

Das Horner-Schema

Beispiel 1

Berechne $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 11x + 6$ für $x = 5$.

Beispiel 1

Berechne $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 11x + 6$ für $x = 5$.

Bisher:

Beispiel 1

Berechne $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 11x + 6$ für $x = 5$.

Bisher:

$$f(5) =$$

Beispiel 1

Berechne $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 11x + 6$ für $x = 5$.

Bisher:

$$f(5) = 2 \cdot 5^3 - 3 \cdot 5^2 - 11 \cdot 5 + 6 =$$

Beispiel 1

Berechne $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 11x + 6$ für $x = 5$.

Bisher:

$$f(5) = 2 \cdot 5^3 - 3 \cdot 5^2 - 11 \cdot 5 + 6 = 250 - 75 - 55 + 6 =$$

Beispiel 1

Berechne $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 11x + 6$ für $x = 5$.

Bisher:

$$f(5) = 2 \cdot 5^3 - 3 \cdot 5^2 - 11 \cdot 5 + 6 = 250 - 75 - 55 + 6 = 126$$

Beispiel 1

Berechne $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 11x + 6$ für $x = 5$.

Bisher:

$$f(5) = 2 \cdot 5^3 - 3 \cdot 5^2 - 11 \cdot 5 + 6 = 250 - 75 - 55 + 6 = 126$$

Anzahl Multiplikationen:

Beispiel 1

Berechne $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 11x + 6$ für $x = 5$.

Bisher:

$$f(5) = 2 \cdot 5^3 - 3 \cdot 5^2 - 11 \cdot 5 + 6 = 250 - 75 - 55 + 6 = 126$$

Anzahl Multiplikationen: $3 + 2 + 1 = 6$

Beispiel 1

Berechne $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 11x + 6$ für $x = 5$.

Bisher:

$$f(5) = 2 \cdot 5^3 - 3 \cdot 5^2 - 11 \cdot 5 + 6 = 250 - 75 - 55 + 6 = 126$$

Anzahl Multiplikationen: $3 + 2 + 1 = 6$

Anzahl Additionen/Subtraktionen:

Beispiel 1

Berechne $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 11x + 6$ für $x = 5$.

Bisher:

$$f(5) = 2 \cdot 5^3 - 3 \cdot 5^2 - 11 \cdot 5 + 6 = 250 - 75 - 55 + 6 = 126$$

Anzahl Multiplikationen: $3 + 2 + 1 = 6$

Anzahl Additionen/Subtraktionen: 3

Die Idee von William George Horner (1786–1837)

$$2x^3 - 3x^2 - 11x + 6 =$$

Die Idee von William George Horner (1786–1837)

$$2x^3 - 3x^2 - 11x + 6 = x(2x^2 - 3x - 11) + 6$$
$$=$$

Die Idee von William George Horner (1786–1837)

$$\begin{aligned}2x^3 - 3x^2 - 11x + 6 &= x(2x^2 - 3x - 11) + 6 \\ &= x(x(2x - 3) - 11) + 6\end{aligned}$$

Die Idee von William George Horner (1786–1837)

$$\begin{aligned}2x^3 - 3x^2 - 11x + 6 &= x(2x^2 - 3x - 11) + 6 \\ &= x(x(2x - 3) - 11) + 6\end{aligned}$$

$$f(5) =$$

Die Idee von William George Horner (1786–1837)

$$\begin{aligned}2x^3 - 3x^2 - 11x + 6 &= x(2x^2 - 3x - 11) + 6 \\ &= x(x(2x - 3) - 11) + 6\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f(5) &= 5 \cdot (5 \cdot (2 \cdot 5 - 3) - 11) + 6 \\ &= \end{aligned}$$

Die Idee von William George Horner (1786–1837)

$$\begin{aligned}2x^3 - 3x^2 - 11x + 6 &= x(2x^2 - 3x - 11) + 6 \\ &= x(x(2x - 3) - 11) + 6\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f(5) &= 5 \cdot (5 \cdot (2 \cdot 5 - 3) - 11) + 6 \\ &= 5 \cdot (5 \cdot 7 - 11) + 6 \\ &= \end{aligned}$$

Die Idee von William George Horner (1786–1837)

$$\begin{aligned}2x^3 - 3x^2 - 11x + 6 &= x(2x^2 - 3x - 11) + 6 \\ &= x(x(2x - 3) - 11) + 6\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f(5) &= 5 \cdot (5 \cdot (2 \cdot 5 - 3) - 11) + 6 \\ &= 5 \cdot (5 \cdot 7 - 11) + 6 \\ &= 5 \cdot 24 + 6 \\ &= 126\end{aligned}$$

Die Idee von William George Horner (1786–1837)

$$\begin{aligned}2x^3 - 3x^2 - 11x + 6 &= x(2x^2 - 3x - 11) + 6 \\ &= x(x(2x - 3) - 11) + 6\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f(5) &= 5 \cdot (5 \cdot (2 \cdot 5 - 3) - 11) + 6 \\ &= 5 \cdot (5 \cdot 7 - 11) + 6 \\ &= 5 \cdot 24 + 6 \\ &= 126\end{aligned}$$

Anzahl Multiplikationen:

Die Idee von William George Horner (1786–1837)

$$\begin{aligned}2x^3 - 3x^2 - 11x + 6 &= x(2x^2 - 3x - 11) + 6 \\ &= x(x(2x - 3) - 11) + 6\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f(5) &= 5 \cdot (5 \cdot (2 \cdot 5 - 3) - 11) + 6 \\ &= 5 \cdot (5 \cdot 7 - 11) + 6 \\ &= 5 \cdot 24 + 6 \\ &= 126\end{aligned}$$

Anzahl Multiplikationen: 3

Die Idee von William George Horner (1786–1837)

$$\begin{aligned}2x^3 - 3x^2 - 11x + 6 &= x(2x^2 - 3x - 11) + 6 \\ &= x(x(2x - 3) - 11) + 6\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f(5) &= 5 \cdot (5 \cdot (2 \cdot 5 - 3) - 11) + 6 \\ &= 5 \cdot (5 \cdot 7 - 11) + 6 \\ &= 5 \cdot 24 + 6 \\ &= 126\end{aligned}$$

Anzahl Multiplikationen: 3

Anzahl Additionen/Subtraktionen:

Die Idee von William George Horner (1786–1837)

$$\begin{aligned}2x^3 - 3x^2 - 11x + 6 &= x(2x^2 - 3x - 11) + 6 \\ &= x(x(2x - 3) - 11) + 6\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f(5) &= 5 \cdot (5 \cdot (2 \cdot 5 - 3) - 11) + 6 \\ &= 5 \cdot (5 \cdot 7 - 11) + 6 \\ &= 5 \cdot 24 + 6 \\ &= 126\end{aligned}$$

Anzahl Multiplikationen: 3

Anzahl Additionen/Subtraktionen: 3

Das Horner-Schema

x	a_n	-3	-11	6

Das Horner-Schema

x	a_n	-3	-11	6
5				

Das Horner-Schema

x	a_n	-3	-11	6
5	2			

Das Horner-Schema

x	a_n	-3	-11	6
5	2	7		

Das Horner-Schema

x	a_n	-3	-11	6
5	2	7	24	

Das Horner-Schema

x	a_n	-3	-11	6
5	2	7	24	126

Das Horner-Schema

x	a_n	-3	-11	6
5	2	7	24	126
4				

Das Horner-Schema

x	a_n	-3	-11	6
5	2	7	24	126
4	2			

Das Horner-Schema

x	a_n	-3	-11	6
5	2	7	24	126
4	2	5		

Das Horner-Schema

x	a_n	-3	-11	6
5	2	7	24	126
4	2	5	9	

Das Horner-Schema

x	a_n	-3	-11	6
5	2	7	24	126
4	2	5	9	42

Das Horner-Schema

x	a_n	-3	-11	6
5	2	7	24	126
4	2	5	9	42
3				

Das Horner-Schema

x	a_n	-3	-11	6
5	2	7	24	126
4	2	5	9	42
3	2			

Das Horner-Schema

x	a_n	-3	-11	6
5	2	7	24	126
4	2	5	9	42
3	2	3		

Das Horner-Schema

x	a_n	-3	-11	6
5	2	7	24	126
4	2	5	9	42
3	2	3	-2	

Das Horner-Schema

x	a_n	-3	-11	6
5	2	7	24	126
4	2	5	9	42
3	2	3	-2	0

Das Horner-Schema

x	a_n	-3	-11	6
5	2	7	24	126
4	2	5	9	42
3	2	3	-2	0

$x = 3$ ist Nullstelle des Polynoms.

Polynomdivision durch $(x - 3)$ ergibt:

$$\begin{array}{r} (2x^3 - 3x^2 - 11x + 6) : (x - 3) = 2x^2 + 3x - 2 \\ -(2x^3 - 6x^2) \\ \hline 3x^2 - 11x \\ -(3x^2 - 9x) \\ \hline -2x + 6 \\ -(-2x + 6) \\ \hline 0 \end{array}$$

Offenbar sind die Koeffizienten des Quotientenpolynoms 2, 3, -2 mit der Zeile im Horner-Schema für $x = 3$ identisch. Damit haben wir zwei Aufgaben gleichzeitig gelöst:

Findet man mit Hilfe des Horner-Schemas eine Nullstelle x_0 des Polynoms $f(x)$, so stehen in der betreffenden Zeile die Koeffizienten des Quotientenpolynoms $f(x) : (x - x_0)$.

Hinweis

Falls sich ein Polynom z. B. 3. Grades vollständig in Linearfaktoren zerlegen lässt, so hat es die Form

$$\begin{aligned} a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 &= a_3(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \\ &= a_3x^3 + \dots + \underbrace{a_3(-x_1)(-x_2)(-x_3)}_{a_0} \end{aligned}$$

Wenn dieses Polynom ganzzahlige Nullstellen und ganzzahlige Koeffizienten hat, so muss jede Nullstelle (bis auf ein Vorzeichen) Teiler von a_0/a_3 sein.

Beispiel 2

$$f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 20$$

x		-9	24	-20

Beispiel 2

$$f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 20$$

x		-9	24	-20

(nur Teiler von -20 testen)

Beispiel 2

$$f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 20$$

x		-9	24	-20
1				

(nur Teiler von -20 testen)

Beispiel 2

$$f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 20$$

x		-9	24	-20	(nur Teiler von -20 testen)
1	1				

Beispiel 2

$$f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 20$$

x		-9	24	-20	(nur Teiler von -20 testen)
1	1	-8			

Beispiel 2

$$f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 20$$

x		-9	24	-20	(nur Teiler von -20 testen)
1	1	-8	16		

Beispiel 2

$$f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 20$$

x		-9	24	-20	(nur Teiler von -20 testen)
1	1	-8	16	-4	

Beispiel 2

$$f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 20$$

x		-9	24	-20	(nur Teiler von -20 testen)
1	1	-8	16	-4	
-1					

Beispiel 2

$$f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 20$$

x		-9	24	-20	(nur Teiler von -20 testen)
1	1	-8	16	-4	
-1	1				

Beispiel 2

$$f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 20$$

x		-9	24	-20	(nur Teiler von -20 testen)
1	1	-8	16	-4	
-1	1	-10			

Beispiel 2

$$f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 20$$

x		-9	24	-20	(nur Teiler von -20 testen)
1	1	-8	16	-4	
-1	1	-10	34		

Beispiel 2

$$f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 20$$

x		-9	24	-20	(nur Teiler von -20 testen)
1	1	-8	16	-4	
-1	1	-10	34	-54	

Beispiel 2

$$f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 20$$

x		-9	24	-20	(nur Teiler von -20 testen)
1	1	-8	16	-4	
-1	1	-10	34	-54	
2					

Beispiel 2

$$f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 20$$

x		-9	24	-20	(nur Teiler von -20 testen)
1	1	-8	16	-4	
-1	1	-10	34	-54	
2	1				

Beispiel 2

$$f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 20$$

x		-9	24	-20	(nur Teiler von -20 testen)
1	1	-8	16	-4	
-1	1	-10	34	-54	
2	1	-7			

Beispiel 2

$$f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 20$$

x		-9	24	-20	(nur Teiler von -20 testen)
1	1	-8	16	-4	
-1	1	-10	34	-54	
2	1	-7	10		

Beispiel 2

$$f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 20$$

x		-9	24	-20	(nur Teiler von -20 testen)
1	1	-8	16	-4	
-1	1	-10	34	-54	
2	1	-7	10	0	

Beispiel 2

$$f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 20$$

x		-9	24	-20	(nur Teiler von -20 testen)
1	1	-8	16	-4	
-1	1	-10	34	-54	
2	1	-7	10	0	(nur Teiler von 10 testen)

Beispiel 2

$$f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 20$$

x		-9	24	-20	(nur Teiler von -20 testen)
1	1	-8	16	-4	
-1	1	-10	34	-54	
2	1	-7	10	0	(nur Teiler von 10 testen)
2					

Beispiel 2

$$f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 20$$

x		-9	24	-20	(nur Teiler von -20 testen)
1	1	-8	16	-4	
-1	1	-10	34	-54	
2	1	-7	10	0	(nur Teiler von 10 testen)
2	1				

Beispiel 2

$$f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 20$$

x		-9	24	-20	(nur Teiler von -20 testen)
1	1	-8	16	-4	
-1	1	-10	34	-54	
2	1	-7	10	0	(nur Teiler von 10 testen)
2	1	-5			

Beispiel 2

$$f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 20$$

x		-9	24	-20	(nur Teiler von -20 testen)
1	1	-8	16	-4	
-1	1	-10	34	-54	
2	1	-7	10	0	(nur Teiler von 10 testen)
2	1	-5	0		

Beispiel 2

$$f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 20$$

x		-9	24	-20	(nur Teiler von -20 testen)
1	1	-8	16	-4	
-1	1	-10	34	-54	
2	1	-7	10	0	(nur Teiler von 10 testen)
2	1	-5	0		(nur Teiler von -5 testen)

Beispiel 2

$$f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 20$$

x		-9	24	-20	(nur Teiler von -20 testen)
1	1	-8	16	-4	
-1	1	-10	34	-54	
2	1	-7	10	0	(nur Teiler von 10 testen)
2	1	-5	0		(nur Teiler von -5 testen)
5					

Beispiel 2

$$f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 20$$

x		-9	24	-20	(nur Teiler von -20 testen)
1	1	-8	16	-4	
-1	1	-10	34	-54	
2	1	-7	10	0	(nur Teiler von 10 testen)
2	1	-5	0		(nur Teiler von -5 testen)
5	1				

Beispiel 2

$$f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 20$$

x		-9	24	-20	(nur Teiler von -20 testen)
1	1	-8	16	-4	
-1	1	-10	34	-54	
2	1	-7	10	0	(nur Teiler von 10 testen)
2	1	-5	0		(nur Teiler von -5 testen)
5	1	0			

Beispiel 2

$$f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 20$$

x		-9	24	-20	(nur Teiler von -20 testen)
1	1	-8	16	-4	
-1	1	-10	34	-54	
2	1	-7	10	0	(nur Teiler von 10 testen)
2	1	-5	0		(nur Teiler von -5 testen)
5	1	0			

Nullstellen:

Beispiel 2

$$f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 20$$

x		-9	24	-20	(nur Teiler von -20 testen)
1	1	-8	16	-4	
-1	1	-10	34	-54	
2	1	-7	10	0	(nur Teiler von 10 testen)
2	1	-5	0		(nur Teiler von -5 testen)
5	1	0			

Nullstellen: $x_1 = 2$,

Beispiel 2

$$f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 20$$

x		-9	24	-20	(nur Teiler von -20 testen)
1	1	-8	16	-4	
-1	1	-10	34	-54	
2	1	-7	10	0	(nur Teiler von 10 testen)
2	1	-5	0		(nur Teiler von -5 testen)
5	1	0			

Nullstellen: $x_1 = 2$, $x_2 = 2$,

Beispiel 2

$$f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 20$$

x		-9	24	-20	(nur Teiler von -20 testen)
1	1	-8	16	-4	
-1	1	-10	34	-54	
2	1	-7	10	0	(nur Teiler von 10 testen)
2	1	-5	0		(nur Teiler von -5 testen)
5	1	0			

Nullstellen: $x_1 = 2$, $x_2 = 2$, $x_3 = 5$

Beispiel 2

$$f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 20$$

x		-9	24	-20	(nur Teiler von -20 testen)
1	1	-8	16	-4	
-1	1	-10	34	-54	
2	1	-7	10	0	(nur Teiler von 10 testen)
2	1	-5	0		(nur Teiler von -5 testen)
5	1	0			

Nullstellen: $x_1 = 2$, $x_2 = 2$, $x_3 = 5$

Merke: Da $(x - x_0)$ mehr als einmal als Faktor im Polynom f vorkommen kann, muss eine Nullstelle x_0 so lange getestet werden, bis einen Rest $\neq 0$ entsteht. Diese *Vielfachheit* der Nullstelle wird auch *Multiplizität* von x_0 genannt.