

Horner-Schema

Prüfungsvorbereitung

Aufgabe 1

Bestimme mit dem Horner-Schema (aber ohne Taschenrechner) den Funktionswert der Funktion

$f(x) = 3x^4 - 29x^3 + 23x^2 - 44x + 71$ an der Stelle $x = 9$.

Auch wenn das Beispiel konstruiert ist, zeigt es schön, wie das Horner-Schema das Potenzieren und das Multiplizieren mit grossen Faktoren vereinfachen kann.

Aufgabe 1

x_0			-29	23	-44	71
9	3		-2	5	1	80

Also: $f(9) = 80$

Aufgabe 2

Wie viele Multiplikationen sind beim Auswerten der Funktion

$$f(x) = 2x^5 + 3x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 6x + 7$$

an der Stelle $x = 8$ nötig ...

- (a) mit der direkten („naiven“) Berechnungsmethode.
- (b) mit dem Horner-Schema.

Aufgabe 2

- (a) naiv: $5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15$ Multiplikationen
- (b) Horner-Schema: $1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 5$ Multiplikationen

Aufgabe 3

Bestimme mit dem Horner-Schema (aber ohne Taschenrechner) alle Nullstellen der Funktion $x^4 - 5x^3 - 7x^2 + 41x - 30$ wenn bekannt ist, dass alle Nullstellen ganzzahlig sind.

Aufgabe 3

Bestimmt man alle möglichen Faktoren des Koeffizienten, erhält man alle möglichen Kandidaten: $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 5, \pm 15, \pm 30$

Sicherlich muss 2 oder -2 eine Lösung sein, denn ohne eine gerade Zahl, würde das Produkt der vier Lösungen nicht -30 ergeben. Darüber hinaus wissen wir auch, dass eine oder drei der Lösungen negativ sein müssen.

x_0	a_4	-5	-7	41	-30
2	1	-3	-13	15	0
3	1	0	-13	-24	
-3	1	-6	5	0	
5	1	-1	0		
1	1	0			

$$x_1 = -3, x_2 = 1, x_3 = 2, x_4 = 5$$

Aufgabe 4

Bestimme das Resultat der Division

$(2x^4 + 7x^3 - 5x + 12) : (x + 3)$ mit dem Horner-Schema.

Aufgabe 4

x_0		7	0	-5	12
-3	2	1	-3	4	0

Also: $(2x^4 + 7x^3 - 5x + 12) : (x + 3) = 2x^3 + x^2 - 3x + 4$ (ohne Rest)

Aufgabe 5

Bestimme das Resultat der Division

$(x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) : (x - 1)$ mit dem Horner-Schema.

Aufgabe 5

x_0		1	1	1	1	1
1	1	2	3	4	5	6

Die Division wäre ohne Rest, wenn eine 0 anstelle der 6 herauskommen würde. Somit haben wir einen Rest von 6, der nicht durch $(x - 1)$ teilbar ist:

$$(x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) : (x - 1) = x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 4x + 5 + \frac{6}{x - 1}$$

Aufgabe 6

Dividiere das Polynom $x^6 - 6x^5 - 4x^4 + 58x^3 - 57x^2 - 52x + 60$ durch $(x + 3)(x - 2)^2$.

Aufgabe 6

x	a_6	-6	-4	58	-57	-52	60
-3	1	-9	23	-11	-24	20	0
2	1	-7	9	7	-10	0	
2	1	-5	-1	5	0		

$$(x^6 - 6x^5 - 4x^4 + 58x^3 - 57x^2 - 52x + 60) : (x + 3)(x - 2)^2 = x^3 - 5x^2 - x + 5$$

Aufgabe 7

Gegeben ist das Polynom

$$f(x) = x^5 - 2112x^4 + 2112x^3 - 2112x^2 + 2112x - 2100$$

Berechne den Wert $f(x)$ für $x = 2111$

- (a) mit dem Taschenrechner TI-30X Pro,
- (b) mit dem Horner-Schema.
- (c) Warum sind die Ergebnisse in (a) und (b) verschieden?

Aufgabe 7

(a) $2110 \xrightarrow{\text{STO}} x$

$$x^5 - 2112x^4 + 2112x^3 - 2112x^2 + 2112x - 2100$$

Resultat: 5050

Aufgabe 7

(a) $2110 \xrightarrow{\text{STO}} x$

$$x^5 - 2112x^4 + 2112x^3 - 2112x^2 + 2112x - 2100 \quad \boxed{\text{enter}}$$

Resultat: 5050

(b)

		-2112	2112	-2112	2112	-2100
2111	1	-1	1	-1	1	11

Aufgabe 7

(a) $2110 \xrightarrow{\text{STO}} x$

$$x^5 - 2112x^4 + 2112x^3 - 2112x^2 + 2112x - 2100 \quad \boxed{\text{enter}}$$

Resultat: 5050

(b)

		-2112	2112	-2112	2112	-2100
2111	1	-1	1	-1	1	11

- (c) Die Potenzen werden so gross, dass der Taschenrechner die Mantisse nicht mehr genau darstellen kann und runden muss. Z.B. beim Monom mit dem grössten Exponenten:

	2111^5
exakt	41921920160991551
TI-30X Pro	$4.192192016 \cdot 10^{16}$

Auch wenn der TI-30X Pro die Mantisse intern mit 1–2 Stellen mehr speichert, fehlen der Potenz immer noch 5 Stellen, was die Differenz der Resultate erklärt.

Aufgabe 8

Wie viele Multiplikationen und Additionen sind höchstens nötig, um eine Polynomfunktion vom Grad 100 an einer bestimmten Stelle x auszuwerten, wenn ...

- (a) zuerst alle Monome ausmultipliziert und dann addiert werden,
- (b) das Horner-Schema verwendet wird.

Aufgabe 8

$$f(x) = a_{100}x^{100} + a_{99}x^{99} + \dots + a_1x + a_0$$

- (a) ► Für die Berechnung von $a_{100}x^{100}$ sind 100 Multiplikationen nötig.
(99 Multiplikationen für x^{100} und 1 Multiplikation für $a_{100} \cdot x^{100}$).
- Für die Berechnung von $a_{99}x^{99}$ sind 99 Multiplikationen nötig.
(98 Multiplikationen für x^{99} und 1 Multiplikation für $a_{99} \cdot x^{99}$).
- ...
- Für die Berechnung von a_1x ist 1 Multiplikation nötig.
(0 Multiplikationen für x^1 und 1 Multiplikation für $a_1 \cdot x$)
- Für die Berechnung des Monoms a_0 ist keine Multiplikation nötig.

Aufgabe 8

$$f(x) = a_{100}x^{100} + a_{99}x^{99} + \dots + a_1x + a_0$$

- (a) ▶ Für die Berechnung von $a_{100}x^{100}$ sind 100 Multiplikationen nötig.
(99 Multiplikationen für x^{100} und 1 Multiplikation für $a_{100} \cdot x^{100}$).
- ▶ Für die Berechnung von $a_{99}x^{99}$ sind 99 Multiplikationen nötig.
(98 Multiplikationen für x^{99} und 1 Multiplikation für $a_{99} \cdot x^{99}$).
- ▶ ...
- ▶ Für die Berechnung von a_1x ist 1 Multiplikation nötig.
(0 Multiplikationen für x^1 und 1 Multiplikation für $a_1 \cdot x$)
- ▶ Für die Berechnung des Monoms a_0 ist keine Multiplikation nötig.

$$\text{Anzahl Multiplikationen: } 0 + 1 + 2 + \dots + 99 + 100 = \frac{0 + 100}{2} \cdot 101$$

Aufgabe 8

$$f(x) = a_{100}x^{100} + a_{99}x^{99} + \dots + a_1x + a_0$$

- (a) ▶ Für die Berechnung von $a_{100}x^{100}$ sind 100 Multiplikationen nötig.
(99 Multiplikationen für x^{100} und 1 Multiplikation für $a_{100} \cdot x^{100}$).
- ▶ Für die Berechnung von $a_{99}x^{99}$ sind 99 Multiplikationen nötig.
(98 Multiplikationen für x^{99} und 1 Multiplikation für $a_{99} \cdot x^{99}$).
- ▶ ...
- ▶ Für die Berechnung von a_1x ist 1 Multiplikation nötig.
(0 Multiplikationen für x^1 und 1 Multiplikation für $a_1 \cdot x$)
- ▶ Für die Berechnung des Monoms a_0 ist keine Multiplikation nötig.

$$\text{Anzahl Multiplikationen: } 0 + 1 + 2 + \dots + 99 + 100 = \frac{0 + 100}{2} \cdot 101$$

oder:

$$\text{Anzahl Multiplikationen} = 1 + 2 + \dots + 99 + 100 = \frac{1 + 100}{2} \cdot 100 = (1 + 100) \cdot \frac{100}{2} =$$

Aufgabe 8

$$f(x) = a_{100}x^{100} + a_{99}x^{99} + \dots + a_1x + a_0$$

- (a) ▶ Für die Berechnung von $a_{100}x^{100}$ sind 100 Multiplikationen nötig.
(99 Multiplikationen für x^{100} und 1 Multiplikation für $a_{100} \cdot x^{100}$).
- ▶ Für die Berechnung von $a_{99}x^{99}$ sind 99 Multiplikationen nötig.
(98 Multiplikationen für x^{99} und 1 Multiplikation für $a_{99} \cdot x^{99}$).
- ▶ ...
- ▶ Für die Berechnung von a_1x ist 1 Multiplikation nötig.
(0 Multiplikationen für x^1 und 1 Multiplikation für $a_1 \cdot x$)
- ▶ Für die Berechnung des Monoms a_0 ist keine Multiplikation nötig.

$$\text{Anzahl Multiplikationen: } 0 + 1 + 2 + \dots + 99 + 100 = \frac{0 + 100}{2} \cdot 101$$

oder:

$$\text{Anzahl Multiplikationen} = 1 + 2 + \dots + 99 + 100 = \frac{1 + 100}{2} \cdot 100 = (1 + 100) \cdot \frac{100}{2} =$$

Anzahl Additionen: 100

Aufgabe 8

$$f(x) = a_{100}x^{100} + a_{99}x^{99} + \dots + a_1x + a_0$$

- (a)
- ▶ Für die Berechnung von $a_{100}x^{100}$ sind 100 Multiplikationen nötig.
(99 Multiplikationen für x^{100} und 1 Multiplikation für $a_{100} \cdot x^{100}$).
 - ▶ Für die Berechnung von $a_{99}x^{99}$ sind 99 Multiplikationen nötig.
(98 Multiplikationen für x^{99} und 1 Multiplikation für $a_{99} \cdot x^{99}$).
 - ▶ ...
 - ▶ Für die Berechnung von a_1x ist 1 Multiplikation nötig.
(0 Multiplikationen für x^1 und 1 Multiplikation für $a_1 \cdot x$)
 - ▶ Für die Berechnung des Monoms a_0 ist keine Multiplikation nötig.

$$\text{Anzahl Multiplikationen: } 0 + 1 + 2 + \dots + 99 + 100 = \frac{0 + 100}{2} \cdot 101$$

oder:

$$\text{Anzahl Multiplikationen} = 1 + 2 + \dots + 99 + 100 = \frac{1 + 100}{2} \cdot 100 = (1 + 100) \cdot \frac{100}{2} =$$

Anzahl Additionen: 100

(b) Horner Schema: