

1 Mengenlehre

Aufgabe 1.1

Gegeben sind die Mengen $A = \{1, 2, 3\}$ und $B = \{2, 3, 6, 8\}$.
Bestimme $A \cup B$.

Aufgabe 1.2

Gegeben sind die Mengen $A = \{1, 2, 3\}$ und $B = \{2, 3, 6, 8\}$.
Bestimme $A \cap B$.

Aufgabe 1.3

Gegeben sind die Mengen $A = \{1, 2, 3\}$ und $B = \{2, 3, 6, 8\}$.
Bestimme $A \setminus B$.

Aufgabe 1.4

Gegeben sind die Mengen $A = \{1, 2, 3\}$ und $B = \{2, 3, 6, 8\}$.
Bestimme $B \setminus A$.

Aufgabe 1.5

Gegeben sind die Mengen $A = \{1, 2, 3\}$ und $B = \{2, 5\}$.
Bestimme $A \times B$.

Aufgabe 1.6

Gegeben sind die Mengen $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 5\}$ und $C = \{4, 5, 7, 9\}$.
Bestimme $|A \times B \times C|$.

Aufgabe 1.7

Gegeben ist die Menge $A = \{2, 4, 7\}$.
Bestimme die Potenzmenge $\mathcal{P}(A)$.

Aufgabe 1.8

Gegeben ist die Menge $A = \{1, 3, 4, 5, 6, 8, 9\}$.
Bestimme $|\mathcal{P}(A)|$.

2 Funktionen

Aufgabe 2.1

Was ist eine Funktion?

Aufgabe 2.2

Wann wird eine Funktion $f: X \rightarrow Y$ *injektiv* genannt?

Aufgabe 2.3

Wann wird eine Funktion $f: X \rightarrow Y$ *surjektiv* genannt?

Aufgabe 2.4

Wann wird eine Funktion $f: X \rightarrow Y$ *bijektiv* genannt?

Aufgabe 2.5

Was bedeutet $(f \circ g \circ h)(x)$?

Aufgabe 2.6

Wie bestimmt man die inverse Abbildung f^{-1} einer Funktion $f: X \rightarrow Y$?

Aufgabe 2.7

Bestimme die Umkehrfunktion von $f: y = \frac{2}{x-1}$.

Aufgabe 2.8

Bestimme den maximalen Definitionsbereich der Funktion mit der Gleichung

$$f(x) = \frac{\sqrt{16-x^2}}{(x^2-2) \cdot \sin^2(x)}.$$

3 Zahlbereiche

Aufgabe 3.1

Beschreibe die Menge der natürlichen Zahlen in aufzählender Form und gib alle Operationen an bezüglich derer die Menge abgeschlossen ist.

Aufgabe 3.2

Beschreibe die Menge der ganzen Zahlen in aufzählender Form und gib alle Operationen an bezüglich derer die Menge abgeschlossen ist.

Aufgabe 3.3

Gib die Menge der rationalen Zahlen in beschreibender Form an und zähle alle Operationen auf, bezüglich derer die Menge abgeschlossen ist.

Aufgabe 3.4

Gib die Menge der reellen Zahlen in beschreibender Form an und zähle alle Operationen auf bezüglich derer die Menge abgeschlossen ist.

Aufgabe 3.5

Gib die Menge der komplexen Zahlen in beschreibender Form an.

4 Potenzen

Aufgabe 4.1

Benenne alle Teile des Ausdrucks $c = a^b$ mit Fachausdrücken.

Aufgabe 4.2

Berechne $17^7 \cdot 17^{-5}$.

Aufgabe 4.3

Berechne $200^4 \cdot 5^4$.

Aufgabe 4.4

Berechne $2^8 : 2^{17}$.

Aufgabe 4.5

Berechne $51^3 : 17^3$.

Aufgabe 4.6

Berechne $(-67)^0$

Aufgabe 4.7

Berechne 0^0 .

Aufgabe 4.8

Berechne $(-1)^{-235}$.

Aufgabe 4.9

Berechne 0^{137} .

Aufgabe 4.10

Berechne 2^{3^2} .

Aufgabe 4.11

Berechne $(2^3)^2$.

Aufgabe 4.12

Vereinfache $2a^7 + 7a^7 - a^7$.

5 Wurzeln

Aufgabe 5.1

Benenne alle Teile des Ausdrucks $c = \sqrt[a]{b}$ mit Fachausdrücken.

Aufgabe 5.2

Berechne $\sqrt[5]{32^6}$.

Aufgabe 5.3

Berechne $\sqrt{8} \cdot \sqrt{18}$.

Aufgabe 5.4

Berechne $\sqrt{7} : \sqrt{63}$.

Aufgabe 5.5

Vereinfache $\sqrt[5]{\sqrt[3]{2}}$.

Aufgabe 5.6

Vereinfache $\sqrt{2\sqrt{2}}$.

Aufgabe 5.7

Berechne $\sqrt[3]{27\,000\,000}$.

Aufgabe 5.8

Berechne $\sqrt{0.000121}$.

6 Logarithmen

Aufgabe 6.1

Benenne alle Teile des Ausdrucks $c = \log_a b$ mit Fachausdrücken.

Aufgabe 6.2

Berechne $\log_3 81$.

Aufgabe 6.3

Berechne $\log_2 \frac{1}{4}$.

Aufgabe 6.4

Berechne $\log_8 2$.

Aufgabe 6.5

Berechne $\log_{\sqrt{5}} 25\sqrt{5}$.

Aufgabe 6.6

Berechne $\log_2 1$.

Aufgabe 6.7

Berechne $\log_2(-4)$.

Aufgabe 6.8

Berechne $\log_2(128 \cdot 256)$.

Aufgabe 6.9

Berechne $\log_3(243 : \sqrt{27})$.

Aufgabe 6.10

Berechne $\log_2(52 : 13)$.

Aufgabe 6.11

Berechne $\ln \frac{1}{\sqrt[7]{e}}$

Aufgabe 6.12

Vereinfache $2 \log_a \sqrt{x} - \frac{1}{3} \log_a y^3$.

Aufgabe 6.13

Berechne $\lg(0.00001)$

Aufgabe 6.14

Berechne $\text{lb}(1024)$.

Aufgabe 6.15

Drücke $\log_3 2$ durch den natürlichen Logarithmus aus.

Aufgabe 6.16

Berechne $9^{2 \log_3 5}$.

Aufgabe 6.17

Berechne $\log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot \log_5 9$.

7 Ausmultiplizieren

Aufgabe 7.1

Multipliziere $(a + b)^2$ aus

Aufgabe 7.2

Multipliziere $(a - b)^2$ aus

Aufgabe 7.3

Multipliziere $(a + b)(a - b)$ aus

Aufgabe 7.4

Multipliziere $(a + b)^5$ aus.

Aufgabe 7.5

Multipliziere $(2a - 3b)^3$ aus.

Aufgabe 7.6

Multipliziere $(x + y + z)^2$ aus.

8 Faktorisieren

Aufgabe 8.1

Faktorisiere $x^4 + 4x^3 + 3x^2$.

Aufgabe 8.2

Faktorisiere $y^8 - 1$.

Aufgabe 8.3

Faktorisiere $ac + ad + bc + bd + a + b$.

9 Polynome

Aufgabe 9.1

Werte $f(x) = x^4 - 14x^3 + 14x - 16 - 7$ an der Stelle $x = 13$ aus.

Aufgabe 9.2

Wie viele Koeffizienten hat ein Polynom vom Grad 7?

Aufgabe 9.3

Zerlege das Polynom

$$p(x) = 3x^5 - 22x^4 + 58x^3 - 68x^2 + 35x - 6$$

in Linearfaktoren, wenn bekannt ist, dass alle bis auf eine Nullstelle Element von \mathbb{N} sind.

Aufgabe 9.4

Berechne $(x^4 - 3x^2 + 4x + 2) : (x^2 + x - 1)$.

Aufgabe 9.5

Führe mit $\frac{5x + 3}{(x - 1)(x + 3)}$ eine Partialbruchzerlegung durch.

Aufgabe 9.6

Führe mit $\frac{x^2 + 2x + 3}{(x - 1)^3}$ eine Partialbruchzerlegung durch.

Aufgabe 9.7

Führe mit $\frac{x^2 - 1}{(x^2 + 1)(x^2 + 2)}$ eine Partialbruchzerlegung durch.

Aufgabe 9.8

Wie lautet der Fundamentalsatz der Algebra?

10 Gleichungen

Aufgabe 10.1

Löse die Gleichung $ax + b = cx + d$ nach x auf.

Aufgabe 10.2

Löse die Gleichung

$$x(2 + x) - 5x - x(3 - 2x) = 4(6 - (5 - x)x)$$

in \mathbb{R} .

Aufgabe 10.3

Löse die Gleichung $\frac{x + 8}{x - 2} = \frac{3x - 8}{x^2 - 9x + 14}$ in \mathbb{R} .

Aufgabe 10.4

(a) Löse die Gleichung $\frac{x - a}{x - b} = \frac{x - c}{x - d}$ nach x auf.

(b) Welche Bedingung(en) müssen a , b , c und d erfüllen, damit die Gleichung in (a) ...

- genau eine Lösung,
- keine Lösung,
- unendlich viele Lösungen

hat?

Aufgabe 10.5

Löse die Gleichung $\sqrt{x+2} + 1 = \sqrt{2x+2}$ in \mathbb{R} .

Aufgabe 10.6

Löse die Gleichung $x^6 = 16^3$ in \mathbb{R} .

Aufgabe 10.7

Löse die Gleichung $x^4 + x^2 - 12 = 0$ in \mathbb{C} .

Aufgabe 10.8

Löse die Gleichung $2^{x+4} = 4^{x-1}$ in \mathbb{R} .

Aufgabe 10.9

Löse die Gleichung $2^{x+3} = 3^{x+2}$ in \mathbb{R} .

Aufgabe 10.10

Löse die Gleichung $2^{x+2} + 32 = 4^x$ in \mathbb{R} .

Aufgabe 10.11

Löse die Gleichung $\log_2(x+3) + \log_2(x+4) = \log_2(x+7)$ in \mathbb{R} .

Aufgabe 10.12

Löse die Gleichung $\log_4 10 = \log_2 x$ in \mathbb{R} .

Aufgabe 10.13

Löse die Gleichung $\log_4(\log_2 x - 1) = \log_{16} 9$ in \mathbb{R} .

Aufgabe 10.14

Bestimme alle Lösungen der Gleichung $\sin \varphi = \frac{1}{2}$ im Intervall $[0, 2\pi)$.

Aufgabe 10.15

Bestimme alle Lösungen der Gleichung $\cos \varphi = -\frac{1}{2}$ im Intervall $[0, 2\pi)$.

Aufgabe 10.16

Bestimme alle Lösungen der Gleichung $\tan 3\varphi = 1$ im Intervall $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

11 Gleichungssysteme

Aufgabe 11.1

Bestimme die Lösungsmenge des Gleichungssystems ohne Taschenrechner.

$$\begin{aligned}2x - 3y &= 5 \\ x + 3y &= 7\end{aligned}$$

Aufgabe 11.2

Bestimme die Lösungsmenge des Gleichungssystems ohne Taschenrechner.

$$\begin{aligned}2x - 3y &= 2 \\ 4x - 6y &= 3\end{aligned}$$

Aufgabe 11.3

Bestimme die Lösungsmenge des Gleichungssystems ohne Taschenrechner.

$$\begin{aligned}2x + 3y &= 5 \\ 4x + 6y &= 10\end{aligned}$$

Aufgabe 11.4

Bestimme die Lösungsmenge des Gleichungssystems

$$\begin{aligned}0 &= 2x - 3y + 4z - 5 \\ x &= 1 + 3t \\ y &= 5 + t \\ z &= 2 - 2t\end{aligned}$$

Aufgabe 11.5

(a) Bestimme die Lösungsmenge des Gleichungssystems.

$$\begin{aligned}(x - 3)^2 + (y + 1)^2 &= 4 \\ x + y &= 4\end{aligned}$$

(b) Gib eine geometrische Interpretation für die Gleichungen und deren Lösung an.

12 Trigonometrie

Aufgabe 12.1

Rechne die Winkelgrösse $\alpha = 120^\circ$ ins Bogenmass um.

Aufgabe 12.2

Rechne die Winkelgrösse $\alpha = \frac{5}{4}\pi$ ins Gradmass um.

Aufgabe 12.3

Wie ist der Sinus eines Winkels α im rechtwinkligen Dreieck definiert?

Aufgabe 12.4

Wie ist der Cosinus eines Winkels α im rechtwinkligen Dreieck definiert?

Aufgabe 12.5

Wie ist der Tangens eines Winkels α im rechtwinkligen Dreieck definiert?

Aufgabe 12.6

Vervollständige die Wertetabelle.

α	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin \alpha$					
$\cos \alpha$					
$\tan \alpha$					

Aufgabe 12.7

Nenne mindestens eine Beziehung zwischen Sinus und Cosinus eines Winkels α .

Aufgabe 12.8

Nenne eine Beziehung zwischen Sinus, Cosinus und Tangens eines Winkels α .

13 Planimetrie

Aufgabe 13.1

Formuliere den ersten Strahlensatz.

Aufgabe 13.2

Formuliere den zweiten Strahlensatz.

Aufgabe 13.3

Formuliere den dritten Strahlensatz.

Aufgabe 13.4

Gib zwei verschiedene Formeln an, um den Flächeninhalt eines allgemeinen Dreiecks zu berechnen.

Aufgabe 13.5

Formuliere der Satz des Pythagoras.

Aufgabe 13.6

Gib Formeln für die Berechnung von Umfang, Höhe und Flächeninhalt eines gleichseitigen Dreiecks mit der Seitenlänge s an.

Aufgabe 13.7

Gib Formeln für die Berechnung von Umfang, Diagonale und Flächeninhalt eines Quadrats mit der Seitenlänge s an.

Aufgabe 13.8

Gib die Formeln für die Berechnung des Umfangs (u), der Mittellinie (m) und des Flächeninhalts (A) eines Trapezes an.

Aufgabe 13.9

Gib die Formeln für die Berechnung des Umfangs (u) und des Flächeninhalts (A) eines Kreises mit dem Radius r an.

14 Stereometrie

Aufgabe 14.1

Gib Formeln für die Berechnung von Raumdiagonallänge d , Oberflächeninhalt (S) und Volumen (V) eines Würfels mit der Kantenlänge a an.

Aufgabe 14.2

Gib Formeln für die Berechnung von Raumdiagonallänge d , Oberflächeninhalt (S) und Volumen (V) eines Quaders mit den Kantenlängen a , b und c an.

Aufgabe 14.3

Gib Formeln für die Berechnung von Mantelflächeninhalt (M), Oberflächeninhalt (S) und Volumen (V) eines geraden Prismas mit der Grundfläche G , dem Grundflächenumfang u und der Höhe h an.

Aufgabe 14.4

Gib Formeln für die Berechnung von Mantelflächeninhalt (M), Oberflächeninhalt (S) und Volumen (V) eines geraden Kreiszylinders mit dem Grundflächenradius r und der Höhe h an.

Aufgabe 14.5

Gib die Formel für die Berechnung des Volumens (V) einer Pyramide mit dem Grundflächeninhalt G und der Höhe h an.

Aufgabe 14.6

Gib Formeln für die Berechnung von Mantelflächeninhalt (M), Oberflächeninhalt (S) und Volumen (V) eines geraden Kreiskegels mit dem Grundflächenradius r und der Höhe h an.

Aufgabe 14.7

Gib Formeln für die Berechnung von Oberflächeninhalt (S) und Volumen (V) einer Kugel mit dem Radius r an.

15 Folgen

Aufgabe 15.1

Was ist eine reelle Zahlenfolge?

Aufgabe 15.2

Gegeben: Folge (a_n) mit $a_n = 3n + 2$

- (a) Um welche Art von Folge handelt es sich?
- (b) In welcher Weise ist die Folge definiert?
- (c) Berechne a_{11} .
- (d) Berechne s_{11} .

Aufgabe 15.3

Gegeben: Folge (a_n) mit $a_1 = 96$ und $a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n$.

- (a) Um welche Art von Folge handelt es sich?
- (b) In welcher Weise ist die Folge definiert?
- (c) Berechne a_6 .
- (d) Berechne s_6 .
- (e) Berechne $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$.

Aufgabe 15.4

Gegeben: Folge (a_n) mit $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \frac{a_n}{2 + a_n}$

- (a) In welcher Weise ist die Folge definiert?
- (b) Berechne a_2 , a_3 , a_4 und a_5 .
- (c) Gib eine explizite Formel für (a_n) an.
- (d) Untersuche die Folge in Bezug auf Wachstum, Häufungspunkte und Grenzwert.

Aufgabe 15.5

Gegeben: Folge (a_n) mit $a_n = \prod_{k=1}^n \frac{k}{k+1}$

Berechne a_{1000} .

Aufgabe 15.6

Untersuche die Folge (a_n) mit $a_n = \frac{n+1}{n}$ auf Konvergenz und gib gegebenenfalls den Grenzwert an.

Aufgabe 15.7

Gegeben: Folge (a_n) mit $a_n = n^{(-1)^n}$

- (a) Berechne die ersten sechs Glieder der Folge (a_n) .
- (b) Untersuche (a_n) auf Konvergenz und gib gegebenenfalls den Grenzwert an.

Aufgabe 15.8

Berechne den Grenzwert der Folge (a_n) mit $a_n = (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$ für $n \rightarrow \infty$.

16 Vollständige Induktion

Aufgabe 16.1

- (a) Berechne die ersten 4 Glieder der Teilsummenfolge

$$s_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$$

- (b) Gib eine explizite Formel zur Berechnung von s_n an.
- (c) Beweise diese Formel mit vollständiger Induktion.

Aufgabe 16.2

Zeige mit vollständiger Induktion, dass $5^n + 7$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ durch 4 teilbar ist.

17 Stetigkeit

Aufgabe 17.1

Beschreibe die *Stetigkeit* einer Funktion f auf formale und auf anschauliche Art.

Aufgabe 17.2

Untersuche, ob die stückweise definierte Funktion

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{wenn } x \leq -2 \\ 6 - x^2 & \text{wenn } -2 < x \end{cases}$$

an der Stelle $x = -2$ stetig ist.

Aufgabe 17.3

Für welchen Wert des Parameters ist die abschnittsweise definierte Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 & \text{für } |x| < 2 \\ a/x^2 & \text{für } |x| \geq 2 \end{cases}$$

überall stetig?

18 Graphen

Aufgabe 18.1

Skizziere die Funktion f mit der Gleichung $f(x) = -\frac{3}{4}x + 1$ in ein Koordinatensystem.

Aufgabe 18.2

Skizziere möglichst geschickt die Graphen der Funktionen

- $f(x) = x^2$
- $g(x) = -\frac{1}{8}(x - 1)^2 + 2$

in ein gemeinsames Koordinatensystem.

Aufgabe 18.3

Skizziere möglichst geschickt die Graphen der Funktionen

- $f(x) = \sin x$
- $g(x) = 2 \sin \left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

in ein gemeinsames Koordinatensystem.

Aufgabe 18.4

Skizziere den Graphen der Funktion $f(x) = x + \frac{1}{x}$ durch Superposition.

Aufgabe 18.5

Skizziere den Graphen der Funktion $f(x) = 2^{-x}$ und den Graphen der Umkehrfunktion von f ins gleiche Koordinatensystem.

Aufgabe 18.6

Skizziere den Graphen der Funktion $f(x) = \frac{x-1}{x+2}$.