Aufgabe 3.57

(a) *Zielfunktion:* $S(x, y) = x^2 + y^2$

Nebenbedingung: $y = 24 - x$

NB in ZF einsetzen: $S(x) = x^2 + (24 - x)^2$

Ableitungen: $S'(x) = 2x - 2(24 - x) = 4x - 48$
$S''(x) = 4$

Extrema bestimmen: $0 = S'(x)$
$0 = 4x - 48$
$x = 12$

Extrema testen: $S''(12) = 4 > 0 \quad \Rightarrow \quad$ Minimum für $x = 12$

(b) *Zielfunktion:* $P(x, y) = x \cdot y$

Nebenbedingung: $y = 24 - x$

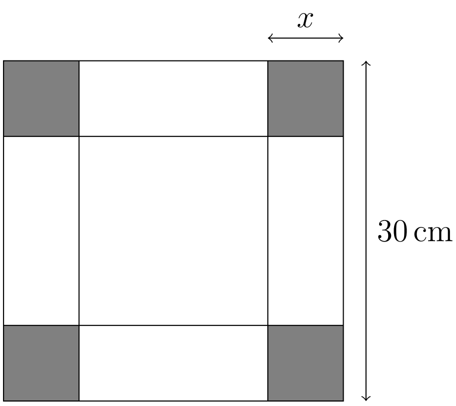
NB in ZF einsetzen: $P(x) = x(24 - x) = 24x - x^2$

Ableitungen: $P'(x) = 14 - 2x$
$P''(x) = -2$

Extrema bestimmen: $0 = P'(x)$
$0 = 14 - 2x$
$x = 7$

Extrema testen: $S''(7) = -2 < 0 \quad \Rightarrow \quad$ Maximum für $x = 7$

Aufgabe 3.58



Zielfunktion: $V(l,b,h) = l \cdot b \cdot h$

Nebenbedingungen:

$h = x$

$b = 30 - 2x$

$l = 30 - 2x$

Nebenbedingungen in Zielfunktion einsetzen:

$V(x) = x(30-2x)^2 = x(900 - 120x + 4x^2) = 4x^3 - 120x^2 + 900x$

Extremstellen bestimmen und prüfen:

$V'(x) = 12x^2 - 240x + 900 \stackrel{!}{=} 0$

$x_1 = 5$

$x_2 = 15 \quad$ (nicht sinnvoll)

$V''(x) = 12x - 13;$

$V''(5) = -120 < 0 \quad \Rightarrow \quad x = 5$ ist Maximalstelle

$V''(15) = 120 > 0 \quad \Rightarrow \quad x = 15$ ist Minimalstelle

Übrige Grössen:

$l = 30 - 10 = 20\,\text{cm},\ b = 30 - 10 = 20\,\text{cm},\ h = 5\,\text{cm}$

Aufgabe 3.59

Zielfunktion: $V(l, b, h) = l \cdot b \cdot h$

Nebenbedingungen:

$h = x$

$b = 25 - 2x$

$l = (40 - 2x)/2 = 20 - x$

Nebenbedingungen in Zielfunktion einsetzen:

$V(x) = (20 - x)(25 - 2x)x = 2x^3 - 65x^2 + 500x$

Extremstellen bestimmen und prüfen:

$V'(x) = 6x^2 - 130x + 500 \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 5,\, x_2 = \frac{50}{3}$

$V''(x) = 12x - 13;$

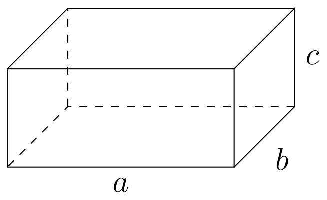
$V''(5) = -70 < 0 \quad \Rightarrow \quad x = 5$ ist Maximalstelle

$V''(\frac{50}{3}) = 70 > 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{50}{3}$ ist Minimalstelle

Übrige Grössen:

$l = 15\,\text{cm},\, b = 15\,\text{cm},\, h = 5\,\text{cm}$

Aufgabe 3.60



Zielfunktion: $S(a, b, c) = 2(ab + bc + ca)$

Nebenbedingungen:

$a = 3b$

$$\begin{aligned} 4(a + b + c) &= 520 \\ a + b + c &= 130 \\ 3b + b + c &= 130 \\ c &= 130 - 4b \end{aligned}$$

Nebenbedingungen in Zielfunktion einsetzen:

$$\begin{aligned} S(b) &= 2\big(b \cdot 3b + 3b(130 - 4b) + (130 - 4b)b\big) \\ &= 2\big(3b^2 + 390b - 12b^2 + 130b - 4b^2\big) \\ &= 2\big(520b - 13b^2\big) \end{aligned}$$

Extremstellen bestimmen und prüfen:

$S'(b) = 2(520 - 26b) \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad b = 20$

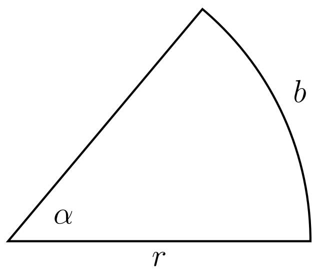
$$\begin{aligned} S''(b) &= -52 \\ S''(20) &= -52 < 0 \end{aligned}$$

$b = 20$ ist Maximalstelle

Lösung:

$b = 20\,\text{cm},\ a = 3b = 60\,\text{cm},\ c = 130 - 4b = 50\,\text{cm}$

Aufgabe 3.61



Zielfunktion: $A(r,b) = \frac{1}{2} \cdot r \cdot b$

Nebenbedingungen:

$u = 2r + b = \text{konstant} \quad \Rightarrow \quad b = (u - 2r)$

Nebenbedingungen in Zielfunktion einsetzen:

$A(r) = \frac{1}{2} \cdot r \cdot (u - 2r) = \frac{1}{2} \cdot r \cdot u - r^2$

Extremstellen bestimmen und prüfen:

$A'(r) = \frac{1}{2} \cdot u - 2r \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} \cdot u = 2r \quad \Rightarrow \quad r = \frac{1}{4}u$

$A''(r) = -2 \quad \Rightarrow \quad A''(\frac{1}{4}u) = -2 < 0$

Für $r = \frac{1}{4}u$ ist ist der Flächeninhalt maximal.

gesuchte Grössen:

$b = u - 2r = u - 2 \cdot \frac{1}{4}u = \frac{1}{2}u$

$$\varphi = \frac{b}{2\pi r} \cdot 360° = \frac{u/2}{2\pi u/4} \cdot 360° = \frac{360°}{\pi} = 114.59°$$

Aufgabe 3.62

a und b erfüllen die Bedingung $a + b^2 = 13$

(a) *Zielfunktion:* $f(a, b) = a^2 + b^3$

Nebenbedingung: $a + b^2 = 13 \quad \Leftrightarrow \quad a = 13 - b^2$

NB in ZF einsetzen: $f(b) = (13 - b^2)^2 + b^3 = b^4 + b^3 - 26b^2 + 169$

Ableitungen: $f'(x) = 4b^3 + 3b^2 - 52b$

$$f''(x) = 12b^2 + 6b - 52$$

Extremwerte: $0 = f'(x)$

$$0 = b(4b^2 + 3b - 52)$$

$$b_1 = 3.25 \quad \Rightarrow \quad f''(3.25) = 94.25$$

$$b_2 = -4 \quad \Rightarrow \quad f''(-4) = 116$$

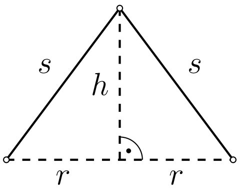
$$b_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad f''(0) = -52$$

An beide Stellen liegt ein (lokales) Minimum vor. Wegen $f(3.23) = 40.27$ und $f(-4) = -55$ ist -55 der (global) kleinste Wert der von f angenommen werden kann.

(b) Da an der Stelle $b = 0$ ein lokales Maximum vorliegt, beträgt für $b_1 = 3.25 > 0$ und $a_1 = 13 - 3.25^2 = 2.4375 > 0$ der kleinste Wert 40.27.

Aufgabe 3.63

ebener Schnitt entlang der Kegelachse:



s ist gegeben; r und h sind variabel

Zielfunktion: $V(r,h) = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

Nebenbedingung: $s^2 = r^2 + h^2 \quad \Rightarrow \quad r^2 = s^2 - h^2$

Nebenbedingung in die Zielfunktion einsetzen:

$V(h) = \frac{1}{3}\pi(s^2 - h^2)h = \frac{1}{3}\pi(s^2h - h^3)$

Extrema:

$V'(h) = \frac{1}{3}\pi\big(s^2 - 3h^2\big)$

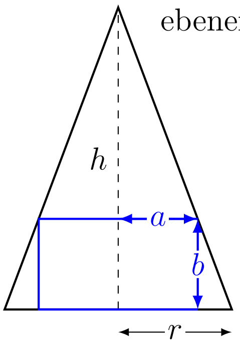
$V''(h) = \frac{1}{3}\pi\big(-6h\big) = -2\pi h < 0$

$$\begin{aligned} V'(h) &\overset{!}{=} 0 \\ s^2 - 3h^2 &= 0 \\ h &= s/\sqrt{3} \end{aligned}$$

$V''(h) = -2\pi h < 0 \quad \Rightarrow \quad h_0 = \dfrac{\sqrt{3}s}{3}$ ist Maximalstelle

Lösung: Das Volumen wird für $h = \dfrac{\sqrt{3}s}{3}$ maximal.

Aufgabe 3.64



ebener Schnitt entlang der Kegelachse

$h = 6\,\text{cm}$
$r = 3\,\text{cm}$

Zielfunktion: $V(x, y) = \pi a^2 b$

Nebenbedingung: $a : 3 = (6 - b) : 6$ (2. Strahlensatz)

$$6a = 3(6 - b)$$
$$2a = 6 - b$$
$$b = 6 - 2a$$

Nebenbedingung in Zielfunktion einsetzen:

$V(a) = \pi \cdot a^2 \cdot \big(6 - 2a\big) = 2\pi\big(3a^2 - a^3\big)$

Extremstellen:

$V'(a) = 2\pi\big(6a - 3a^2\big)$
$V''(a) = 2\pi(6 - 6a) = 12\pi(1 - a)$

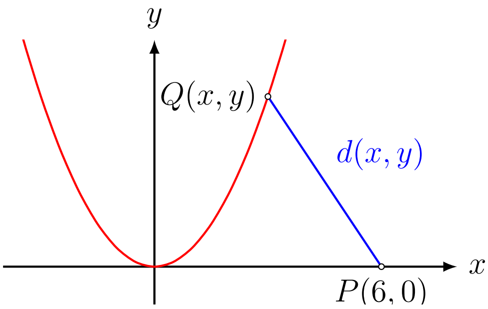
$6a - 3a^2 = 0$
$3a(2 - a) = 0$

$a_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad V''(0) = 12\pi > 0 \quad \Rightarrow$ Minimalstelle
$a_2 = 2 \quad \Rightarrow \quad V''(2) = -12\pi < 0 \quad \Rightarrow$ Maximalstelle

Lösung:

Die Zylinderhöhe beträgt $b = 6 - 2a = 2\,\text{cm}$

Aufgabe 3.65



Zielfunktion:

$d(x,y) = \sqrt{(x-6)^2 + (y-0)^2}$

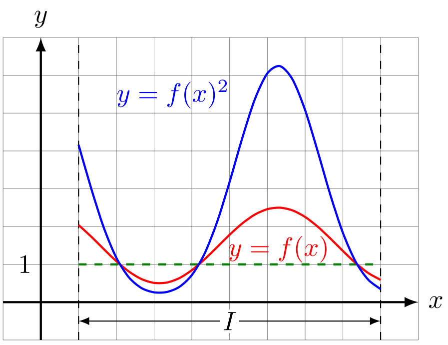
Nebenbedingung:

$y = \frac{1}{2}x^2$

Nebenbedingung in die Zielfunktion einsetzen:

$d(x) = \sqrt{(x-6)^2 + \left(\frac{1}{2}x^2\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4}x^4 + x^2 - 12x + 36}$

Bemerkung: Ist $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und f eine Funktion mit $f(x) \geq 0$ für alle $x \in I$, so ist jede Maximalstelle [Minimalstelle] von f auch Maximalstelle [Minimalstelle] von $f(x)^2$.



Da $d(x)$ die Voraussetzung $d(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ erfüllt, können wir $D(x) = d(x)^2$ untersuchen, um die Extrema von $d(x)$ zu bestimmen.

Extrema:

$$D(x) = \frac{1}{4}x^4 + x^2 - 12x + 36$$
$$D'(x) = x^3 + 2x - 12$$
$$D''(x) = 3x^2 + 2$$

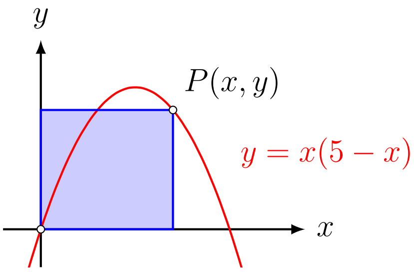
$D'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 2$

Test: $D''(2) = 14 > 0 \quad \Rightarrow \quad x_0 = 2$ ist Minimalstelle

Lösung:

$y_0 = f(2) = \frac{1}{2} \cdot 2^2 = 2 \quad \Rightarrow \quad Q(2,2)$

Aufgabe 3.66



Zielfunktion: $u = 2(a + b)$

Nebenbedingung(en): $a = x$; $b = y = x(5 - x)$

Nebenbedingung in die Zielfunktion einsetzen:

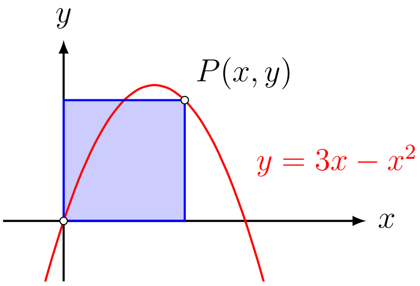
$u(x) = 2\big(x + x(5 - x)\big) = 2\big(6x - x^2\big)$

Extrema:

$u'(x) = 2(6 - 2x) \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad x = 3$
$u''(x) = -4 < 0 \quad \text{für alle } x \quad \Rightarrow \quad x = 3 \text{ ist Minimalstelle}$

Lösung: $x = 3 \quad \Rightarrow \quad y = 6 \quad \Rightarrow \quad P(3, 6)$

Aufgabe 3.67



Zielfunktion: $A = a \cdot b$

Nebenbedingung(en): $a = x$
$b = y = 3x - x^2$

Nebenbedingung in die Zielfunktion einsetzen:

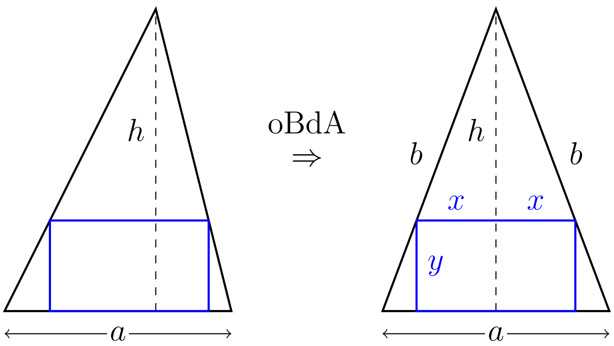
$A(x) = x(3x - x^2) = 3x^2 - x^3$

Ableitungen: $A'(x) = 6x - 3x^2$
$A''(x) = 6 - 6x$

Ableitungen: $0 = 6x - 3x^2 = 3x(2 - x)$
$x_1 = 0$ (unbrauchbar, da Minimalstelle)
$x_2 = 2$ (ist Maximalstelle, da $A''(2) = -6 < 0$)

Lösung: $x = 2 \quad \Rightarrow \quad y = 2 \quad \Rightarrow \quad P(2, 2)$

Aufgabe 3.68



Zielfunktion: $A(x, y) = 2xy$

Nebenbedingung: $2x : (h - y) = a : h \quad$ (2. Strahlensatz)

$2xh = a(h - y) \quad \Rightarrow \quad 2x \stackrel{*}{=} \frac{a}{h}(h - y)$

Nebenbedingung in die Zielfunktion einsetzen:

$A(y) = \frac{a}{h}(h - y)y = \frac{a}{h}(hy - y^2)$

Extrema:

$A'(y) = \frac{a}{h}(h - 2y) \quad$ (a und h sind konstant!)

$A''(y) = -\frac{2a}{h} < 0 \quad (a > 0, h > 0)$

$h - 2y \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad y_0 = h/2$

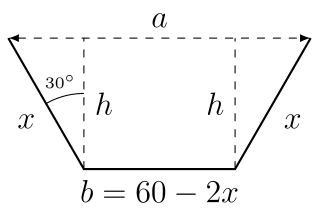
Test: $A''(h/2) < 0 \quad \Rightarrow \quad y_0 = h/2$ ist Maximalstelle

Lösung:

$2x_0 \stackrel{*}{=} \frac{a}{h}\big(h - y_0\big) = \frac{a}{h}\big(h - h/2\big) = a/2$

Das gesuchte Rechteck hat die Seitenlängen $a/2$ und $h/2$.

Aufgabe 3.69



Zielfunktion: $A(a,b,h) = \frac{1}{2}(a+b)\cdot h$

Nebenbedingung(en):

$a = 60 - 2x + 2x\sin(30°) = 60 - 2x + x = 60 - x$
$b = 60 - 2x$
$h = x\cos(30°) = \frac{\sqrt{3}}{2}x$

Nebenbedingung in die Zielfunktion einsetzen:

$A(x) = \left(60 - \frac{3}{2}x\right)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}x = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(60x - \frac{3}{2}x^2\right)$

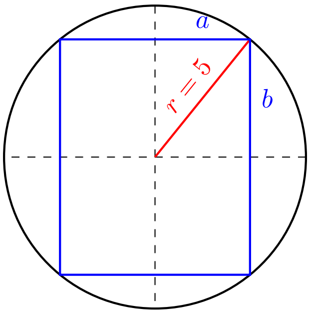
Extrema:

$A'(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(60 - 3x\right)$
$A''(x) = -\frac{3\sqrt{3}}{2} < 0 \quad (*)$

$0 = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(60 - 3x\right)$
$x = 20$ ist Maximum wegen $(*)$

Lösung: $x = 20\,\mathrm{cm}$

Aufgabe 3.70



Zielfunktion: $V(a, b) = \pi \cdot a^2 \cdot b$

Nebenbedingung:

$$a^2 + b^2 = r^2 = 25 \quad \Rightarrow \quad a^2 = 25 - b^2$$

Nebenbedingung in die Zielfunktion einsetzen:

$$V(b) = \pi\big(25 - b^2\big)b = \pi\big(25b - b^3\big)$$

Extrema:

$$V'(b) = \pi\big(25 - 3b^2\big)$$
$$V''(b) = -6\pi b$$

$$\begin{aligned} \pi\big(25 - 3b^2\big) &\stackrel{!}{=} 0 \\ 25 - 3b^2 &= 0 \\ b^2 &= 25/3 \\ b_0 &= 5/\sqrt{3} \end{aligned}$$

$$V''\left(\frac{5}{\sqrt{3}}\right) = -10\sqrt{3}\pi < 0 \quad \Rightarrow \quad b_0 = \frac{5\sqrt{3}}{3} \text{ ist Maximalstellle}$$

Lösung: $h = 2b = \dfrac{10\sqrt{3}}{3}\,\text{cm} \approx 5.77\,\text{cm}$

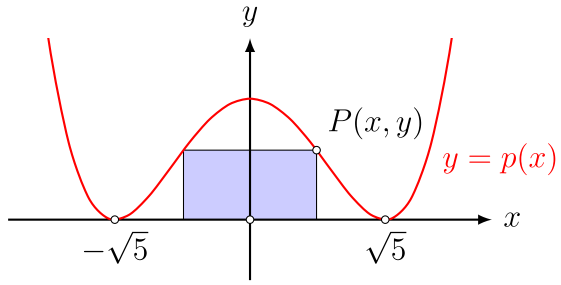
Aufgabe 3.71

(a) $p\colon\, y = \frac{1}{5}(x^4 - 10x^2 + 25) = \frac{1}{5}(x^2-5)^2$

$$= \tfrac{1}{5}\left(\left(x-\sqrt{5}\right)\left(x+\sqrt{5}\right)\right)^2 = \tfrac{1}{5}\left(x-\sqrt{5}\right)^2\left(x+\sqrt{5}\right)^2$$

Nullstellen: $x_1 = -\sqrt{5}$ doppelt

$x_2 = \sqrt{5}$ doppelt



(b) *Zielfunktion:* $A(x) = 2x \cdot y$

Nebenbedingung: $y = \frac{1}{5}(x^4 - 10x^2 + 25)$

NB → ZF:

$A(x) = 2x \cdot \frac{1}{5}(x^4 - 10x^2 + 25) = \frac{2}{5}(x^5 - 10x^3 + 25x)$

Ableitungen:
$$\begin{aligned} A'(x) &= \tfrac{2}{5}(5x^4 - 30x^2 + 25) \\ &= 2(x^4 - 6x^2 + 5) \\ A''(x) &= 8x^3 - 14x \end{aligned}$$

Extremstellen:
$$\begin{aligned} 0 &= 2(x^2-1)(x^2-5) \\ x_{1,2} &= \pm 1 \quad \text{(Maximalstelle, da } A''(1) < 0\text{)} \\ x_{3,4} &= \pm\sqrt{5} \quad \text{(Minimalstelle)} \end{aligned}$$

Lösung: $A(1) = \frac{2}{5}(1 - 10 + 25) = \frac{32}{5} = 6.4$

Aufgabe 3.72

Zielfunktion:

Nebenbedingung:

Nebenbedingung in die Zielfunktion einsetzen:

Extrema:

Lösung:

Aufgabe 3.73

Zielfunktion:

$V(a,h) = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot h$

Nebenbedingungen:

$h = \sqrt{s^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2} = \sqrt{s^2 - \frac{1}{2}a^2}$

$4a + 4s = 80 \quad \Rightarrow \quad a + s = 20 \quad \Rightarrow \quad s = 20 - a$

Nebenbedingungen in Zielfunktion einsetzen:

$$V(a) = \frac{1}{2}a^2\sqrt{(20-a)^2 - \frac{1}{2}a^2} = \frac{1}{2}a^2\sqrt{400 - 40a + a^2 - \frac{1}{2}a^2}$$
$$= \sqrt{100a^4 - 10a^5 + \frac{1}{8}a^6}$$

Extremstellen bestimmen und prüfen:

(die Wurzel wird maximal, wenn ihr Quadrat maximal wird)

$[V^2]'(a) = 400a^3 - 50a^4 + \frac{3}{4}a^5 = a^3\left(400 - 50a + \frac{3}{4}a^2\right) \overset{!}{=} 0$

$a_1 = 9.3,\ a_2 = 57.4,\ a_3 = 0$

$[V^2]''(a) = 1200a^2 - 200a^3 - \frac{15}{4}a^4$

$[V^2]''(9.3) \approx -29\,000 < 0$

$[V^2]''(57.4) \approx 6.8 \cdot 10^6 > 0$

Das Volumen der Pyramide wird für $a = 9.3\,\mathrm{cm}$ maximal.

Aufgabe 3.74

Zielfunktion:

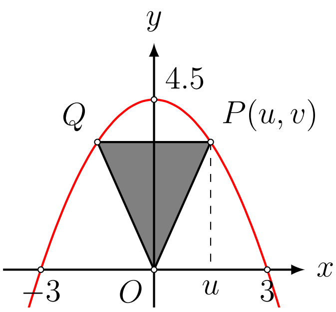
Nebenbedingung:

Nebenbedingung in die Zielfunktion einsetzen:

Extrema:

Lösung:

Aufgabe 3.75



Die Parabel hat die Nullstellen $x_1 = -3$ und $x_2 = 3$ sowie den Ordinatenabschnitt $y_0 = 4.5$.

$p(x) = a(x-3)(x+3) = a(x^2-9) = ax^2 - 9a \;\Rightarrow\; a = -0.5$
$p(x) = 4.5 - 0.5x^2$

Zielfunktion: $A(u, v) = u \cdot v$

Nebenbedingung: $v = f(u) = 4.5 - 0.5u^2$

Nebenbedingung in die Zielfunktion einsetzen:

$A(u) = u\big(4.5 - 0.5u^2\big) = 4.5u - 0.5u^3$

Extrema: $A'(u) = 4.5 - 1.5u^2$
$A''(u) = -3u$

$$\begin{aligned} 4.5 - 1.5u^2 &\stackrel{!}{=} 0 \\ u^2 &= 3 \\ u &= \sqrt{3} \end{aligned}$$

Test: $A''(3) = -9 < 0 \quad \Rightarrow \quad u = 3$ ist Minimalstelle

Lösung: $A(3) = 4.5 \cdot \sqrt{3} - 0.5 \cdot \left(\sqrt{3}\right)^3 = 3\sqrt{3}$

$$\angle(QPO) = \arctan \frac{f(3\sqrt{3})}{3\sqrt{3}} = \arctan \frac{3}{3\sqrt{3}} = 60^\circ$$

Symmetrie $\quad \Rightarrow \quad$ Auch die anderen Winkel messen 60°.

Aufgabe 3.76

Zielfunktion:

Nebenbedingung:

Nebenbedingung in die Zielfunktion einsetzen:

Extrema:

Lösung:

Aufgabe 3.77

Zielfunktion:

Nebenbedingung:

Nebenbedingung in die Zielfunktion einsetzen:

Extrema:

Lösung:

Aufgabe 3.78

Zielfunktion:

Nebenbedingung:

Nebenbedingung in die Zielfunktion einsetzen:

Extrema:

Lösung:

Aufgabe 3.79

Zielfunktion:

Nebenbedingung:

Nebenbedingung in die Zielfunktion einsetzen:

Extrema:

Lösung:

Aufgabe 3.80

Zielfunktion:

Nebenbedingung:

Nebenbedingung in die Zielfunktion einsetzen:

Extrema:

Lösung:

Aufgabe 3.81

Zielfunktion:

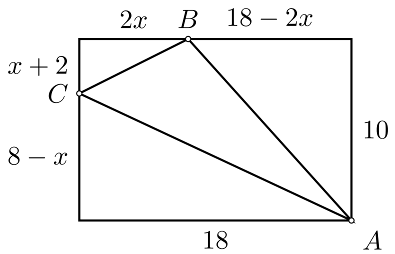
Nebenbedingung:

Nebenbedingung in die Zielfunktion einsetzen:

Extrema:

Lösung:

Aufgabe 3.82



Zielfunktion:

$$\begin{aligned} F(x) &= 10 \cdot 18 - 5(18-2x) - x(x+2) - 9(8-x) \\ &= -x^2 + 17x + 18 \end{aligned}$$

Nebenbedingung: $0 < x < 8$ $\quad$ ($0 < 2x < 18$ ist „schwächer“)

Extremstellen bestimmen:

$$\begin{aligned} F'(x) &= 0 \\ -2x + 17 &= 0 \\ x &= 8.5 \quad \text{erfüllt NB nicht} \end{aligned}$$

$F(x)$ wird für $x = 8$ maximal.

Aufgabe 3.83

Zielfunktion:

Nebenbedingung:

Nebenbedingung in die Zielfunktion einsetzen:

Extrema:

Lösung:

Aufgabe 3.84

Zielfunktion:

Nebenbedingung:

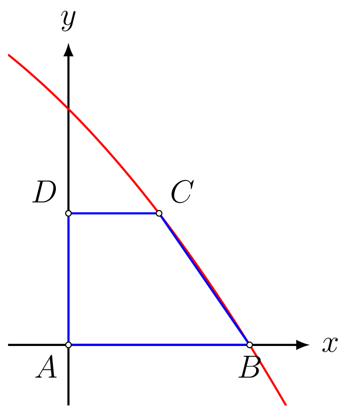
Nebenbedingung in die Zielfunktion einsetzen:

Extrema:

Lösung:

Aufgabe 3.85

$p\colon y = -0.1(x^2 + 10x - 39)$



Zielfunktion:

Nebenbedingung:

Nebenbedingung in die Zielfunktion einsetzen:

Extrema:

Lösung: