

Integralrechnung (Kapitel 2)

Übungen

Aufgabe 2.1

$$\int x^{10} dx$$

Aufgabe 2.1

$$\int x^{10} dx = \frac{1}{11} x^{11} + C$$

Aufgabe 2.2

$$\int e^x dx$$

Aufgabe 2.2

$$\int e^x dx = e^x + C$$

Aufgabe 2.3

$$\int \frac{1}{x^2} dx$$

Aufgabe 2.3

$$\int \frac{1}{x^2} dx = \int x^{-2} dx = -x^{-1} + C = -\frac{1}{x} + C$$

Aufgabe 2.4

$$\int \tan x \, dx$$

Aufgabe 2.4

$$\int \tan x \, dx = -\ln |\cos x| + C$$

Aufgabe 2.5

$$\int \sqrt{x} \, dx$$

Aufgabe 2.5

$$\int \sqrt{x} \, dx = \frac{2}{3} x^{3/2} + C$$

Aufgabe 2.6

$$\int \sin x \, dx$$

Aufgabe 2.6

$$\int \sin x \, dx = -\cos x + C$$

Aufgabe 2.7

$$\int 1 dx$$

Aufgabe 2.7

$$\int 1 dx = x + C$$

Aufgabe 2.8

$$\int \frac{1}{x} dx$$

Aufgabe 2.8

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C$$

Aufgabe 2.9

$$\int \ln |x| dx$$

Aufgabe 2.9

$$\int \ln |x| dx = x(\ln |x| - 1) + C$$

Aufgabe 2.10

$$\int \cos x \, dx$$

Aufgabe 2.10

$$\int \cos x \, dx = \sin x + C$$

Aufgabe 2.11

$$\int (x^2 + x) dx$$

Aufgabe 2.11

$$\int (x^2 + x) dx = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + C$$

Aufgabe 2.12

$$\int (\sin x + \cos x) dx$$

Aufgabe 2.12

$$\int (\sin x + \cos x) dx = -\cos x + \sin x + C$$

Aufgabe 2.13

$$\int (x^5 - x^3 + 2) dx$$

Aufgabe 2.13

$$\int (x^5 - x^3 + 2) dx = \frac{1}{6} x^6 - \frac{1}{4} x^4 + 2x + C$$

Aufgabe 2.14

$$\int (x - 3)(x + 4) dx$$

Aufgabe 2.14

$$\int (x - 3)(x + 4) dx = \int (x^2 + x - 12) dx = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 12x + C$$

Achtung: Integrale dürfen nicht mit Produkten/Quotienten/Potenzen vertauscht werden! Daher Produkte möglichst als Summen darstellen.

Aufgabe 2.15

$$\int \frac{x^2 + x}{x^2} dx$$

Aufgabe 2.15

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2 + x}{x^2} dx &= \int \left(\frac{x^2}{x^2} + \frac{x}{x^2} \right) dx = \int 1 dx + \int \frac{1}{x} dx \\ &= x + \ln|x| + C\end{aligned}$$

Aufgabe 2.16

$$\int (e^x + e^{-x}) dx$$

Aufgabe 2.16

$$\int (e^x + e^{-x}) dx = e^x - e^{-x} + C$$

Aufgabe 2.17

$$\int 5x^4 dx$$

Aufgabe 2.17

$$\int 5x^4 dx = 5 \cdot \frac{1}{5}x^5 = x^5 + C$$

Aufgabe 2.18

$$\int -4 \sin x \, dx$$

Aufgabe 2.18

$$\int -4 \sin x \, dx = -4 \int \sin x \, dx = -4(-\cos x) = 4 \cos x + C$$

Aufgabe 2.19

$$\int 7 dx$$

Aufgabe 2.19

$$\int 7 dx = 7 \int 1 dx = 7x + C$$

Aufgabe 2.20

$$\int (x - 2)^2 dx$$

Aufgabe 2.20

$$\int (x - 2)^2 dx = \int (x^2 - 4x + 4) dx = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 4x + C$$

Aufgabe 2.21

$$\int \frac{3}{x} dx$$

Aufgabe 2.21

$$\int \frac{3}{x} dx = 3 \int \frac{1}{x} dx = 3 \ln |x| + C$$

Aufgabe 2.22

$$\int \frac{1}{3} e^{3x} dx$$

Aufgabe 2.22

$$\int \frac{1}{3} e^{3x} dx = \frac{1}{3} \int e^{3x} dx = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot e^{3x} dx = \frac{1}{9} e^{3x} + C$$

Aufgabe 2.23

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx$$

Aufgabe 2.23

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C$$

Aufgabe 2.24

$$\int (3 \cos x - \tan x) dx$$

Aufgabe 2.24

$$\int (3 \cos x - \tan x) dx = 3 \sin x + \ln |\cos x| + C$$

Aufgabe 2.25

$$\int (2x^4 - 3)^2 dx$$

Aufgabe 2.25

$$\int (2x^4 - 3)^2 dx = \int (4x^8 - 12x^4 + 9) dx = \frac{4}{9} x^9 - \frac{12}{5} x^5 + 9x + C$$

Aufgabe 2.26

$$\int \sqrt{5x} \, dx$$

Aufgabe 2.26

$$\int \sqrt{5x} \, dx$$

Aufgabe 2.26

$$\int \sqrt{5x} \, dx = \int \sqrt{5} \cdot \sqrt{x} \, dx$$

Aufgabe 2.26

$$\int \sqrt{5x} \, dx = \int \sqrt{5} \cdot \sqrt{x} \, dx = \sqrt{5} \cdot \frac{2}{3} x^{3/2}$$

Aufgabe 2.26

$$\begin{aligned}\int \sqrt{5x} \, dx &= \int \sqrt{5} \cdot \sqrt{x} \, dx = \sqrt{5} \cdot \frac{2}{3} x^{3/2} \\ &= \frac{2\sqrt{5}}{3} x^{3/2} + C\end{aligned}$$

Aufgabe 2.27

$$\int 2^x dx$$

Aufgabe 2.27

$$\int 2^x dx = \frac{2^x}{\ln 2} + C$$

Aufgabe 2.28

$$\int \left(\frac{2}{x} + \frac{3}{x^3} \right) dx$$

Aufgabe 2.28

$$\int \left(\frac{2}{x} + \frac{3}{x^3} \right) dx$$

Aufgabe 2.28

$$\int \left(\frac{2}{x} + \frac{3}{x^3} \right) dx = 2 \int \frac{1}{x} dx + 3 \int x^{-3} dx$$

Aufgabe 2.28

$$\begin{aligned}\int \left(\frac{2}{x} + \frac{3}{x^3} \right) dx &= 2 \int \frac{1}{x} dx + 3 \int x^{-3} dx \\ &= 2 \ln |x| - \frac{3}{2} x^{-2} + C\end{aligned}$$

Aufgabe 2.28

$$\begin{aligned}\int \left(\frac{2}{x} + \frac{3}{x^3} \right) dx &= 2 \int \frac{1}{x} dx + 3 \int x^{-3} dx \\ &= 2 \ln |x| - \frac{3}{2} x^{-2} + C\end{aligned}$$

Aufgabe 2.29

$$\int_0^2 3x^2 dx$$

Aufgabe 2.29

$$\int_0^2 3x^2 dx = [x^3]_0^2 = 2^3 - 0^3 = 8$$

Aufgabe 2.30

$$\int_1^3 x^3 dx$$

Aufgabe 2.30

$$\int_1^3 x^3 dx = \left[\frac{1}{4} x^4 \right]_1^3 = \frac{81}{4} - \frac{1}{4} = \frac{80}{4} = 20$$

Aufgabe 2.31

$$\int_2^4 (x^2 + 3) dx$$

Aufgabe 2.31

$$\int_2^4 (x^2 + 3) dx = \left[\frac{1}{3}x^3 + 3x \right]_2^4 = \frac{74}{3}$$

Aufgabe 2.32

$$\int_1^3 (x^2 - 4x)^2 dx$$

Aufgabe 2.32

$$\int_1^3 (x^2 - 4x)^2 dx = \int_1^3 (x^4 - 8x^3 + 16x^2) dx = \frac{406}{15}$$

Aufgabe 2.33

$$\int_2^4 x^5(2x + 5) dx$$

Aufgabe 2.33

$$\int_2^4 x^5(2x+5) dx = \int_2^4 (2x^6 + 5x^5) dx = \left[\frac{2}{7}x^7 + \frac{5}{6}x^6 \right]_2^4 = \frac{56032}{7}$$

Aufgabe 2.34

Für welches k gilt $\int_{-1}^0 (3x^2 - kx + k) dx = -2$?

Aufgabe 2.34

$$\int_{-1}^0 (3x^2 - kx + k) dx = -2$$

$$\left[x^3 - \frac{1}{2}kx^2 + kx \right]_{-1}^0 = -2$$

$$(0 - 0 + 0) - \left(-1 - \frac{1}{2}k - k \right) = -2$$

$$1 + \frac{3}{2}k = -2$$

$$\frac{3}{2}k = -3$$

$$k = -2$$

Aufgabe 2.35

Für welche reelle Zahl b gilt $\int_1^b (x^2 + x + 1) dx = 144$?

Aufgabe 2.35

$$\int_1^b (x^2 + x + 1) dx = 144$$

$$\left[\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x \right]_1^b = 144$$

$$\left(\frac{1}{3}b^3 + \frac{1}{2}b^2 + b \right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 1 \right) = 144$$

$$\frac{1}{3}b^3 + \frac{1}{2}b^2 + b - \frac{875}{6} = 0$$

$$b = 7$$

Aufgabe 2.36

$$\int_0^4 \sqrt{x} \, dx$$

Aufgabe 2.36

$$\int_0^4 \sqrt{x} \, dx = \left[\frac{2}{3} x^{3/2} \right]_0^4 = \frac{16}{3}$$

Aufgabe 2.37

$$\int_0^1 5x\sqrt{x} \, dx$$

Aufgabe 2.37

$$\int_0^1 5x\sqrt{x} \, dx = 5 \int_0^1 x^1 \cdot x^{1/2} \, dx = 5 \int_0^1 x^{3/2} \, dx = 5 \left[\frac{2}{5} x^{5/2} \right]_0^1 = 2$$

Aufgabe 2.38

$$\int_0^{\pi/2} \cos x \, dx$$

Aufgabe 2.38

$$\int_0^{\pi/2} \cos x \, dx = [\sin(x)]_0^{\pi/2} = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin(0) = 1$$

Aufgabe 2.39

$$\int_0^{\pi/4} \sin(2x) dx$$

Aufgabe 2.39

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/4} \sin(2x) \, dx &= \left[-\frac{1}{2} \cos(2x) \right]_0^{\pi/4} \\ &= -\frac{1}{2} \cos\left(2 \cdot \frac{\pi}{4}\right) - \left(-\frac{1}{2} \cos(2 \cdot 0)\right) \\ &= -\frac{1}{2} \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{2} \cos(0) = 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Aufgabe 2.40

$$\int_1^2 \frac{2}{x} dx$$

Aufgabe 2.40

$$\int_1^2 \frac{2}{x} dx = 2 \int_1^2 \frac{1}{x} dx = 2 [\ln(x)]_1^2 = 2(\ln(2) - \ln(1)) = 2 \ln(2)$$

Aufgabe 2.41

$$\int_2^3 \frac{x^2 + 4x + 3}{x} dx$$

Aufgabe 2.41

$$\begin{aligned}\int_2^3 \frac{x^2 + 4x + 3}{x} dx &= \int_2^3 \left(x + 4 + \frac{3}{x} \right) dx \\ &= \left[\frac{1}{2}x^2 + 4x + 3 \ln |x| \right]_2^3 \\ &= \left(\frac{9}{2} + 12 + 3 \ln |3| \right) - (4 + 8 + 3 \ln |2|) \\ &= \frac{13}{2} + 3(\ln(3) - \ln(2)) \\ &= \frac{13}{2} + 3 \ln \left(\frac{3}{2} \right)\end{aligned}$$

Aufgabe 2.42

Bestimme aus $f'(x) = 3x^2 - 4$ und $f(5) = 54$ die Funktionsgleichung von f .

Aufgabe 2.42

$$f'(x) = 3x^2 - 4$$

$$f(x) = x^3 - 4x + C$$

$$f(5) = 5^3 - 4 \cdot 5 + C = 54 \quad \Rightarrow \quad C = -51$$

$$f(x) = x^3 - 4x - 51$$

Aufgabe 2.43

Bestimme aus $g'(x) = 5 - x$ und $g(-2) = -g(2)$ die Funktionsgleichung von g .

Aufgabe 2.43

$$g'(x) = 5 - x$$

$$g(x) = 5x - \frac{1}{2}x^2 + C$$

$$g(-2) = -10 - 2 + C = -12 + C$$

$$-g(2) = -(10 - 2 + C) = -8 - C$$

$$g(-2) = -g(2) \quad \Rightarrow \quad -12 + C = -8 - C \quad \Rightarrow \quad C = 2$$

$$g(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 5x + 2$$

Aufgabe 2.44

Bestimme aus $f''(x) = 2x$, $f'(2) = 5$ und $f(1) = 3$ die Funktionsgleichung von f .

Aufgabe 2.44

$$f''(x) = 2x$$

$$f'(x) = x^2 + C_1$$

$$f'(2) = 5 \Rightarrow 4 + C_1 = 5 \Rightarrow C_1 = 1$$

$$f'(x) = x^2 + 1$$

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x + C_2$$

$$f(1) = 3 \Rightarrow \frac{1}{3} + 1 + C_2 = 3 \Rightarrow C_2 = \frac{5}{3}$$

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x + \frac{5}{3}$$

Aufgabe 2.45

Bestimme aus $f''(x) = x^2 - 1$, $f'(0) = 4$ und $f(0) = 0$ die Funktionsgleichung von f .

Aufgabe 2.45

$$f''(x) = x^2 - 1$$

$$f'(x) = \frac{1}{3}x^3 - x + C_1$$

$$f'(0) = 4 \quad \Rightarrow \quad C_1 = 4$$

$$f'(x) = \frac{1}{3}x^3 - x + 4$$

$$f(x) = \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + 4x + C_2$$

$$f(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad C_2 = 0$$

$$f(x) = \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + 4x$$