

Maturavorbereitung (Basics)

Funktionen

Funktionen 1

Was ist eine Funktion?

Funktionen 1

Was ist eine Funktion?

Eine Funktion ist eine Vorschrift, die jedem x aus einer Definitionsmenge D genau ein y aus einer Wertemenge W zuordnet.

Funktionen 2

Wie heissen die Teile des Ausdrucks $f: y = x^2 + 2x + 3$?

Funktionen 2

Wie heissen die Teile des Ausdrucks $f: y = x^2 + 2x + 3$?

f :

Funktionen 2

Wie heissen die Teile des Ausdrucks $f: y = x^2 + 2x + 3$?

f : Name der Funktion

Funktionen 2

Wie heißen die Teile des Ausdrucks $f: y = x^2 + 2x + 3$?

f : Name der Funktion

x :

Funktionen 2

Wie heissen die Teile des Ausdrucks $f: y = x^2 + 2x + 3$?

f : Name der Funktion

x : Argument, Stelle

Funktionen 2

Wie heißen die Teile des Ausdrucks $f: y = x^2 + 2x + 3$?

f : Name der Funktion

x : Argument, Stelle

y :

Funktionen 2

Wie heissen die Teile des Ausdrucks $f: y = x^2 + 2x + 3$?

f : Name der Funktion

x : Argument, Stelle

y : Wert

Funktionen 2

Wie heissen die Teile des Ausdrucks $f: y = x^2 + 2x + 3$?

f : Name der Funktion

x : Argument, Stelle

y : Wert

$y = x^2 + 2x + 3$:

Funktionen 2

Wie heissen die Teile des Ausdrucks $f: y = x^2 + 2x + 3$?

f : Name der Funktion

x : Argument, Stelle

y : Wert

$y = x^2 + 2x + 3$: Funktionsgleichung

Funktionen 2

Wie heissen die Teile des Ausdrucks $f: y = x^2 + 2x + 3$?

f : Name der Funktion

x : Argument, Stelle

y : Wert

$y = x^2 + 2x + 3$: Funktionsgleichung

$x^2 + 2x + 3$:

Funktionen 2

Wie heissen die Teile des Ausdrucks $f: y = x^2 + 2x + 3$?

f : Name der Funktion

x : Argument, Stelle

y : Wert

$y = x^2 + 2x + 3$: Funktionsgleichung

$x^2 + 2x + 3$: Funktionsterm

Funktionen 3

Was ist der *Graph* G_f einer Funktion f ?

Funktionen 3

Was ist der *Graph* G_f einer Funktion f ?

Die Menge aller Zahlenpaare (Punkte) mit der ersten Koordinate x und der zweiten Koordinate $y = f(x)$. Formal:

$$G_f = \{(x, y) \mid y = f(x), x \in D\}$$

Funktionen 4

Was ist eine *Nullstelle* einer Funktion f ?

Funktionen 4

Was ist eine *Nullstelle* einer Funktion f ?

Eine Nullstelle x_0 ist eine Stelle $x_0 \in D$ für die $f(x_0) = 0$ gilt.

Funktionen 5

Was ist der *Ordinatenabschnitt* einer Funktion f ?

Funktionen 5

Was ist der *Ordinatenabschnitt* einer Funktion f ?

Der Ordinatenabschnitt y_0 ist der Wert der Funktion f an der Stelle $x = 0$, sofern $0 \in D$. Formal:

$$y_0 = f(0) \text{ falls } 0 \in D$$

Funktionen 6

Wie ist eine *lineare Funktion* definiert?

Funktionen 6

Wie ist eine *lineare Funktion* definiert?

$$f: y = mx + q \quad (\text{oder: } y = ax + b)$$

Funktionen 6

Wie ist eine *lineare Funktion* definiert?

$$f: y = mx + q \quad (\text{oder: } y = ax + b)$$

$m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ ist Steigung der zugehörigen Gerade

Funktionen 6

Wie ist eine *lineare Funktion* definiert?

$$f: y = mx + q \quad (\text{oder: } y = ax + b)$$

$m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ ist Steigung der zugehörigen Gerade

q ist der Ordinatenabschnitt der Gerade

Bemerkung: Streng genommen sind lineare Funktionen von der Form $f: y = ax$ und der oben beschriebene Funktionstyp wird *affin-linear* genannt. Im „normalen“ Schulunterricht ist jedoch die kürzere Bezeichnung *lineare Funktion* üblich.

Funktionen 7

Wie ist eine *quadratische Funktion* definiert?

Funktionen 7

Wie ist eine *quadratische Funktion* definiert?

$$f: y = ax^2 + bx + c$$

Funktionen 7

Wie ist eine *quadratische Funktion* definiert?

$$f: y = ax^2 + bx + c$$

$a > 0$: Parabel nach oben geöffnet

Funktionen 7

Wie ist eine *quadratische Funktion* definiert?

$$f: y = ax^2 + bx + c$$

$a > 0$: Parabel nach oben geöffnet

$a < 0$: Parabel nach unten geöffnet

Funktionen 7

Wie ist eine *quadratische Funktion* definiert?

$$f: y = ax^2 + bx + c$$

$a > 0$: Parabel nach oben geöffnet

$a < 0$: Parabel nach unten geöffnet

c : Ordinatenabschnitt

Durch quadratische Ergänzung kann die quadratische Funktion in die Scheitelpunktform gebracht und so einfacher skizziert werden:

$$y = ax^2 + bx + c = a(x - u)^2 + v$$

Funktionen 8

Gib den Definitionsbereich D der Funktion $f: y = x^2 + 3x - 9$ an.

Funktionen 8

Gib den Definitionsbereich D der Funktion $f: y = x^2 + 3x - 9$ an.

$$D = \mathbb{R}$$

Funktionen 9

Gib den Definitionsbereich D der Funktion $f: y = \sqrt{x}$ an.

Funktionen 9

Gib den Definitionsbereich D der Funktion $f: y = \sqrt{x}$ an.

$$D = [0, \infty) = \mathbb{R}_0^+$$

Funktionen 10

Gib den Definitionsbereich D der Funktion $f: y = \frac{x}{x^2 - 4}$ an.

Funktionen 10

Gib den Definitionsbereich D der Funktion $f: y = \frac{x}{x^2 - 4}$ an.

$$D = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$$

Funktionen 11

Gib den Definitionsbereich D der Funktion $f: y = e^x$ an.

Funktionen 11

Gib den Definitionsbereich D der Funktion $f: y = e^x$ an.

$$D = \mathbb{R}$$

Funktionen 12

Gib den Definitionsbereich D der Funktion $f: y = \ln(x)$ an.

Funktionen 12

Gib den Definitionsbereich D der Funktion $f: y = \ln(x)$ an.

$$D = (0, \infty) = \mathbb{R}^+$$

Funktionen 13

Gib den Definitionsbereich D der Funktion $f: y = \sin(x)$ an.

Funktionen 13

Gib den Definitionsbereich D der Funktion $f: y = \sin(x)$ an.

$$D = \mathbb{R}$$

Funktionen 14

Gib den Definitionsbereich D der Funktion $f: y = \cos(x)$ an.

Funktionen 14

Gib den Definitionsbereich D der Funktion $f: y = \cos(x)$ an.

$$D = \mathbb{R}$$

Funktionen 15

Gib den Definitionsbereich D der Funktion $f: y = \tan(x)$ an.

Funktionen 15

Gib den Definitionsbereich D der Funktion $f: y = \tan(x)$ an.

$$D = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi \text{ mit } k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Funktionen 15

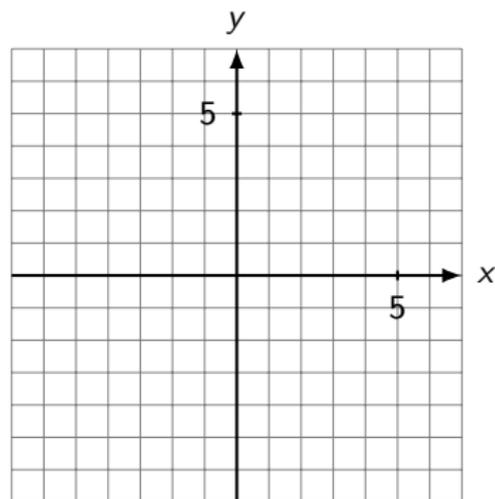
Gib den Definitionsbereich D der Funktion $f: y = \tan(x)$ an.

$$D = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi \text{ mit } k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Da $\tan(\alpha)$ die Steigung einer Geraden angibt, die mit der x -Achse den Winkel α einschliesst, ist diese Steigung für $\alpha = \pm 90^\circ, \pm 270^\circ, \pm 450^\circ, \dots$ unendlich gross und daher nicht definiert. Rechnet man diese „problematischen“ Winkel ins Bogenmass um und entfernt sie aus dem Definitionsbereich, erhält man die obige Darstellung von D .

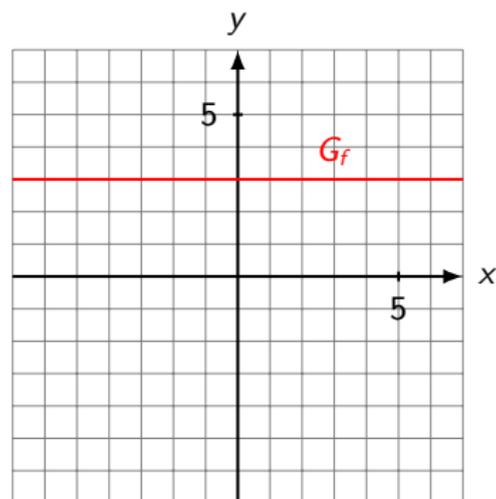
Funktionen 16

Skizziere den Graphen der Funktion $f: y = 3$ ins vorbereitete Koordinatensystem.



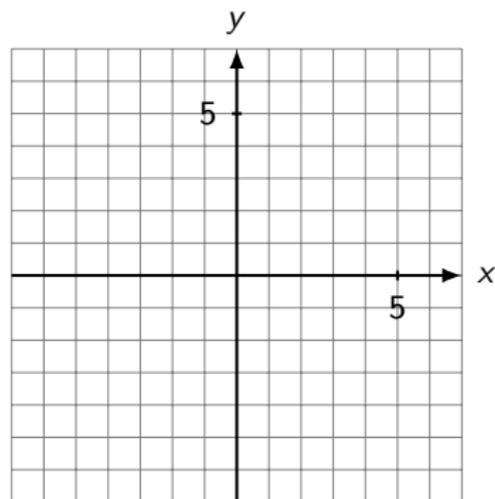
Funktionen 16

Skizziere den Graphen der Funktion $f: y = 3$ ins vorbereitete Koordinatensystem.



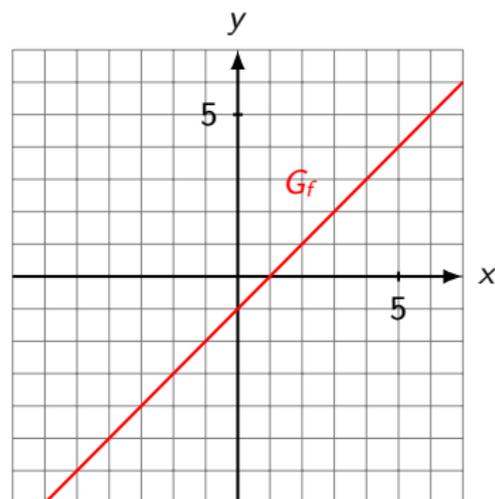
Funktionen 17

Skizziere den Graphen der Funktion $f: y = x - 1$ ins vorbereitete Koordinatensystem.



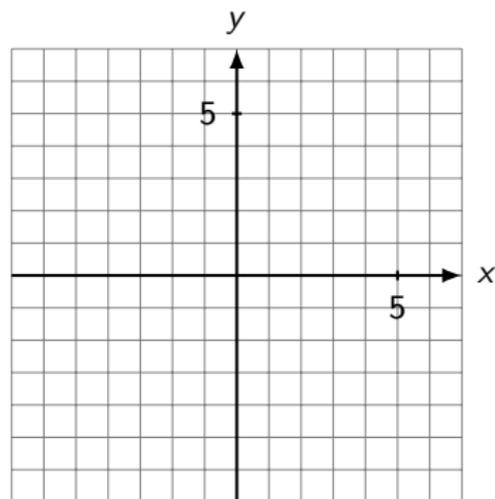
Funktionen 17

Skizziere den Graphen der Funktion $f: y = x - 1$ ins vorbereitete Koordinatensystem.



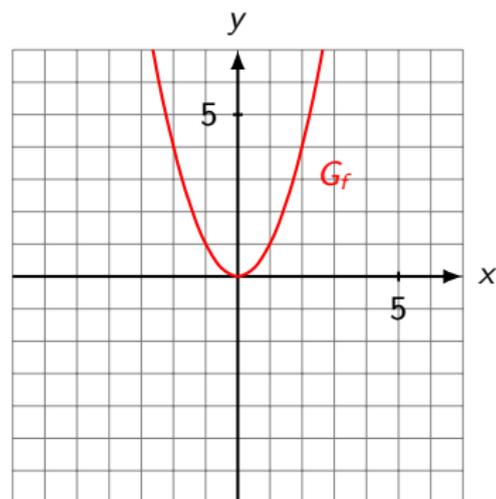
Funktionen 18

Skizziere den Graphen der Funktion $f: y = x^2$ ins vorbereitete Koordinatensystem.



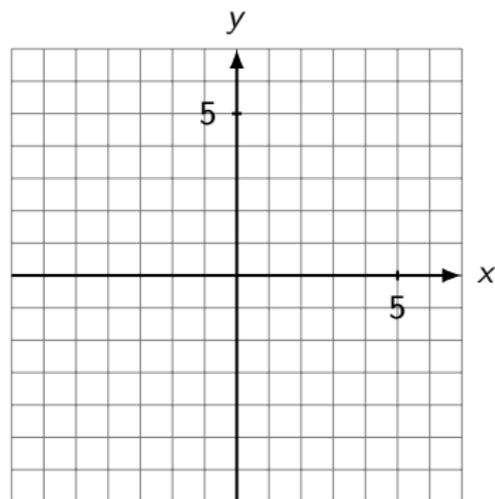
Funktionen 18

Skizziere den Graphen der Funktion $f: y = x^2$ ins vorbereitete Koordinatensystem.



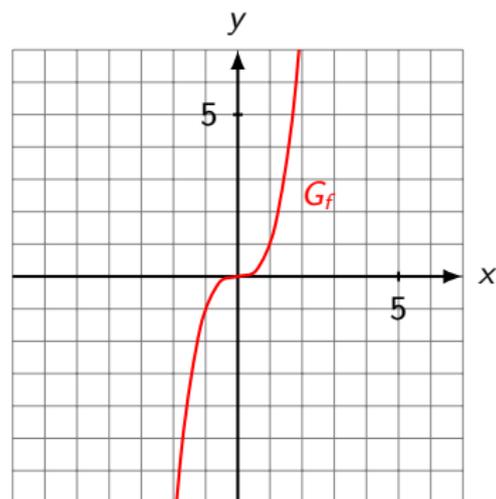
Funktionen 19

Skizziere den Graphen der Funktion $f: y = x^3$ ins vorbereitete Koordinatensystem.



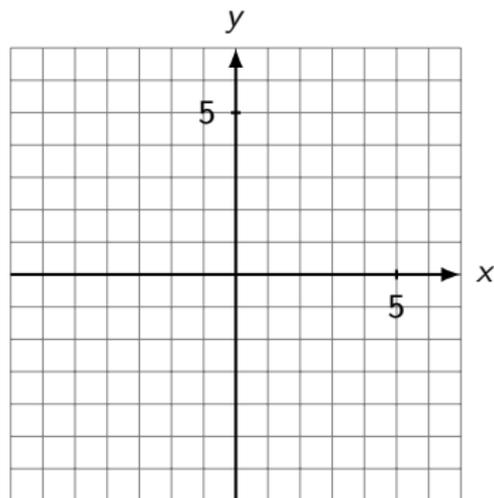
Funktionen 19

Skizziere den Graphen der Funktion $f: y = x^3$ ins vorbereitete Koordinatensystem.



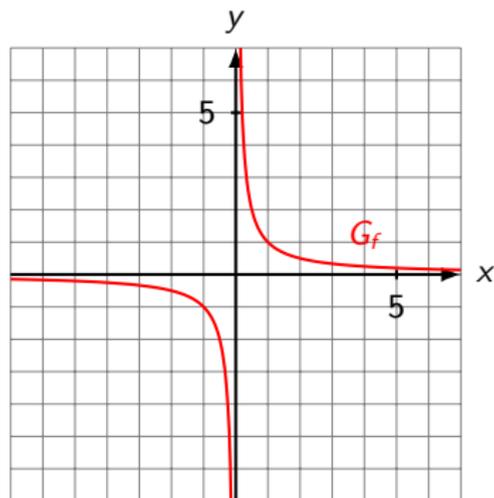
Funktionen 20

Skizziere den Graphen der Funktion $f: y = \frac{1}{x}$ ins vorbereitete Koordinatensystem.



Funktionen 20

Skizziere den Graphen der Funktion $f: y = \frac{1}{x}$ ins vorbereitete Koordinatensystem.



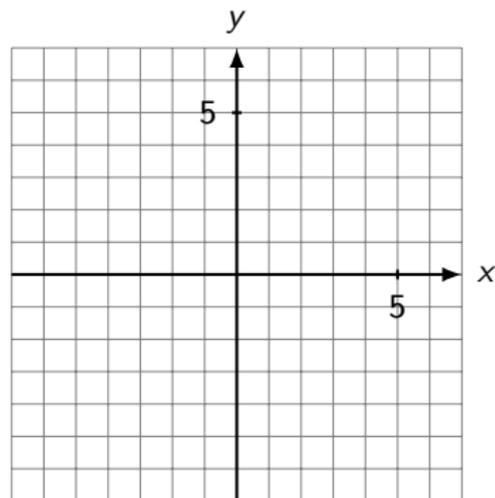
Asymptoten:

$$y = 0 \text{ (x-Achse)}$$

$$x = 0 \text{ (y-Achse)}$$

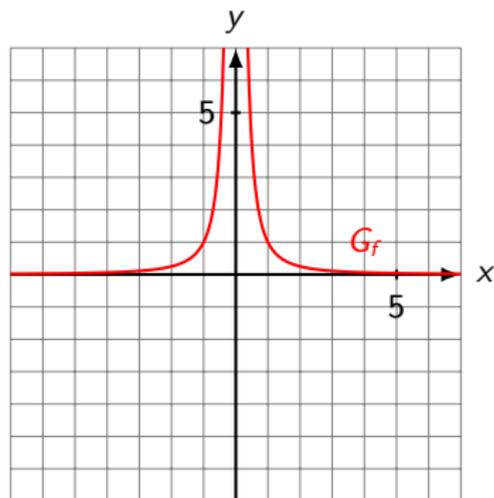
Funktionen 21

Skizziere den Graphen der Funktion $f: y = \frac{1}{x^2}$ ins vorbereitete Koordinatensystem.



Funktionen 21

Skizziere den Graphen der Funktion $f: y = \frac{1}{x^2}$ ins vorbereitete Koordinatensystem.



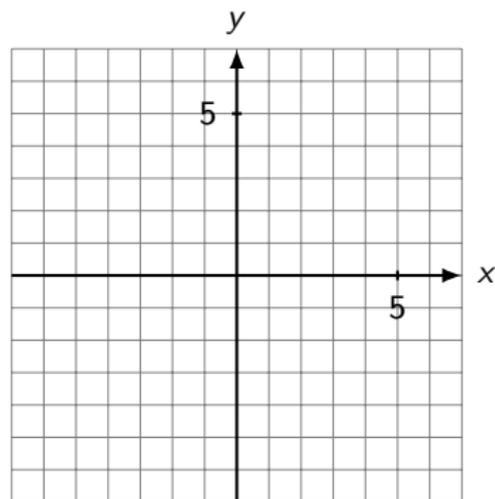
Asymptoten:

$$y = 0 \text{ (x-Achse)}$$

$$x = 0 \text{ (y-Achse)}$$

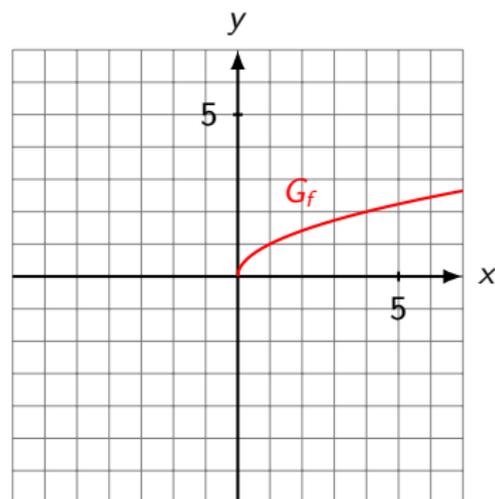
Funktionen 22

Skizziere den Graphen der Funktion $f: y = \sqrt{x}$ ins vorbereitete Koordinatensystem.



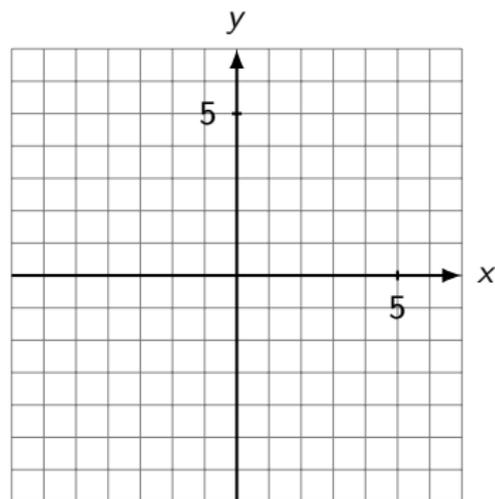
Funktionen 22

Skizziere den Graphen der Funktion $f: y = \sqrt{x}$ ins vorbereitete Koordinatensystem.



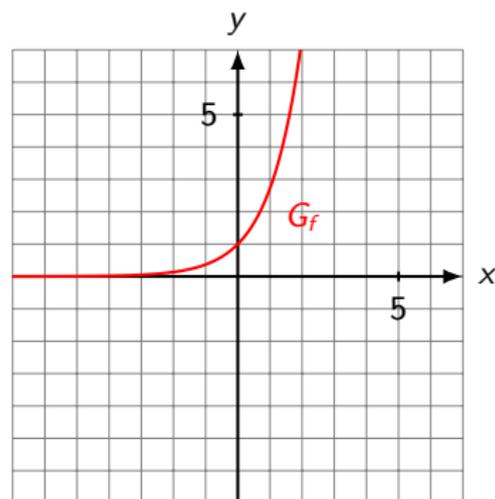
Funktionen 23

Skizziere den Graphen der Funktion $f: y = e^x$ ins vorbereitete Koordinatensystem.



Funktionen 23

Skizziere den Graphen der Funktion $f: y = e^x$ ins vorbereitete Koordinatensystem.



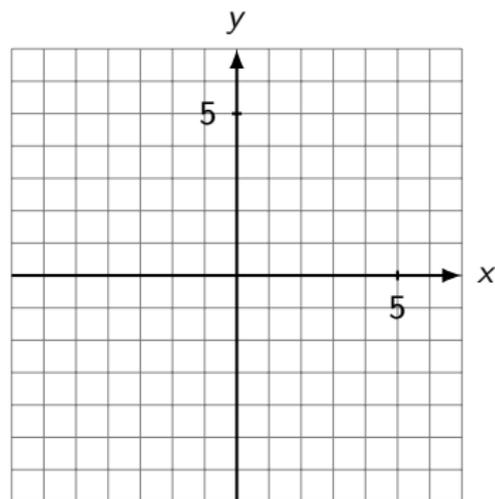
$$e \approx 2.71818 \dots$$

Asymptote:

$$y = 0 \text{ (x-Achse)}$$

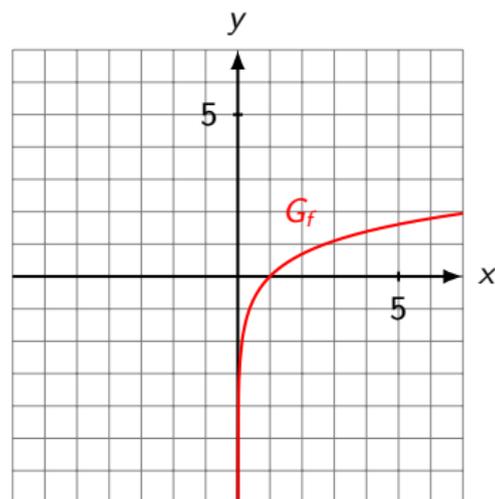
Funktionen 24

Skizziere den Graphen der Funktion $f(x) = \ln(x)$ ins vorbereitete Koordinatensystem.



Funktionen 24

Skizziere den Graphen der Funktion $f(x) = \ln(x)$ ins vorbereitete Koordinatensystem.

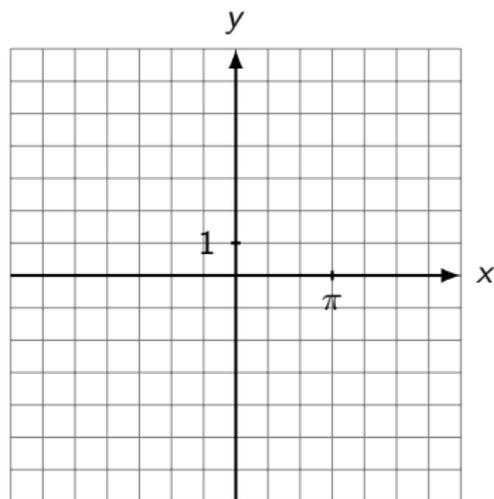


Asymptote:

$x = 0$ (y-Achse)

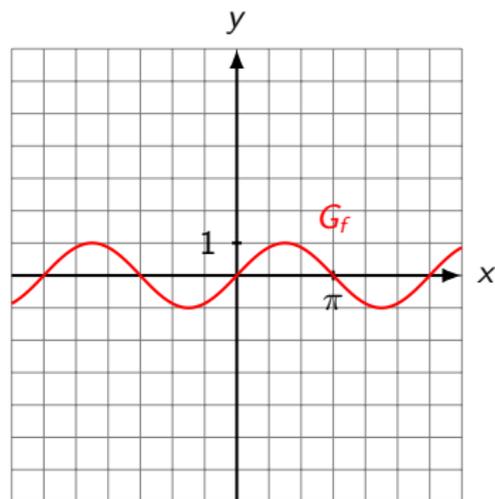
Funktionen 25

Skizziere den Graphen der Funktion $f(x) = \sin(x)$ ins vorbereitete Koordinatensystem.



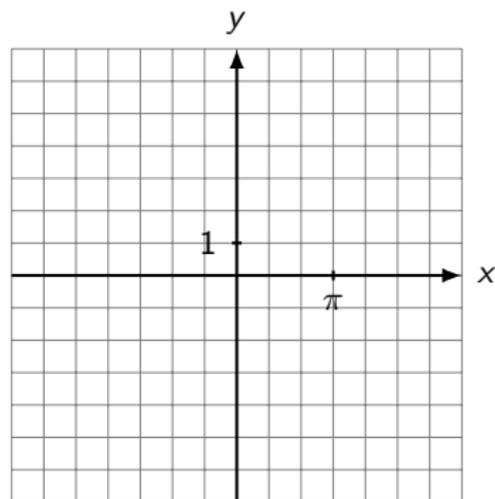
Funktionen 25

Skizziere den Graphen der Funktion $f(x) = \sin(x)$ ins vorbereitete Koordinatensystem.



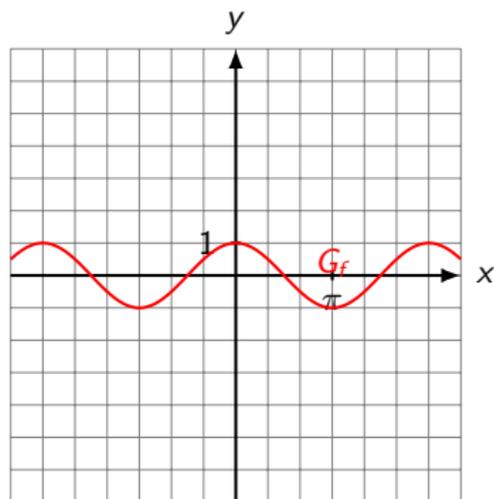
Funktionen 26

Skizziere den Graphen der Funktion $f(x) = \cos(x)$ ins vorbereitete Koordinatensystem.



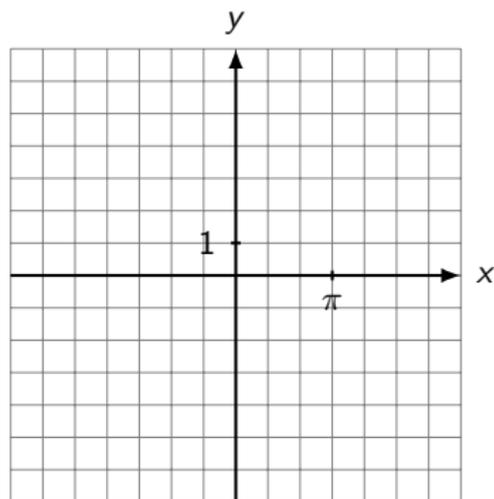
Funktionen 26

Skizziere den Graphen der Funktion $f(x) = \cos(x)$ ins vorbereitete Koordinatensystem.



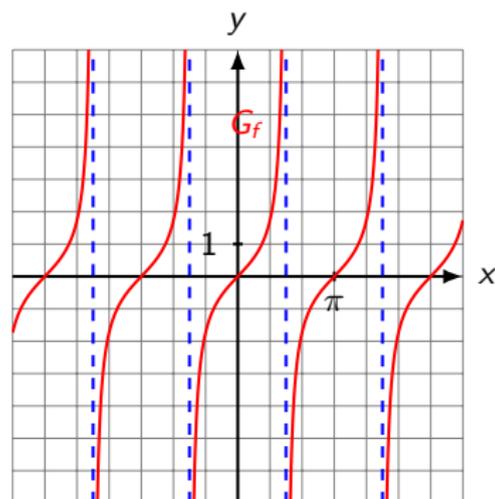
Funktionen 27

Skizziere den Graphen der Funktion $f(x) = \tan(x)$ ins vorbereitete Koordinatensystem.



Funktionen 27

Skizziere den Graphen der Funktion $f(x) = \tan(x)$ ins vorbereitete Koordinatensystem.



Asymptoten:

...

$$x = -\frac{3\pi}{2}$$

$$x = -\frac{\pi}{2}$$

$$x = \frac{\pi}{2}$$

$$x = \frac{3\pi}{2}$$

...

Funktionen 28

Wie wird die Umkehrfunktion f^{-1} einer Funktion f bestimmt?

Funktionen 28

Wie wird die Umkehrfunktion f^{-1} einer Funktion f bestimmt?

1. Vertausche die Variablen x und y in der Gleichung $y = f(x)$.

Funktionen 28

Wie wird die Umkehrfunktion f^{-1} einer Funktion f bestimmt?

1. Vertausche die Variablen x und y in der Gleichung $y = f(x)$.
2. Löse die neue Gleichung $x = f(y)$ nach y auf.

Funktionen 28

Wie wird die Umkehrfunktion f^{-1} einer Funktion f bestimmt?

1. Vertausche die Variablen x und y in der Gleichung $y = f(x)$.
2. Löse die neue Gleichung $x = f(y)$ nach y auf.

Alternative: zuerst die Gleichung $y = f(x)$ nach x auflösen und dann die Variablen vertauschen.

Funktionen 29

Der Graph G_f einer Funktion ist gegeben. Wie lässt sich der Graph der Umkehrfunktion $G_{f^{-1}}$ ohne Rechnung bestimmen?

Funktionen 29

Der Graph G_f einer Funktion ist gegeben. Wie lässt sich der Graph der Umkehrfunktion $G_{f^{-1}}$ ohne Rechnung bestimmen?

G_f an der Winkelhalbierenden $y = x$ spiegeln $\Rightarrow G_{f^{-1}}$

Funktionen 30

Bestimme die Umkehrfunktion von $f: y = x$

Funktionen 30

Bestimme die Umkehrfunktion von $f: y = x$

$x = y$ Variablen vertauschen

Funktionen 30

Bestimme die Umkehrfunktion von $f: y = x$

$x = y$ Variablen vertauschen

$f^{-1}: y = x$ neue Gleichung nach y auflösen

Funktionen 30

Bestimme die Umkehrfunktion von $f: y = x$

$x = y$ Variablen vertauschen

$f^{-1}: y = x$ neue Gleichung nach y auflösen

Wenn Funktionen symmetrisch zur Geraden $y = x$ sind, dann stimmen sie mit ihrer Umkehrfunktion überein.

Funktionen 31

Bestimme die Umkehrfunktion von $f: y = x^2$

Funktionen 31

Bestimme die Umkehrfunktion von $f: y = x^2$

$$x = y^2 \quad \text{Variablen vertauschen}$$

Funktionen 31

Bestimme die Umkehrfunktion von $f: y = x^2$

$$x = y^2 \quad \text{Variablen vertauschen}$$

$$f^{-1}: y = \sqrt{x} \quad \text{neue Gleichung nach } y \text{ auflösen}$$

Funktionen 32

Bestimme die Umkehrfunktion von $f: y = \frac{1}{x}$

Funktionen 32

Bestimme die Umkehrfunktion von $f: y = \frac{1}{x}$

$$x = \frac{1}{y} \quad \text{Variablen vertauschen}$$

Funktionen 32

Bestimme die Umkehrfunktion von $f: y = \frac{1}{x}$

$$x = \frac{1}{y} \quad \text{Variablen vertauschen}$$

$$f^{-1}: y = \frac{1}{x} \quad \text{neue Gleichung nach } y \text{ auflösen}$$

Funktionen 33

Bestimme die Umkehrfunktion von $f: y = e^x$

Funktionen 33

Bestimme die Umkehrfunktion von $f: y = e^x$

$$x = e^y \quad \text{Variablen vertauschen}$$

Funktionen 33

Bestimme die Umkehrfunktion von $f: y = e^x$

$x = e^y$ Variablen vertauschen

$\ln(x) = y$ || \ln neue Gleichung nach y auflösen

Funktionen 33

Bestimme die Umkehrfunktion von $f: y = e^x$

$x = e^y$ Variablen vertauschen

$\ln(x) = y$ || \ln neue Gleichung nach y auflösen

$f^{-1}: y = \ln(x)$

Funktionen 34

Bestimme die Umkehrfunktion von $f: y = 2x - 4$

Funktionen 34

Bestimme die Umkehrfunktion von $f: y = 2x - 4$

$$x = 2y - 4 \quad \text{Variablen vertauschen}$$

Funktionen 34

Bestimme die Umkehrfunktion von $f: y = 2x - 4$

$$x = 2y - 4 \quad \text{Variablen vertauschen}$$

$$2y = x + 4 \quad \text{neue Gleichung nach } y \text{ auflösen}$$

Funktionen 34

Bestimme die Umkehrfunktion von $f: y = 2x - 4$

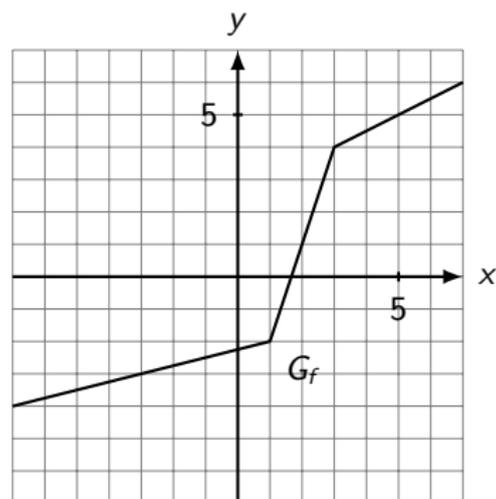
$$x = 2y - 4 \quad \text{Variablen vertauschen}$$

$$2y = x + 4 \quad \text{neue Gleichung nach } y \text{ auflösen}$$

$$f^{-1}: y = \frac{1}{2}x + 2$$

Funktionen 35

Gegeben ist der Graph G_f einer Funktion f . Skizziere den Graphen $G_{f^{-1}}$ der Umkehrfunktion f^{-1} .



Funktionen 35

Gegeben ist der Graph G_f einer Funktion f . Skizziere den Graphen $G_{f^{-1}}$ der Umkehrfunktion f^{-1} .

