

Aufgabe 1

Bestimme einige Glieder der Folge und untersuche, ob sie beschränkt, monoton wachsend, monoton fallend oder alternierend ist.

$$(a) a_n = \frac{n^2}{n+1}$$

$$(b) a_n = \frac{(-1)^n}{n}$$

$$(c) a_n = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n-1}$$

$$(d) a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^3$$

$$(e) a_n = \sqrt[n]{2}$$

$$(f) a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$$

$$(g) a_n = \frac{n^2}{2^n}$$

Aufgabe 2

Untersuche, ob die nachstehenden Folgen konvergieren oder divergieren. Falls sie konvergieren, ist der Grenzwert anzugeben. *Beachte:* Winkel sind im Bogenmass angegeben.

$$(a) a_n = (-1)^n$$

$$(b) a_n = \frac{(-1)^n}{n}$$

$$(c) a_n = \sin n$$

$$(d) a_n = \frac{\cos n}{n}$$

$$(e) a_n = \frac{3n}{n+1} - \frac{n}{n+4}$$

$$(f) a_n = 0.8^n$$

$$(g) a_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n$$

$$(h) a_n = \frac{3^n}{n^3}$$

$$(i) a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

$$(j) a_n = \sqrt[n]{n}$$

Aufgabe 3

Bestimme den Grenzwert der Folgen (a_n) .

$$(a) a_n = \frac{1}{n}$$

$$(b) a_n = \frac{1}{n^2} - 2$$

$$(c) a_n = \frac{1}{n(n+1)}$$

$$(d) a_n = \frac{3n^2 - 1}{4n^2 + 2}$$

$$(e) a_n = \sqrt{\frac{n}{4n+1}}$$

$$(f) a_n = e^{\frac{1}{n}}$$

$$(g) a_n = e^{-n}$$

Aufgabe 4

Untersuche, ob die Folgen konvergent sind. Gib in diesem Fall den Grenzwert an.

$$(a) a_n = \frac{1 - 1/n^2}{1 + 1/n^2}$$

$$(b) a_n = \frac{n+1}{2n+1}$$

$$(c) a_n = \frac{2 + 3n^3}{n^3 - 4}$$

$$(d) a_n = \frac{n^3 + n}{n^4 + n^2}$$

$$(e) a_n = \frac{2n^3 - 2}{n - 2}$$

$$(f) a_n = \frac{2n^3 - 3n + 1}{4n + 5n^3 + 2}$$

Aufgabe 5

Untersuche, ob die Folgen konvergent sind. Gib in diesem Fall den Grenzwert an.

$$(a) a_n = \frac{\sqrt{n} + 1}{2\sqrt{n} + 3}$$

$$(b) a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$$

$$(c) a_n = \sqrt{n^2 + 1} - n + 1$$

$$(d) a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n^2 + 1}$$

Aufgabe 6

Widerlege die folgenden Behauptungen durch ein Gegenbeispiel:

(a) Jede monotone Folge ist konvergent.

(b) Jede beschränkte Folge ist divergent.

(c) Jede divergente Folge ist unbeschränkt.

(d) Ist a_n divergent, so ist $\frac{1}{a_n}$ konvergent.