Aufgabe 1

Masse der Kuh t: $m(t) = 404 + 6t$ (in kg)

Preis für 1 kg Fleisch: $p(t) = 15 - 0.2t$ (in Fr)

Futterkosten pro Tag: $f(t) = 14t$ (in Fr)

Gewinn: $G(t) = \text{Verkaufserlös}(t) - \text{Kosten}(t)$

$$G(t) = m(t) \cdot p(t) - f(t) = (404 + 6t)(15 - 0.2t) - 14t$$
$$G(t) = -1.2t^2 - 4.8t + 6060$$
$$G'(t) = -2.4t - 4.8$$
$$G''(t) = -2.4$$

$$0 = G'(t)$$
$$0 = -2.4t - 4.8$$
$$t = -2$$

Die Kuh hätte schon vor 2 Tagen verkauft werden sollen.

Test: $G''(t) = -2.4 < 0 \quad \Rightarrow \quad$ Gewinn ist Maximum

Aufgabe 2

$$\begin{aligned} G(x) &= \text{Stückzahl} \times \text{Stückpreis} - \text{Gesamtkosten für } x \text{ Stück} \\ &= x(200 - 0.01x) - (20\,000 + 50x) \\ &= -0.01x^2 + 150x - 20\,000 \end{aligned}$$

$$G'(x) = -0.02x + 150 \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad x = 7500$$

$G''(7500) = -0.02 < 0 \quad \Rightarrow \quad G(7500)$ ist Maximum

Stückpreis: $p(7500) = 200 - 7500 \cdot 0.01 = 125.–$

Aufgabe 3

Zielfunktion: $S(l, b, h) = 2(l + h) + 2 \cdot 2(b + h)$

Nebenbedingungen:	Breite	$b = x$
	Länge:	$l = 2x$
	Höhe:	$h = V/(l \cdot b) = 4.5/(2x^2) = 2.25/x^2$

NB in ZF einsetzen:

$$S(x) = 2\left(2x + \frac{2.25}{x^2}\right) + 4\left(x + \frac{2.25}{x^2}\right) = \cdots = 8x + \frac{13.5}{x^2}$$

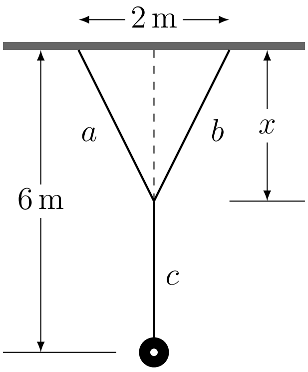
Extremwerte:

$$S'(x) = 8 - \frac{27}{x^3} \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad x = 1.5$$

$$S''(x) = \frac{27}{x^4} > 0 \quad \Rightarrow \quad S''(1.5) > 0 \quad \Rightarrow \quad S(1.5) \text{ ist Minimum}$$

Lösungen:	Breite	$b = 1.5\,\mathrm{dm}$
	Länge:	$l = 3\,\mathrm{dm}$
	Höhe:	$h = 1\,\mathrm{dm}$

Aufgabe 4



Zielfunktion: $K(a,b,c) = a + b + c$

Nebenbedingungen:
$$\begin{aligned} a^2 - 1^2 &= x^2 &\Rightarrow\quad a &= \sqrt{x^2+1} \\ b^2 - 1^2 &= x^2 &\Rightarrow\quad b &= \sqrt{x^2+1} \\ x + c &= 6 &\Rightarrow\quad c &= 6 - x \end{aligned}$$

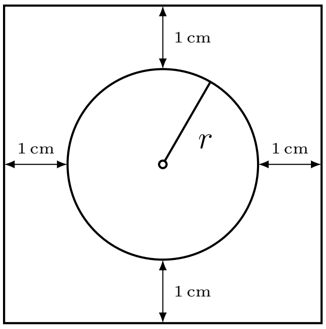
ZF → NB: $K(x) = 2\sqrt{x^2+1} + 6 - x$

Extrema:

$$K'(x) = \frac{2}{2\sqrt{x^2+1}} \cdot 2x - 1 = \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}} - 1$$

$$\begin{aligned} K(x) &= 0 \\ \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}} - 1 &= 0 \\ \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}} &= 1 \\ 2x &= \sqrt{x^2+1} \\ 4x^2 &= x^2 + 1 \\ 3x^2 &= 1 \\ x &= \tfrac{\sqrt{3}}{3}\,\mathrm{m} \end{aligned}$$

Aufgabe 5



Alle Längen in Zentimetern!

Zielfunktion: $S(r,h) = M + 2G = 2\pi r h + 2 \cdot (2r+2)^2$

Nebenbedingung:

$V = 1000\,\mathrm{cm}^3 \quad \Rightarrow \quad 1000 = G \cdot h = \pi r^2 h \quad \Rightarrow \quad h = \dfrac{1000}{\pi r^2}$

NB → ZF: $S(r) = \dfrac{2\pi r}{\pi r^2} + 2(4r^2 + 8r + 4) = \dfrac{2000}{r} + 8r^2 + 16r + 8$

Ableitungen:

$$S(r) = \frac{2000}{r} + 8r^2 + 16r + 8$$

$$S'(r) = \frac{-2000}{r^2} + 16r + 16$$

$$S''(r) = \frac{4000r}{r^3} + 16$$

Extremstellen:

$0 = \dfrac{-2000}{r^2} + 16r + 16 \quad || \cdot \dfrac{r^2}{16}$

$0 = r^3 + r^2 - 125$

$r \approx 4.688 \quad$ (Minimalstelle, da $S''(4.688) > 0$)

Lösung: $h = \dfrac{1000}{\pi r^2} \approx 14.5\,\mathrm{cm}$