

Das Horner-Schema

Übungen

Aufgabe 1

Alle Nullstellen des Polynoms $f(x) = x^5 - x^4 - 2x^3 + 2x^2 + x - 1$ sind ganzzahlig. Bestimme sie und ihre Multiplizitäten mit Hilfe des Horner-Schemas.

Aufgabe 1

Beachte: Falls sich $a_5x^5 + a_4x^4 + \dots + a_1x + a_0$ vollständig in ein Produkt von Linearfaktoren

$$a_5(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)(x - x_5)$$

zerlegen lässt, gilt $a_0 = a_5(-x_1)(-x_2)(-x_3)(-x_4)(-x_5) = -a_5x_1x_2x_3x_4x_5$.

Daher muss für $a_0 = -1$ die Anzahl der negativen Nullstellen *gerade* sein.

Aufgabe 1

Beachte: Falls sich $a_5x^5 + a_4x^4 + \dots + a_1x + a_0$ vollständig in ein Produkt von Linearfaktoren

$$a_5(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)(x - x_5)$$

zerlegen lässt, gilt $a_0 = a_5(-x_1)(-x_2)(-x_3)(-x_4)(-x_5) = -a_5x_1x_2x_3x_4x_5$.

Daher muss für $a_0 = -1$ die Anzahl der negativen Nullstellen *gerade* sein.

x	a_5	-1	-2	2	1	-1	
1	1	0	-2	0	1	0	$\rightarrow x_1 = 1$
1	1	1	-1	-1	0		$\rightarrow x_2 = 1$
1	1	2	1	0			$\rightarrow x_3 = 1$
1	1	3	4				
-1	1	1	0				$\rightarrow x_4 = -1$
-1	1	0					$\rightarrow x_5 = -1$

Aufgabe 1

Beachte: Falls sich $a_5x^5 + a_4x^4 + \dots + a_1x + a_0$ vollständig in ein Produkt von Linearfaktoren

$$a_5(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)(x - x_5)$$

zerlegen lässt, gilt $a_0 = a_5(-x_1)(-x_2)(-x_3)(-x_4)(-x_5) = -a_5x_1x_2x_3x_4x_5$.

Daher muss für $a_0 = -1$ die Anzahl der negativen Nullstellen *gerade* sein.

x	a_5	-1	-2	2	1	-1	
1	1	0	-2	0	1	0	$\rightarrow x_1 = 1$
1	1	1	-1	-1	0		$\rightarrow x_2 = 1$
1	1	2	1	0			$\rightarrow x_3 = 1$
1	1	3	4				
-1	1	1	0				$\rightarrow x_4 = -1$
-1	1	0					$\rightarrow x_5 = -1$

$x_1 = x_2 = x_3 = 1$ (dreifache Nullstelle)

$x_4 = x_5 = -1$ (doppelte Nullstelle)

Aufgabe 2

Mindestens eine Nullstelle des Polynoms

$f(x) = x^4 - 15x^2 + 10x + 24$ ist eine Primzahl. Bestimme sie mit dem Horner-Schema und finde die übrigen Nullstellen mit dem Taschenrechner.

Aufgabe 2

x	a_4	0	-15	10	24
2	1	2	-11	-12	0

 $\Rightarrow x_1 = 2$

Aufgabe 2

x	a_4	0	-15	10	24
2	1	2	-11	-12	0

 $\Rightarrow x_1 = 2$

$$g(x) = 1x^3 + 2x^2 - 11x - 12 = 0$$

Aufgabe 2

x	a_4	0	-15	10	24
2	1	2	-11	-12	0

 $\Rightarrow x_1 = 2$

$$g(x) = 1x^3 + 2x^2 - 11x - 12 = 0$$

$$\text{TR} \Rightarrow x_2 = 3, x_3 = -1, x_4 = -4$$

Aufgabe 2

x	a_4	0	-15	10	24
2	1	2	-11	-12	0

 $\Rightarrow x_1 = 2$

$$g(x) = 1x^3 + 2x^2 - 11x - 12 = 0$$

$$\text{TR} \Rightarrow x_2 = 3, x_3 = -1, x_4 = -4$$

oder:

x		0	-15	10	24
3	1	3	-6	-8	0

 $\Rightarrow x_1 = 3$

Aufgabe 2

x	a_4	0	-15	10	24
2	1	2	-11	-12	0

 $\Rightarrow x_1 = 2$

$$g(x) = 1x^3 + 2x^2 - 11x - 12 = 0$$

$$\text{TR} \Rightarrow x_2 = 3, x_3 = -1, x_4 = -4$$

oder:

x		0	-15	10	24
3	1	3	-6	-8	0

 $\Rightarrow x_1 = 3$

$$h(x) = 1x^3 + 3x^2 - 6x - 8 = 0$$

Aufgabe 2

x	a_4	0	-15	10	24
2	1	2	-11	-12	0

 $\Rightarrow x_1 = 2$

$$g(x) = 1x^3 + 2x^2 - 11x - 12 = 0$$

$$\text{TR} \Rightarrow x_2 = 3, x_3 = -1, x_4 = -4$$

oder:

x		0	-15	10	24
3	1	3	-6	-8	0

 $\Rightarrow x_1 = 3$

$$h(x) = 1x^3 + 3x^2 - 6x - 8 = 0$$

$$\text{TR} \Rightarrow x_2 = 2, x_3 = -1, x_4 = -4$$

Aufgabe 3

Faktorisiere das Polynom $f(x) = x^4 - x^3 - 5x^2 - x - 6$ so weit wie möglich in $\mathbb{C}$, wenn bekannt ist, dass alle reellen Nullstellen ganzzahlig sind.

Aufgabe 3

$$f(x) = x^4 - x^3 - 5x^2 - x - 6$$

x	a_4	-1	-5	-1	-6
1	1	0	-5	-6	-12
-1	1	-2	-3	2	-8
2	1	1	-3	-7	-20
-2	1	-3	1	-3	0
3	1	0	1	0	

$$\Rightarrow x_1 = -2$$

$$\Rightarrow x_2 = 3$$

Aufgabe 3

$$f(x) = x^4 - x^3 - 5x^2 - x - 6$$

x	a_4	-1	-5	-1	-6	
1	1	0	-5	-6	-12	
-1	1	-2	-3	2	-8	
2	1	1	-3	-7	-20	
-2	1	-3	1	-3	0	$\Rightarrow x_1 = -2$
3	1	0	1	0		$\Rightarrow x_2 = 3$

Somit sind alle ganzzahligen Nullstellen getestet und es gilt:

Aufgabe 3

$$f(x) = x^4 - x^3 - 5x^2 - x - 6$$

x	a_4	-1	-5	-1	-6	
1	1	0	-5	-6	-12	
-1	1	-2	-3	2	-8	
2	1	1	-3	-7	-20	
-2	1	-3	1	-3	0	$\Rightarrow x_1 = -2$
3	1	0	1	0		$\Rightarrow x_2 = 3$

Somit sind alle ganzzahligen Nullstellen getestet und es gilt:

$$\begin{aligned}x^4 - x^3 - 5x^2 - x - 6 &= (x + 2)(x - 3)(x^2 + 1) \\ &= (x + 2)(x - 3)(x + i)(x - i)\end{aligned}$$

Aufgabe 4

Berechne das Resultat der Polynomdivision

$$(x^5 - 7x^4 - 9x^3 + 67x^2 - 16x - 84) : (x - 7)$$

mit dem Horner-Schema.

Aufgabe 4

$$(x^5 - 7x^4 - 9x^3 + 67x^2 - 16x - 84) : (x - 7) = ?$$

Setzt man $x = 7$ ins Horner-Schema für den Dividenden ein, so erhält man den Quotienten des Resultats. In der letzten Spalte steht ein allfälliger Divisionsrest.

x	a_5	-7	-9	67	-16	-84
7	1	0	-9	4	12	0

Daraus folgt:

$$(x^5 - 7x^4 - 9x^3 + 67x^2 - 16x - 84) : (x - 7) = x^4 - 9x^2 + 4x + 12$$

Aufgabe 5

Wie viele Multiplikationen und Additionen sind beim Auswerten des Polynoms

$$f(x) = a_9x^9 + a_8x^8 + \dots + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

an der Stelle $x = x_0$ höchstens nötig?

- (a) mit der „naiven“ Berechnungsmethode
- (b) mit dem Horner-Schema

Aufgabe 5

$$f(x) = a_9x^9 + a_8x^8 + \dots + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

(a) Naiv:

Anzahl Multiplikationen: $9 + 8 + \dots + 1 = (9 + 1) \cdot \frac{9}{2} = 45$

Anzahl Additionen: 9

Aufgabe 5

$$f(x) = a_9x^9 + a_8x^8 + \dots + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

(a) Naiv:

Anzahl Multiplikationen: $9 + 8 + \dots + 1 = (9 + 1) \cdot \frac{9}{2} = 45$

Anzahl Additionen: 9

(b) Horner:

Anzahl Multiplikationen: 9

Anzahl Additionen: 9

Aufgabe 6

Gegeben ist das Polynom

$$f(x) = x^5 - 2112x^4 + 2112x^3 - 2112x^2 + 2112x - 2100$$

Berechne den Wert $f(x)$ für $x = 2111$

- (a) mit dem Taschenrechner TI-30X Pro,
- (b) mit dem Horner-Schema.
- (c) Warum sind die Ergebnisse in (a) und (b) verschieden?

Aufgabe 6

(a) $2110 \xrightarrow{\text{STO}} x$

$$x^5 - 2112x^4 + 2112x^3 - 2112x^2 + 2112x - 2100$$

Resultat: 5050

Aufgabe 6

(a) $2110 \xrightarrow{\text{STO}} x$

$$x^5 - 2112x^4 + 2112x^3 - 2112x^2 + 2112x - 2100 \quad \boxed{\text{enter}}$$

Resultat: 5050

(b)

		-2112	2112	-2112	2112	-2100
2111	1	-1	1	-1	1	11

Aufgabe 6

(a) $2110 \xrightarrow{\text{STO}} x$

$$x^5 - 2112x^4 + 2112x^3 - 2112x^2 + 2112x - 2100 \quad \boxed{\text{enter}}$$

Resultat: 5050

(b)

		-2112	2112	-2112	2112	-2100
2111	1	-1	1	-1	1	11

- (c) Die Potenzen werden so gross, dass der Taschenrechner die Mantisse nicht mehr genau darstellen kann und runden muss. Z.B. beim Monom mit dem grössten Exponenten:

	2111^5
exakt	41921920160991551
TI-30X Pro	$4.192192016 \cdot 10^{16}$

Auch wenn der TI-30X Pro die Mantisse intern mit 1–2 Stellen mehr speichert, fehlen der Potenz immer noch 5 Stellen, was die Differenz der Resultate erklärt.