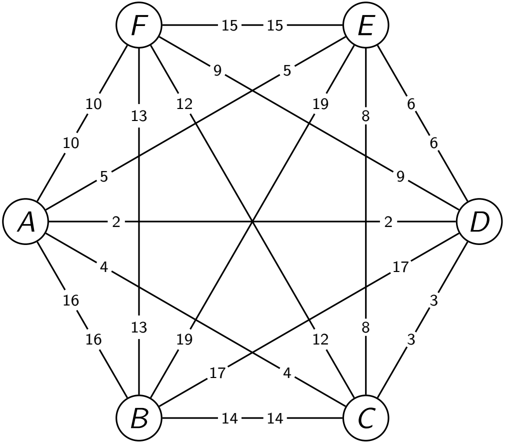
A	E
B	D
C	D
D	E, B, C
E	A, D

DFS: $A \xrightarrow{7} E \xrightarrow{4} D \xrightarrow{1} B \xrightarrow{3} C \xrightarrow{8} A$ (Total: 23)

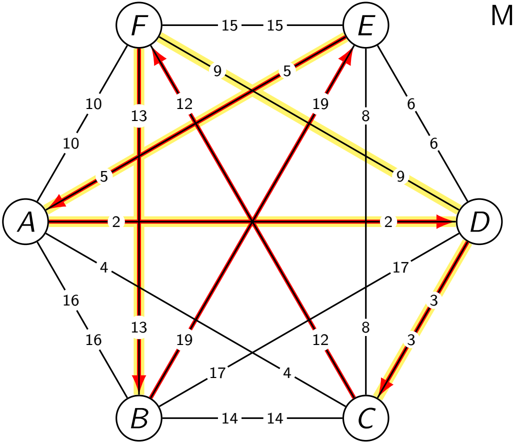
eine optimale Tour: $A \xrightarrow{8} C \xrightarrow{3} B \xrightarrow{1} D \xrightarrow{4} E \xrightarrow{7} A$ (Total: 23)

Aufgabe 17

Löse das TSP mit der MST-Heuristik und dem Startknoten A.



Aufgabe 17



MST:

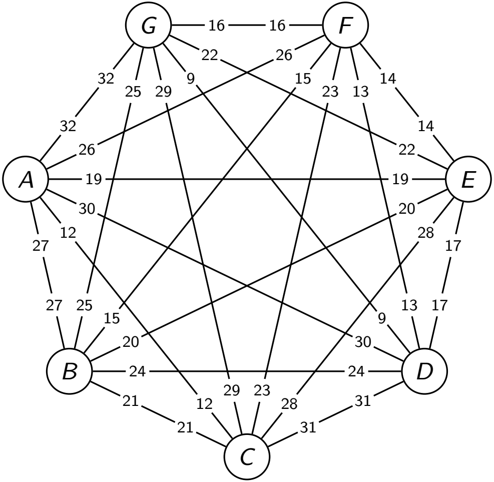
A	D, E
B	F
C	D
D	A, C, F
E	A
F	D, B

DFS: $A \xrightarrow{2} D \xrightarrow{3} C \xrightarrow{12} F \xrightarrow{13} B \xrightarrow{19} E \xrightarrow{5} A$ (Total: 54)

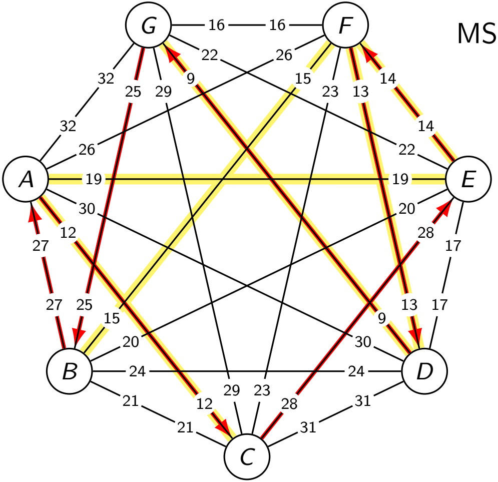
eine optimale Tour: $A \xrightarrow{4} C \xrightarrow{14} B \xrightarrow{13} F \xrightarrow{9} D \xrightarrow{6} E \xrightarrow{5} A$ (Total: 51)

Aufgabe 18

Löse das TSP mit der MST-Heuristik und dem Startknoten A.



Aufgabe 18



MST:

A	C, E
B	F
C	A
D	F, G
E	A, F
F	E, D, B
G	D

DFS: $A \xrightarrow{12} C \xrightarrow{28} E \xrightarrow{14} F \xrightarrow{13} D \xrightarrow{9} G \xrightarrow{25} B \xrightarrow{27} A$ (Total: 128)

eine optimale Tour: $A \xrightarrow{12} C \xrightarrow{21} B \xrightarrow{15} F \xrightarrow{16} G \xrightarrow{9} D \xrightarrow{17} E \xrightarrow{19} A$ (Total: 109)

Aufgabe 19

Vergleiche die drei im Unterricht behandelten Lösungsmethoden für das TSP in Bezug auf

(a) Input

(b) Laufzeit

(c) Output (Qualität der Lösung)

Aufgabe 19

(a): Input (b): Laufzeit (c): Output (Qualität der Lösung)

Brute Force-Methode

(a) Distanzmatrix
(b) $O(n!)$; für grosse n nicht mehr handhabbar
(c) liefert eine optimale Lösung

Nearest-Neighbor-Heuristik

(a) Distanzmatrix und ein Startknoten
(b) Polynomialzeit (praktisch lösbar)
(c) liefert im Allgemeinen keine optimale Lösung

Minimum-Spanning-Tree-Heuristik

(a) metrische Distanzmatrix
(b) Polynomialzeit (praktisch lösbar)
(c) Maximal doppelt so hohe Kosten wie beim Optimum