Formale Untersuchung der Symmetrieeigenschaft einer Funktion

Ist die Funktionsdefinition $f(x)$ einer Funktion f gegeben, berechnet man zunächst *formal* $f(-x)$ und vereinfacht den Term so weit wie möglich.

(a) Erhält man auf diese Weise $f(-x) = \cdots = f(x)$, so hat man gezeigt, dass *alle* $x \in D_f$ die Bedingung $f(-x) = f(x)$ erfüllen. Dies bedeutet, dass der Graph der Funktion *ordinatensymmetrisch* und die Funktion selbst *gerade* ist.

(b) Erhält man auf diese Weise $f(-x) = \cdots = -f(x)$, so hat man gezeigt, dass *alle* $x \in D_f$ die Bedingung $f(-x) = -f(x)$ erfüllen. Dies bedeutet, dass der Graph der Funktion *ursprungssymmetrisch* und die Funktion selbst *ungerade* ist.

(c) Falls weder (a) noch (b) zutrifft, muss es (mindestens) eine Stelle $x_0 \in D_f$ geben, die weder die Bedingung $f(-x_0) = f(x_0)$ noch die Bedingung $f(-x_0) = -f(x_0)$ erfüllt. Eine solche Stelle ist im Allgemeinen leicht zu erraten und sollte als Beweis angeben werden.

Beispiel 1: $f(x) = x^2 + 1$

$f(-x) = (-x)^2 + 1 = \underbrace{x^2 + 1}_{f(x)} = f(x)$ für alle $x \in D_f$

$\Rightarrow$ f ist gerade (Synonym: der Graph von f ist symmetrisch zur y-Achse)

Beispiel 2: $f(x) = x^3 + x$

$f(-x) = (-x)^3 + (-x) = -x^3 - x \overset{*}{=} -\underbrace{(x^3 + x)}_{f(x)} = -f(x)$ für alle $x \in D_f$

$\Rightarrow$ f ist *ungerade* (Synonym: der Graph von f ist symmetrisch zum Ursprung)

* Um diesen Fall zu erkennen muss man natürlich aktiv den Faktor (-1) ausklammern.

Beispiel 3: $f(x) = x^3 + x^2 + 1$

$f(-x) = (-x)^3 + (-x)^2 + 1 = \underbrace{-x^3 + x^2 + 1}_{\neq f(x)} = -\underbrace{(x^3 - x^2 - 1)}_{\neq f(x)}$

da wir weder $f(x)$ noch $-f(x)$ in den Termen rechts wiederfinden, liegt das daran, dass keine der oben genannten Symmetrien vorliegt.

Das heisst dass es ein $x_0 \in D_f$ geben muss, das weder die Gleichung $f(-x_0) = f(x_0)$ noch $f(-x_0) = -f(x_0)$ erfüllt. Ein solches x_0 ist meist einfach zu finden. Man probiert es mit $x_0 = 1$, $x_0 = 2$, ... Hier:

$f(1) = 1^3 + 1^2 + 1 = 1 + 1 + 1 = 3$

$f(-1) = (-1)^3 + (-1)^2 = -1 + 1 + 1 = 1$

offenbar gilt weder $\underbrace{f(1)}_{3} = \underbrace{f(-1)}_{1}$ noch $\underbrace{f(1)}_{3} = \underbrace{-f(-1)}_{-1}$

und die in (a) und (b) verlangten Bedingungen sind verletzt. Deshalb ist f weder gerade noch ungerade.