
Differenzialrechnung

Übungen (II) (L+)

Aufgabe 11.1

$f(x) = \sin x$; Entwicklungsstelle: $x_0 = 0$

$$f^{(0)}(x) = \sin x \quad \Rightarrow \quad f^{(0)}(0) = 0$$

$$f^{(1)}(x) = \cos x \quad \Rightarrow \quad f^{(1)}(0) = 1$$

$$f^{(2)}(x) = -\sin x \quad \Rightarrow \quad f^{(2)}(0) = 0$$

$$f^{(3)}(x) = -\cos x \quad \Rightarrow \quad f^{(3)}(0) = -1$$

$$f^{(4)}(x) = \sin x \quad \Rightarrow \quad f^{(4)}(0) = 0$$

$$\dots = \dots \quad \Rightarrow \quad \dots = \dots$$

$$f(x) = \frac{f^{(0)}(x_0)}{0!} + \frac{f^{(1)}(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f^{(2)}(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots$$

$$\sin(x) = 1 \cdot x - \frac{1}{3!} \cdot x^3 + \frac{1}{5!} \cdot x^5 - \frac{1}{7!} \cdot x^7 + \dots$$

$$= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

Aufgabe 11.2

$f(x) = \sqrt{x}$; $x_0 = 1$

$$f^{(0)}(x) = x^{\frac{1}{2}} \quad \Rightarrow \quad f^{(0)}(1) = 1$$

$$f^{(1)}(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} \quad \Rightarrow \quad f^{(1)}(1) = \frac{1}{2}$$

$$f^{(2)}(x) = -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}} \quad \Rightarrow \quad f^{(2)}(1) = -\frac{1}{4}$$

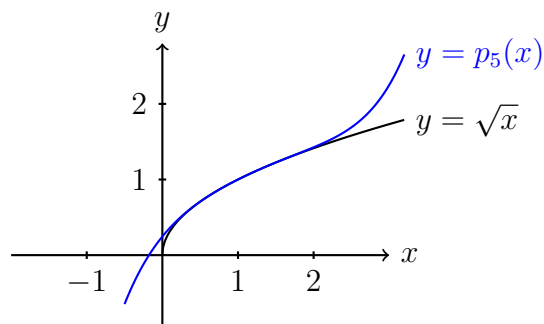
$$f^{(3)}(x) = \frac{3}{8}x^{-\frac{5}{2}} \quad \Rightarrow \quad f^{(3)}(1) = \frac{3}{8}$$

$$f^{(4)}(x) = -\frac{15}{16}x^{-\frac{7}{2}} \quad \Rightarrow \quad f^{(4)}(1) = -\frac{15}{16}$$

$$f^{(5)}(x) = \frac{105}{32}x^{-\frac{9}{2}} \quad \Rightarrow \quad f^{(5)}(1) = \frac{105}{32}$$

$$\sqrt{x} = 1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{4 \cdot 2!}(x-1)^2 + \frac{3}{8 \cdot 3!}(x-1)^3 - \frac{15}{16 \cdot 4!}(x-1)^4 + \dots$$

$$= 1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{8}(x-1)^2 + \frac{1}{16}(x-1)^3 - \frac{5}{128}(x-1)^4 + \frac{7}{256}(x-1)^5 - \dots$$



Aufgabe 11.3

$$\begin{aligned}
\text{(a)} \quad f^{(0)}(x) = \ln x &\Rightarrow f^{(0)}(1) = 0 \\
f^{(1)}(x) = x^{-1} &\Rightarrow f^{(1)}(1) = 1 \\
f^{(2)}(x) = -x^{-2} &\Rightarrow f^{(2)}(1) = -1 \\
f^{(3)}(x) = 2x^{-3} &\Rightarrow f^{(3)}(1) = 2 = 2! \\
f^{(4)}(x) = -6x^{-4} &\Rightarrow f^{(4)}(1) = -6 = -3! \\
f^{(5)}(x) = 24x^{-5} &\Rightarrow f^{(5)}(1) = 24 = 4! \\
\dots\dots &\Rightarrow \dots = \dots
\end{aligned}$$

$$f(x) = \frac{f^{(0)}(x_0)}{0!} + \frac{f^{(1)}(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f^{(2)}(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots$$

$$\begin{aligned}
\ln(x) &= 1 \cdot (x - 1) - \frac{1}{2!} \cdot (x - 1)^2 + \frac{2!}{3!} \cdot (x - 1)^3 - \dots \\
&= (x - 1) - \frac{(x - 1)^2}{2} + \frac{(x - 1)^3}{3} - \frac{(x - 1)^4}{4} + \dots \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(x - 1)^{k+1}}{k + 1}
\end{aligned}$$

mit der Substitution $x - 1 \rightarrow x$ erhält man:

$$\begin{aligned}
\ln(x + 1) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \dots \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k + 1} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k}
\end{aligned}$$

Bei der letzte Umformung wird die Summe bei $k = 1$ statt bei $k = 0$ gestartet, weshalb im allgemeinen Summanden zum Ausgleich k durch $k - 1$ ersetzt werden muss. Dies führt zu einer etwas einfachere Formel. Beachte $(-1)^{k-1} = (-1)^{k+1}$.

$$\text{(b)} \quad \ln(2) = \ln(1 + 1) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1^k}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$$

$$s_n = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k}$$

n	s_n
10	0.64563
20	0.66877
30	0.67676
40	0.68080
...	...
198	0.69063
199	0.69565
200	0.69065

erst zwei signifikante Stellen.

Aufgabe 11.4

$$x^2 = e^x$$

$$x^2 \approx 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$$

$$6x^2 \approx 6 + 6x + 3x^2 + x^3$$

$$0 \approx x^3 - 3x^2 + 6x + 6$$

$$x \approx -0.69889$$

Zum Vergleich die „exakte“ Lösung: -0.7035

Aufgabe 11.5

Reihenentwicklung von $\sin x$: Formelsammlung S. 79

Entwicklungsstelle: $x_0 = 0$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} \cdot \sin x \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \dots \right) \\ &= 1\end{aligned}$$

Aufgabe 11.6

$$\begin{aligned}p(x) &= p(1) + p'(1)(x-1) + \frac{1}{2!}p''(1)(x-1)^2 \\ &\quad + \frac{1}{3!}p'''(1)(x-1)^3 + \frac{1}{4!}p^{(4)}(1)(x-1)^4\end{aligned}$$

$$p(x) = x^4 + 3x^3 + x^2 + 2x + 1 \quad \Rightarrow \quad p(1) = 8$$

$$p'(x) = 4x^3 + 9x^2 + 2x + 2 \quad \Rightarrow \quad p'(1) = 17$$

$$p''(x) = 12x^2 + 18x + 2 \quad \Rightarrow \quad p''(1) = 32$$

$$p'''(x) = 24x + 18 \quad \Rightarrow \quad p'''(1) = 42$$

$$p^{(4)}(x) = 24 \quad \Rightarrow \quad p^{(4)}(1) = 24$$

$$\begin{aligned}p(x) &= 8 + 17(x-1) + \frac{32}{2}(x-1)^2 + \frac{42}{6}(x-1)^3 + \frac{24}{24}(x-1)^4 \\ &= (x-1)^4 + 7(x-1)^3 + 16(x-1)^2 + 17(x-1) + 8\end{aligned}$$

Aufgabe 12.1

Ableitungen:

$$f(x) = x^2 - 6x + 8$$

$$f'(x) = 2x - 6$$

$$f''(x) = 2$$

$$f'''(x) = 0$$

Extrempunkte:

$$f'(x) = 0$$

$$2x - 6 = 0$$

$$x = 3$$

$$f''(3) = 2 > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{TiP}(3, -1)$$

Wendepunkte:

$$f''(x) = 0$$

$$2 = 0$$

keine Lösung

keine Wendepunkte

Aufgabe 12.2

Ableitungen:

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x - 18$$

$$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12$$

$$f''(x) = 12x - 6$$

$$f'''(x) = 12$$

Extrempunkte:

$$f'(x) = 0$$

$$6x^2 - 6x - 12 = 0$$

$$6(x^2 - x - 2) = 0$$

$$(x + 1)(x - 2) = 0$$

$$x_1 = -1$$

$$x_2 = 2$$

$$f''(-1) = -18 < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{HoP}(-1, -11)$$

$$f''(2) = 18 > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{TiP}(2, -38)$$

Wendepunkte:

$$\begin{aligned}
 f''(x) &= 0 \\
 12x - 6 &= 0 \\
 x &= \frac{1}{2} \\
 f'''(\tfrac{1}{2}) &= 12 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{WeP}(\tfrac{1}{2}, -\tfrac{49}{2})
 \end{aligned}$$

Aufgabe 12.3

Ableitungen:

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \tfrac{1}{3}x^3 - x^2 + x + 1 \\
 f'(x) &= x^2 - 2x + 1 \\
 f''(x) &= 2x - 2 \\
 f'''(x) &= 2
 \end{aligned}$$

Extrempunkte:

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= 0 \\
 x^2 - 2x + 1 &= 0 \\
 (x - 1)^2 &= 0 \\
 x_1 = x_2 &= 1
 \end{aligned}$$

$$f''(1) = 0 \quad (x = 1 \text{ Terrassenstelle?} \Rightarrow \text{WP})$$

Wendepunkte:

$$\begin{aligned}
 f''(x) &= 0 \\
 2x - 2 &= 0 \\
 x &= 1
 \end{aligned}$$

$$f'''(1) = 2 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{TeP}(1, \tfrac{4}{3})$$

Aufgabe 12.4

Ableitungen:

$$\begin{aligned}
 f(x) &= x^4 + 4x^3 - 16x - 20 \\
 f'(x) &= 4x^3 + 12x^2 - 16 \\
 f''(x) &= 12x^2 + 24x \\
 f'''(x) &= 24x + 24
 \end{aligned}$$

Extrempunkte:

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= 0 \\
 4x^3 + 12x^2 - 16 &= 0 \\
 x^3 + 3x^2 - 4 &= 0 \\
 x_1 &= 1 \\
 x_2 = x_3 &= -2
 \end{aligned}$$

$x = 1$ kann erraten werden. Mit dem HornerSchema oder Polynomdivision erhält man

$$x^3 + 3x^2 - 4 = (x - 1)(x^2 + 4x + 4) = (x - 1)(x + 2)^2$$

und damit die zweite Lösung

$$f''(1) = 36 > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{TiP}(1, -31)$$

$$f''(-2) = 48 - 48 = 0 \dots$$

Wendepunkte:

$$f''(x) = 0$$

$$12x^2 + 24x = 0$$

$$12x(x + 2) = 0$$

$$x_1 = 0$$

$$x_2 = -2$$

$$f'''(0) = 24 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{WeP}(0, -20)$$

$$f'''(-2) = -4 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{TeP}(-2, -4)$$

Aufgabe 12.5

Ableitungen:

$$f(x) = x^5 + 15x^3$$

$$f'(x) = 5x^4 + 45x^2$$

$$f''(x) = 20x^3 + 90x$$

$$f'''(x) = 60x^2 + 90$$

Extrempunkte:

$$f'(x) = 0$$

$$5x^4 + 45x^2 = 0$$

$$5x^2(x^2 + 9) = 0$$

$$x = 0$$

$$f''(0) = 0 \dots$$

Wendepunkte:

$$f''(x) = 0$$

$$20x^3 + 90x = 0$$

$$10x(2x^2 + 9) = 0$$

$$x = 0$$

$$f'''(0) = 90 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{TeP}(0, 0)$$

Aufgabe 12.6

Ableitungen:

$$f(x) = \frac{2x^3 + 6x^2 - 8}{2x} = x^2 + 3x - \frac{4}{x}$$

$$f'(x) = 2x + 3 + \frac{4}{x^2}$$

$$f''(x) = 2 - \frac{8}{x^3}$$

$$f'''(x) = \frac{24}{x^4}$$

Extrempunkte:

$$f'(x) = 0$$

$$2x + 3 + \frac{4}{x^2} = 0$$

$$2x^3 + 3x^2 + 4 = 0$$

$$x_1 = -2$$

$x = -2$ kann durch systematisches Probieren gefunden werden (nichtnegative Lösungen kann man gleich ausschliessen):

x		3	0	4
-1	2	1	-1	5
-2	2	-1	2	0

somit: $2x^3 + 3x^2 + 4 = (x + 2)(2x^2 - x + 2)$

Der quadratische Faktor hat die Diskriminante $(-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = -15$ und liefert keine weiteren Lösungen.

$$f''(-2) = 2 - \frac{8}{-8} = 3 > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{TiP}(-2, 0)$$

Wendepunkte:

$$f''(x) = 0$$

$$2 - \frac{8}{x^3} = 0$$

$$2x^3 - 8 = 0$$

$$x^3 = 4$$

$$x = 4^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{4}$$

$$f'''(4^{\frac{1}{3}}) = \frac{24}{4^{\frac{1}{3}}} = 6 \cdot \frac{4^1}{4^{\frac{1}{3}}} = 6 \cdot 4^{\frac{2}{3}} \neq 0$$

$$f(4^{\frac{1}{3}}) = 4^{\frac{2}{3}} + 3 \cdot 4^{\frac{1}{3}} - \frac{4^1}{4^{\frac{1}{3}}} = 4^{\frac{2}{3}} + 3 \cdot 4^{\frac{1}{3}} - 4^{\frac{2}{3}} = 3 \cdot 4^{\frac{1}{3}}$$

$$\text{WeP}(\sqrt[3]{4}, 3\sqrt[3]{4})$$

Aufgabe 12.7

Ableitungen:

$$f(x) = \frac{x^2 - 5}{x - 3}$$

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{2x(x-3) - (x^2-5)}{(x-3)^2} = \dots = \frac{x^2-6x+5}{(x-3)^2} \\
f''(x) &= \frac{(2x-6)(x-3)^2 - (x^2-6x+5) \cdot 2(x-3)}{(x-3)^4} \\
&= \frac{(2x-6)(x-3) - 2(x^2-6x+5)}{(x-3)^3} \\
&= \frac{2x^2-12x+18-2x^2+12x-10}{(x-3)^3} \\
&= \frac{8}{(x-3)^3}
\end{aligned}$$

Extrempunkte:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= 0 \\
\frac{x^2-6x+5}{(x-3)^2} &= 0 \\
x^2-6x+5 &= 0 \quad (x \neq 3) \\
(x-1)(x-5) &= 0 \\
x_1 &= 1 \\
x_2 &= 5 \\
f''(1) &= \frac{8}{(1-3)^3} = \frac{8}{-8} = -1 < 0 \quad (x=1 \text{ ist Maximalstelle}) \\
f(1) &= \frac{1^2-5}{1-3} = \frac{-4}{-2} = 1 \quad \Rightarrow \quad \text{HoP}(1, 2) \\
f''(5) &= \frac{8}{(5-3)^3} = \frac{8}{8} = 1 > 0 \quad (x=5 \text{ ist Minimalstelle}) \\
f(5) &= \frac{5^2-5}{5-3} = \frac{20}{2} = 10 \quad \Rightarrow \quad \text{TiP}(5, 10)
\end{aligned}$$

Wendepunkte:

$$\begin{aligned}
f''(x) &= 0 \\
\frac{8}{(x-3)^3} &= 0 \\
8 &= 0 \quad (x \neq 3)
\end{aligned}$$

keine Lösung $\Rightarrow$ keine Wendepunkte

Aufgabe 12.8

Ableitungen:

$$f(x) = \frac{x-4}{(x-7)^2}$$

$$f'(x) = \frac{1 \cdot (x-7)^2 - (x-4) \cdot 2(x-7)}{(x-7)^4} = \dots = \frac{1-x}{(x-7)^3}$$

$$f''(x) = \frac{(-1)(x-7)^3 - (1-x) \cdot 3(x-7)^2}{(x-7)^6} = \dots = \frac{2x+4}{(x-7)^4}$$

$$f'''(x) = \frac{2(x-7)^4 - (2x+4) \cdot 4(x-7)^3}{(x-7)^8} = \dots = \frac{-6x-30}{(x-7)^5}$$

Extrempunkte:

$$f'(x) = 0$$

$$\frac{1-x}{(x-7)^2} = 0$$

$$1-x = 0 \quad (x \neq 7)$$

$$x = 1$$

$$f''(1) = \frac{2+4}{(1-7)^4} = \frac{6}{(-6)^4} = \frac{1}{6^3} > 0 \quad (x=1 \text{ ist Minimalstelle})$$

$$f(1) = \frac{1-4}{(1-7)^2} = \frac{-3}{6^2} = -\frac{1}{12} \quad \Rightarrow \quad \text{TiP}(1, -\frac{1}{12})$$

Wendepunkte:

$$f''(x) = 0$$

$$\frac{2x+4}{(x-7)^4} = 0$$

$$2x+4 = 0 \quad (x \neq 7)$$

$$x = -2$$

$$f'''(-2) = \frac{-6 \cdot (-2) - 30}{(-2-7)^5} = \frac{-18}{(-9)^5} = \frac{2}{9^4} \neq 0 \quad (x=-2 \text{ ist Wendestelle})$$

$$f(2) = \frac{-2-4}{(-2-7)^2} = \frac{-6}{(-9^2)} = -\frac{2}{27} \quad \Rightarrow \quad \text{WeP}(2, -\frac{2}{27})$$

Aufgabe 12.9

Ableitungen:

$$f(x) = x^2 + 8\sqrt{x} = x^2 + 8x^{\frac{1}{2}}$$

$$f'(x) = 2x + \frac{8}{2\sqrt{x}} = 2x + 4x^{-\frac{1}{2}}$$

$$f''(x) = 2 - 2x^{-\frac{3}{2}}$$

$$f'''(x) = 3x^{-\frac{5}{2}}$$

Extrempunkte:

$$f'(x) = 0$$

$$2x + \frac{4}{\sqrt{x}} = 0$$

$$x\sqrt{x} + 2 = 0$$

keine Lösung $\Rightarrow$ keine Extrempunkte

Wendepunkte:

$$f''(x) = 0$$

$$2 - 2x^{\frac{3}{2}} = 0$$

$$1 = x^{\frac{3}{2}}$$

$$x = 1$$

$$f'''(1) = 3 \cdot 1^{-\frac{5}{2}} = 3 \neq 0$$

$$f'(1) = 1^2 + 8\sqrt{1} = 9$$

WeP(1, 9)

Aufgabe 12.10

Ableitungen:

$$f(x) = xe^x$$

$$f'(x) = e^x + xe^x = (x+1)e^x$$

$$f''(x) = e^x + (x+1)e^x = (x+2)e^x$$

$$f'''(x) = e^x + (x+2)e^x = (x+3)e^x$$

Extrempunkte:

$$f'(x) = 0$$

$$(x+1)e^x = 0$$

$$x = -1$$

$$f''(-1) = (-1+2)e^{-1} = e^{-1} > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{TiP}(-1, -e^{-1})$$

Wendepunkte:

$$f''(x) = 0$$

$$(x+2)e^x = 0$$

$$x = -2$$

$$f'''(-2) = (-2+3)e^{-1} = e^{-1} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{WeP}(-2, -e^{-2})$$

Aufgabe 12.11

Ableitungen:

$$f(x) = (x^2 - 4x + 5)e^{-x}$$

$$f'(x) = (2x - 4)e^{-x} - (x^2 - 4x + 5)e^{-x} = (-x^2 + 6x - 9)e^{-x}$$

$$f''(x) = (-2x + 6)e^{-x} - (-x^2 + 6x - 9)e^{-x} = (x^2 - 8x + 15)e^{-x}$$

$$f'''(x) = (2x - 8)e^{-x} - (x^2 - 8x + 15)e^{-x} = (-x^2 + 10x - 23)e^{-x}$$

Extrempunkte:

$$f'(x) = 0$$

$$(-x^2 + 6x - 9)e^{-x} = 0$$

$$x^2 - 6x + 9 = 0$$

$$(x - 3) = 0$$

$$x = 3$$

$$f''(3) = (3^2 - 8 \cdot 3 + 15)e^{-3} = 0 \dots (\rightarrow \text{Wendepunkte})$$

Wendepunkte:

$$f'(x) = 0$$

$$(x^2 + 6x - 9)e^{-x} = 0$$

$$x^2 - 6x + 9 = 0$$

$$(x - 5)(x - 3)e^{-x} = 0$$

$$x_1 = 3$$

$$x_2 = 5$$

$$f'''(3) = (-3^2 + 10 \cdot 3 - 23)e^{-3} = -2e^{-3} \neq 0$$

$$f(3) = 2e^{-3} \Rightarrow \text{TeP}(3, 2e^{-3})$$

$$f'''(5) = (-5^2 + 10 \cdot 5 - 23)e^{-5} = 2e^{-5} \Rightarrow \text{WeP}(5, 10e^{-5})$$

Aufgabe 12.12

Ableitungen:

$$f(x) = x - \ln(x)$$

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x}$$

$$f''(x) = \frac{1}{x^2}$$

$$f'''(x) = -\frac{2}{x^3}$$

Extrempunkte:

$$f'(x) = 0$$

$$1 - \frac{1}{x} = 0$$

$$x = 1$$

$$f''(1) = \frac{1}{1^2} = 1 > 0 \Rightarrow \text{TiP}(1, 1)$$

Wendepunkte:

$$f''(x) = 0$$

$$\frac{1}{x^2} = 0$$

keine Lösung $\Rightarrow$ keine Wendepunkte

Aufgabe 12.13

Ableitungen:

$$f(x) = \frac{x}{\ln x}$$

$$f'(x) = \frac{1 \cdot \ln x - x \cdot 1/x}{\ln^2 x} = \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x} = \frac{1}{\ln x} - \frac{1}{\ln^2 x}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{\ln^2 x} \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{\ln^4 x} \cdot 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} = -\frac{1}{x \ln^2 x} + \frac{2}{x \ln^3 x}$$

$$\begin{aligned} f'''(x) &= \frac{1}{x^2 \ln^4 x} \left(1 \cdot \ln^2 x + x \cdot 2 \cdot \ln x \cdot \frac{1}{x} \right) - \frac{1}{x^2 \ln^6 x} \left(1 \cdot \ln^3 x + x \cdot 3 \cdot \ln^2 x \cdot \frac{1}{x} \right) \\ &= \frac{1}{x^2 \ln^2 x} + \frac{2}{x^2 \ln^3 x} - \frac{2}{x^2 \ln^3 x} - \frac{6}{x^2 \ln^4 x} \\ &= \frac{1}{x^2 \ln^2 x} - \frac{6}{x^2 \ln^4 x} \end{aligned}$$

Extrempunkte:

$$f'(x) = 0$$

$$\frac{\ln x - 1}{\ln^2 x} = 0$$

$$\ln x - 1 = 0$$

$$\ln x = 1$$

$$x = e$$

$$f''(e) = -\frac{1}{e} + \frac{2}{e} = \frac{1}{2e} > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{TiP}(e, e)$$

Wendepunkte:

$$f''(x) = 0$$

$$\frac{-\ln x + 2}{x \ln^3 x} = 0$$

$$-\ln x + 2 = 0$$

$$\ln x = 2$$

$$x = e^2$$

$$f'''(e^2) = \frac{1}{4e^2} - \frac{6}{16e^2} = \frac{2}{8e^2} - \frac{3}{8e^2} = -\frac{1}{8e^2} \neq 0$$

$$\Rightarrow \text{WeP}\left(e^2, \frac{1}{2}e^2\right)$$

Aufgabe 12.14

Ableitungen:

$$f(x) = \cos 3x + 1$$

$$f(x) = -3 \sin 3x$$

$$f''(x) = -9 \cos 3x$$

$$f'''(x) = 27 \sin 3x$$

Extrempunkte:

$$f'(x) = 0$$

$$-3 \sin 3x = 0$$

$$\sin 3x = 0$$

$$3x = k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$x_k = \frac{1}{3}k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$f''(x_k) = -9 \cos(k\pi) = \begin{cases} -9 & \text{wenn } k \text{ gerade (HoP)} \\ +9 & \text{wenn } k \text{ ungerade (TiP)} \end{cases}$$

$$f(x_k) = \cos(k\pi) + 1 = \begin{cases} 2 & \text{wenn } k \text{ gerade} \\ 0 & \text{wenn } k \text{ ungerade} \end{cases}$$

$$k \in \mathbb{Z} \text{ gerade: HoP}\left(\frac{1}{3}k\pi, 2\right)$$

$$k \in \mathbb{Z} \text{ ungerade: TiP}\left(\frac{1}{3}k\pi, 0\right)$$

Wendepunkte:

$$f''(x) = 0$$

$$-9 \cos(3x) = 0$$

$$\cos(3x) = 0$$

$$3x_k = \frac{1}{2}\pi + k\pi$$

$$x_k = \frac{1}{6}\pi + \frac{1}{3}k\pi$$

$$f'''(x_k) = 27 \sin\left(\frac{1}{2}\pi + k\pi\right) = \begin{cases} +1 & \text{wenn } k \text{ gerade} \\ -1 & \text{wenn } k \text{ ungerade} \end{cases}$$

$$f(x_k) = \cos\left(\frac{1}{2}\pi + k\pi\right) + 1 = 1 \quad \text{für alle } k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{WeP}\left(\frac{1}{6}\pi + \frac{1}{3}k\pi, 1\right)$$

Aufgabe 12.15

Ableitungen:

$$f(x) = x + \sin x$$

$$f'(x) = 1 + \cos x$$

$$f''(x) = -\sin x$$

$$f'''(x) = -\cos x$$

Extrempunkte:

$$f'(x) = 0$$

$$1 + \cos x = 0$$

$$\cos x = -1$$

$$x_k = (2k - 1)\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$f''(x_k) = -\sin((2k - 1)\pi) = 0 \quad k \in \mathbb{Z}$$

$\Rightarrow$ mögliche Terrassenstellen

Wendepunkte:

$$f''(x) = 0$$

$$-\sin(x) = 0$$

$$x_k = k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$f'''(x_k) = -\cos(k\pi) = \begin{cases} -1 & k \text{ gerade} \\ +1 & k \text{ ungerade} \end{cases}$$

$$f(x_k) = k\pi + \sin(k\pi) = k\pi$$

$$\text{TeP}(k\pi, k\pi) \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Aufgabe 13.1

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$$

- *Definitionsbereich:* $D = \mathbb{R}$

- *Symmetrie:* keine

(Monome mit geraden und ungerade Exponenten)

- *asymptotisches Verhalten:*

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$$

keine Asymptoten

- *Nullstellen:* $x^3 - 6x^2 + 9x - 4 = 0$

x		-6	9	-4
1	1	-5	4	0
1	1	-4	0	
4	1	0		

$$x_1 = x_2 = 1, x_3 = 4$$

- *Ordinatenabschnitt:* $f(0) = -4$

- *Ableitungen:*

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$$

$$f''(x) = 6x - 12$$

$$f'''(x) = 6$$

- *Extrempunkte:*

$$f'(x) = 0$$

$$3x^2 - 12x + 9 = 0$$

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$(x - 1)(x - 3) = 0$$

$$x_1 = 1$$

$$x_2 = 3$$

$$f''(1) = -6 < 0 \Rightarrow \text{HoP}(1, 0)$$

$$f''(3) = 6 > 0 \Rightarrow \text{TiP}(3, -4)$$

- *Wendepunkte:*

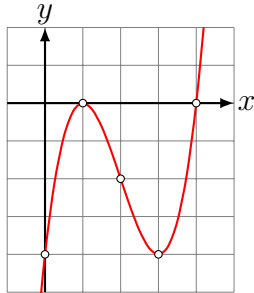
$$f''(x) = 0$$

$$6x - 12 = 0$$

$$x = 2$$

$$f'''(2) = -2 \neq 0 \Rightarrow \text{WeP}(2, -2)$$

- *Graph:* (1 Häuschen = 1 Einheit)



Aufgabe 13.2

$$f(x) = x^4 - 6x^2 + 8x - 3$$

- *Definitionsbereich:* $D = \mathbb{R}$

- *Symmetrie:* keine

(Monome mit geraden und ungerade Exponenten)

- *asymptotisches Verhalten:*

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^4 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^4 = +\infty$$

keine Asymptoten

- *Nullstellen:* $x^4 - 6x^2 + 8x - 3 = 0$

x		0	-6	8	-3
1	1	1	-5	3	0
1	1	2	-3	0	
1	1	3	0		
-3	1	0			

$$x_1 = x_2 = x_3 = 1, x_4 = 3$$

- *Ordinatenabschnitt:* $f(0) = -3$

- *Ableitungen:*

$$f'(x) = 4x^3 - 12x + 8$$

$$f''(x) = 12x^2 - 12$$

$$f'''(x) = 24x$$

- *Extrempunkte:*

$$f'(x) = 0$$

$$4x^3 - 12x + 8 = 0$$

$$x^3 - 3x + 2 = 0$$

x		0	-3	2
1	1	1	-2	0
1	1	2	0	
-2	1	0		

$$f''(1) = 0 \Rightarrow \text{TeP?}$$

$$f''(-2) = 12 \cdot 4 - 12 = 36 > 0 \Rightarrow \text{TiP}(-2, -27)$$

- *Wendepunkte:*

$$f''(x) = 0$$

$$12x^2 - 12 = 0$$

$$x^2 - 1 = 0$$

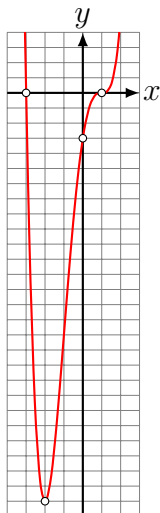
$$x_1 = 1$$

$$x_2 = -1$$

$$f'''(1) = 24 \neq 0 \Rightarrow \text{TeP}(1, 0)$$

$$f'''(-1) = -24 \neq 0 \Rightarrow \text{WeP}(-1, -16)$$

- *Graph:* (1 Häuschen = 1 Einheit)



Aufgabe 13.3

$$f(x) = \frac{x^2 + 3x}{x + 4}$$

- *Definitionsbereich:* $D = \mathbb{R} \setminus \{-4\}$

- *Symmetrie:* keine

(Monome mit geraden und ungerade Exponenten)

- *asymptotisches Verhalten:*

vertikale Asymptote: $x = -4$ (mit Vorzeichenwechsel)

$$\text{Polynomdivision: } (x^2 + 3x) : (x + 4) = x - 1 + \frac{4}{x + 4}$$

$$\text{Asymptote: } g(x) = x - 1$$

- *Nullstellen:* $x^2 + 3x = 0$

$$x(x + 3) = 0$$

$$x_1 = 0$$

$$x_2 = -3$$

- *Ordinatenabschnitt:* $f(0) = \frac{0}{0 + 4} = 0$

- *Ableitungen:*

$$f'(x) = \frac{(2x + 3)(x + 4) - (x^2 + 3x)}{(x + 4)^2}$$

$$= \frac{2x^2 + 11x + 12 - x^2 - 3x}{(x + 4)^2} = \frac{x^2 + 8x + 12}{(x + 4)^2}$$

$$f''(x) = \frac{(2x + 8)(x + 4)^2 - (x^2 + 8x + 12) \cdot 2(x + 4)}{(x + 4)^4}$$

$$= \frac{(2x + 8)(x + 4) - 2(x^2 + 8x + 12)}{(x + 4)^3}$$

$$= \frac{2x^2 + 16x + 32 - 2x^2 - 16x - 24}{(x + 4)^3} = \frac{8}{(x + 4)^3}$$

Da die 2. Ableitung offensichtlich keine Nullstellen hat, wird das Berechnen der 3. Ableitung obsolet.

- *Extrempunkte:*

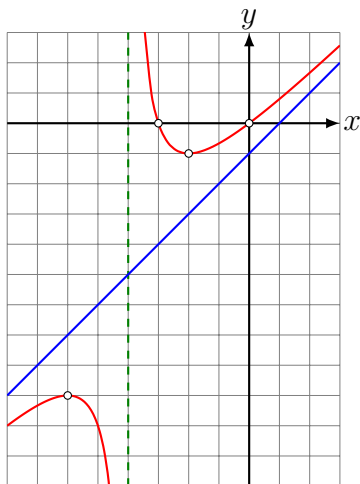
$$\begin{aligned}
 f'(x) &= 0 \\
 \frac{x^2 + 8x + 12}{(x+4)^2} &= 0 \\
 x^2 + 8x + 12 &= 0 \quad (x \neq -4) \\
 (x+2)(x+6) &= 0 \\
 x_1 &= -2 \\
 x_2 &= -6 \\
 f''(-2) &= 1 > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{TiP}(-2, -1) \\
 f''(-6) &= -1 < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{HoP}(-6, -9)
 \end{aligned}$$

- *Wendepunkte:*

$$\begin{aligned}
 f''(x) &= 0 \\
 \frac{8}{(x+4)^3} &= 0 \\
 8 &= 0
 \end{aligned}$$

keine Lösung; also keine Wendepunkte

- *Graph:* (1 Häuschen = 1 Einheit)



Aufgabe 13.4

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{(x-4)^2}$$

- *Definitionsbereich:* $D = \mathbb{R} \setminus \{-4\}$
- *Symmetrie:* keine
(Monome mit geraden und ungerade Exponenten)

- *asymptotisches Verhalten:*

vertikale Asymptote: $x = 4$ (ohne Vorzeichenwechsel)

Polynomdivision: $(x^2 + x - 2) : (x^2 - 8x + 16) = 1 - \frac{7x + 18}{x^2 - 8x + 16}$

horizontale Asymptote: $g(x) = 1$

- *Nullstellen:* $x^2 + x - 2 = 0$
 $(x - 1)(x + 2) = 0$
 $x_1 = 1$
 $x_2 = -2$

- *Ordinatenabschnitt:* $f(0) = \frac{-2}{16} = -\frac{1}{8}$

- *Ableitungen:*

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(2x + 1)(x - 4)^2 - (x^2 + x - 2) \cdot 2(x - 4)}{(x - 4)^4} \\ &= \frac{(2x + 1)(x - 4) - 2(x^2 + x - 2)}{(x - 4)^3} \\ &= \frac{2x^2 - 7x - 4 - 2x^2 - 2x + 4}{(x - 4)^3} = \frac{-9x}{(x - 4)^3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{-9(x - 4)^3 - (-9x) \cdot 3(x - 4)^2}{(x - 4)^6} \\ &= \frac{-9(x - 4) + 9x \cdot 3}{(x - 4)^4} = \frac{18x + 36}{(x - 4)^4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'''(x) &= \frac{18(x - 4)^4 - (18x + 36) \cdot 4(x - 4)^3}{(x - 4)^8} \\ &= \frac{18(x - 4) - 4(18x + 36)}{(x - 4)^5} = \frac{-54x - 216}{(x - 4)^5} \end{aligned}$$

- *Extrempunkte:*

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ \frac{-9x}{(x - 4)^2} &= 0 \\ -9x &= 0 \quad (x \neq 4) \\ x &= 0 \end{aligned}$$

$$f''(0) = \frac{36}{(-4)^4} > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{TiP}(0, -1/8)$$

$$f''(-6) = -1 < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{HoP}(-6, -9)$$

- *Wendepunkte:*

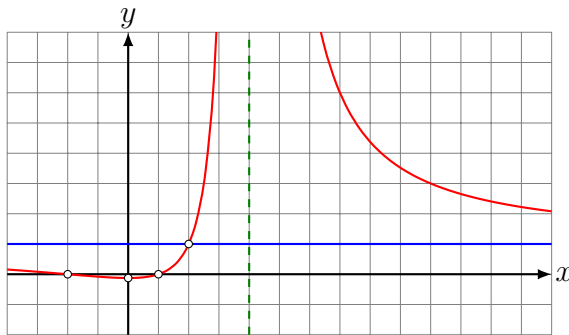
$$f''(x) = 0$$

$$\frac{18x + 36}{(x - 4)^4} = 0$$

$$x = -2$$

$$f'''(-2) = 1/72 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{WeP}(-2, 0)$$

- *Graph:* (1 Häuschen = 1 Einheit)



Aufgabe 13.5

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{(x - 4)^2}$$

- *Definitionsbereich:* $D = \mathbb{R} \setminus \{-4\}$

- *Symmetrie:* keine

(Monome mit geraden und ungerade Exponenten)

- *asymptotisches Verhalten:*

vertikale Asymptote: $x = 4$ (ohne Vorzeichenwechsel)

$$\text{Polynomdivision: } (x^2 + x - 2) : (x^2 - 8x + 16) = 1 - \frac{7x + 18}{x^2 - 8x + 16}$$

horizontale Asymptote: $g(x) = 1$

- *Nullstellen:* $x^2 + x - 2 = 0$

$$(x - 1)(x + 2) = 0$$

$$x_1 = 1$$

$$x_2 = -2$$

- *Ordinatenabschnitt:* $f(0) = \frac{-2}{16} = -\frac{1}{8}$

- *Ableitungen:*

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \frac{(2x+1)(x-4)^2 - (x^2+x-2) \cdot 2(x-4)}{(x-4)^4} \\
 &= \frac{(2x+1)(x-4) - 2(x^2+x-2)}{(x-4)^3} \\
 &= \frac{2x^2 - 7x - 4 - 2x^2 - 2x + 4}{(x-4)^3} = \frac{-9x}{(x-4)^3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f''(x) &= \frac{-9(x-4)^3 - (-9x) \cdot 3(x-4)^2}{(x-4)^6} \\
 &= \frac{-9(x-4) + 9x \cdot 3}{(x-4)^4} = \frac{18x + 36}{(x-4)^4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f'''(x) &= \frac{18(x-4)^4 - (18x+36) \cdot 4(x-4)^3}{(x-4)^8} \\
 &= \frac{18(x-4) - 4(18x+36)}{(x-4)^5} = \frac{-54x - 216}{(x-4)^5}
 \end{aligned}$$

- *Extrempunkte:*

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= 0 \\
 \frac{-9x}{(x-4)^2} &= 0 \\
 -9x &= 0 \quad (x \neq 4) \\
 x &= 0
 \end{aligned}$$

$$f''(0) = \frac{36}{(-4)^4} > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{TiP}(0, -1/8)$$

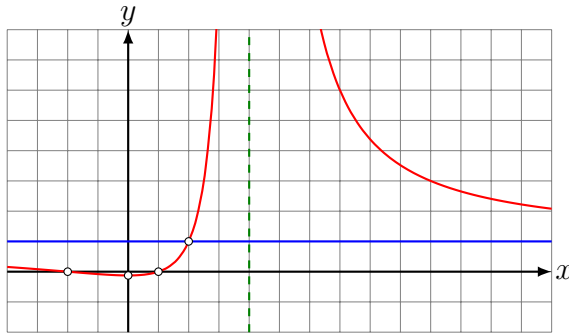
$$f''(-6) = -1 < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{HoP}(-6, -9)$$

- *Wendepunkte:*

$$\begin{aligned}
 f''(x) &= 0 \\
 \frac{18x+36}{(x-4)^4} &= 0 \\
 x &= -2
 \end{aligned}$$

$$f'''(-2) = 1/72 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{WeP}(-2, 0)$$

- *Graph:* (1 Häuschen = 1 Einheit)



Aufgabe 13.6

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{(x - 4)^2}$$

- *Definitionsbereich:* $D = \mathbb{R} \setminus \{-4\}$

- *Symmetrie:* keine

(Monome mit geraden und ungerade Exponenten)

- *asymptotisches Verhalten:*

vertikale Asymptote: $x = 4$ (ohne Vorzeichenwechsel)

$$\text{Polynomdivision: } (x^2 + x - 2) : (x^2 - 8x + 16) = 1 - \frac{7x + 18}{x^2 - 8x + 16}$$

horizontale Asymptote: $g(x) = 1$

- *Nullstellen:* $x^2 + x - 2 = 0$

$$(x - 1)(x + 2) = 0$$

$$x_1 = 1$$

$$x_2 = -2$$

- *Ordinatenabschnitt:* $f(0) = \frac{-2}{16} = -\frac{1}{8}$

- *Ableitungen:*

$$f'(x) = \frac{(2x + 1)(x - 4)^2 - (x^2 + x - 2) \cdot 2(x - 4)}{(x - 4)^4}$$

$$= \frac{(2x + 1)(x - 4) - 2(x^2 + x - 2)}{(x - 4)^3}$$

$$= \frac{2x^2 - 7x - 4 - 2x^2 - 2x + 4}{(x - 4)^3} = \frac{-9x}{(x - 4)^3}$$

$$f''(x) = \frac{-9(x - 4)^3 - (-9x) \cdot 3(x - 4)^2}{(x - 4)^6}$$

$$= \frac{-9(x - 4) + 9x \cdot 3}{(x - 4)^4} = \frac{18x + 36}{(x - 4)^4}$$

$$f'''(x) = \frac{18(x-4)^4 - (18x+36) \cdot 4(x-4)^3}{(x-4)^8}$$

$$= \frac{18(x-4) - 4(18x+36)}{(x-4)^5} = \frac{-54x-216}{(x-4)^5}$$

- *Extrempunkte:*

$$f'(x) = 0$$

$$\frac{-9x}{(x-4)^2} = 0$$

$$-9x = 0 \quad (x \neq 4)$$

$$x = 0$$

$$f''(0) = \frac{36}{(-4)^4} > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{TiP}(0, -1/8)$$

$$f''(-6) = -1 < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{HoP}(-6, -9)$$

- *Wendepunkte:*

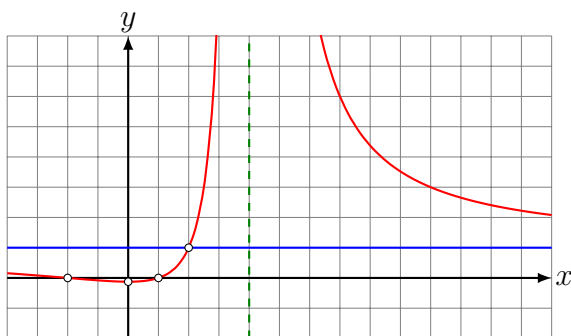
$$f''(x) = 0$$

$$\frac{18x+36}{(x-4)^4} = 0$$

$$x = -2$$

$$f'''(-2) = 1/72 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{WeP}(-2, 0)$$

- *Graph:* (1 Häuschen = 1 Einheit)



Aufgabe 14.1

Ansatz: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

$$f''(x) = 6ax + 2b$$

$$f(2) = 1 \Rightarrow 8a + 4b + 2c + d \stackrel{(1)}{=} 1$$

$$f'(2) = 0 \Rightarrow 12a + 4b + c \stackrel{(2)}{=} 0$$

$$f''(2) = 0 \Rightarrow 12a + 2b \stackrel{(3)}{=} 0$$

$$f(4) = 0 \Rightarrow 64a + 16b + 4c + d \stackrel{(4)}{=} 0$$

Löse (4) nach d auf: $d \stackrel{(5)}{=} -64a - 16b - 4c$

Setze d in (1) ein und vereinfache: $-56a - 12b - 2c \stackrel{(6)}{=} 1$

Lösung von (2) (3) und (6): $a = -\frac{1}{8}$, $b = \frac{3}{4}$, $c = -\frac{3}{2}$,

Setze a , b , c in (5) ein: $d = 2$

$$f(x) = -\frac{1}{8}x^3 + \frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{2}x + 2$$

Aufgabe 14.2

Ansatz: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

$$f''(x) = 6ax + 2b$$

$$f(-2) = 0 \Rightarrow -8a + 4b - 2c + d = 0$$

$$f''(0) = 0 \Rightarrow 2b = 0 \Rightarrow b = 0$$

$$f'(0) = \frac{1}{3} \Rightarrow c = \frac{1}{3}$$

$$f(0) = g(0) \Rightarrow d = 2$$

Lösung: $f(x) = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{3}x + 2$

Aufgabe 14.3

Ansatz: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

$$f(2) = 0 \Rightarrow 8a + 4b + 2c + d = 0$$

$$f'(2) = 0 \Rightarrow 12a + 4b + c = 0$$

$$f(-2) = 0 \Rightarrow -8a + 4b - 2c + d = 0$$

$$f'(-2) = 1 \Rightarrow 12a - 4b + c = 1$$

Lösung: $f(x) = \frac{1}{16}x^3 - \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}$

Aufgabe 14.4

Ansatz: $f(x) = ax^3 + bx$ Symmetrie berücksichtigen!

$$f'(x) = 3ax^2 + b$$

$$f(-2) = -4 \Rightarrow -8a - 2b = -4$$

$$f'(-2) = 0 \Rightarrow 12a + b = 0$$

$$\text{Lösung: } f(x) = -\frac{1}{4}x^3 + 3x$$

Aufgabe 14.5

Ansatz: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

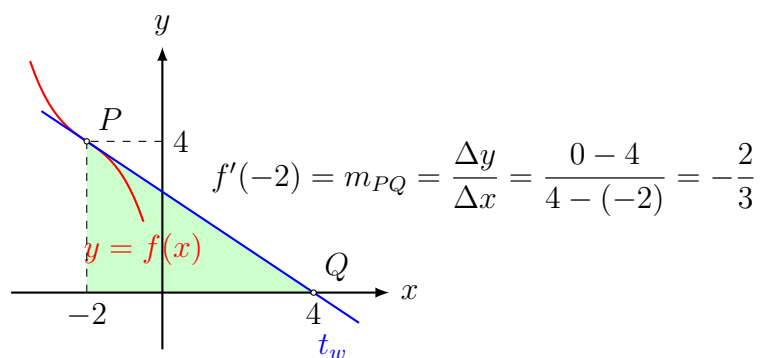
$$f''(x) = 6ax + 2b$$

$$f(0) = 0 \Rightarrow d = 0$$

$$f(-2) = 4 \Rightarrow -8a + 4b - 2c + d = 4$$

$$f''(-2) = 0 \Rightarrow -12a + 2b = 0$$

$$f'(-2) = -\frac{2}{3} \Rightarrow 12a - 4b + c = -\frac{2}{3}$$



$$\text{Lösung: } f(x) = -\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 - \frac{14}{3}x$$

Aufgabe 14.6

Ansatz: $f(x) = ax^3 + bx$ Symmetrie berücksichtigen!

$$f'(x) = 3ax^2 + b$$

$$f''(x) = 6ax$$

$$f'(0) = -\frac{9}{16} \Rightarrow b = -\frac{9}{16}$$

$$f\left(\frac{5}{4}\right) = \frac{5}{4} \Rightarrow \frac{125}{64}a + \frac{5}{4}b = \frac{5}{4}$$

$$\text{Lösung: } f(x) = x^3 - \frac{9}{16}x$$

Aufgabe 14.7

Ansatz: $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ (Symmetrie berücksichtigen!)

$$f'(x) = 4ax^3 + 2bx$$

$$f''(x) = 12ax^2 + 2b$$

$$f(2) = 0 \quad \Rightarrow \quad 16a + 4b + c = 0$$

$$f''(2) = 0 \quad \Rightarrow \quad 48a + 2b = 0$$

$$f'(2) = -\frac{4}{3} \quad \Rightarrow \quad 32a + 4b = -\frac{4}{3}$$

$$\text{Lösung: } f(x) = \frac{1}{48}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{3}$$

Aufgabe 14.8

Ansatz: $f''(x) = 6x$

$$f'(x) = 3x^2 + a$$

$$f(x) = x^3 + ax + b$$

$$f(1) = 0 \quad \Rightarrow \quad 1 + a + b = 0$$

$$f'(1) = 0 \quad \Rightarrow \quad 3 + a = 0$$

$$\text{Lösung: } f(x) = x^3 - 3x + 2$$

Aufgabe 15.1

Zielfunktion (ZF): $S(x, y) = x^2 + y^2$

Nebenbedingung (NB): $x + y = 36 \Leftrightarrow y = 36 - x$

NB in ZF einsetzen: $S(x) = x^2 + (36 - x)^2$

Extrema:

$$S'(x) = 0$$

$$2x + 2(36 - x) \cdot (-1) = 0$$

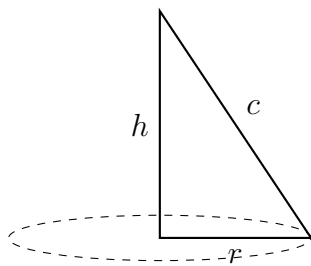
$$4x - 72 = 0$$

$$x = 18$$

$$S''(x) = 4 > 0 \text{ (Minimum)}$$

Lösung: Die Zahlen sind 18 und 18

Aufgabe 15.2



Zielfunktion: $V(r, h) = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

Nebenbedingung: $r^2 + h^2 = 64 \Leftrightarrow r^2 = 64 - h^2$

NB in ZF einsetzen: $V(h) = \frac{1}{3}\pi(64 - h^2)h = \frac{1}{3}\pi(64h - h^3)$

Extrema:

$$V'(h) = \frac{1}{3}\pi(64 - 3h^2)$$

$$V''(h) = -2\pi h$$

$$V'(h) = 0$$

$$64 - 3h^2 = 0$$

$$h = \sqrt{\frac{64}{3}}$$

Test: $V''\left(\sqrt{\frac{64}{3}}\right) = -2\pi\sqrt{\frac{64}{3}} < 0$ (Maximum)

Lösung: $r^2 = 64 - \frac{64}{3} = \frac{128}{3}$

Das rechtwinklige Dreieck mit den Katheten $h = \sqrt{\frac{64}{3}}$ cm und $r = \sqrt{\frac{128}{3}}$ cm

Aufgabe 15.3

Zielfunktion:

$$A(x, y) = \frac{1}{2}(2 + x) \cdot y$$

Nebenbedingung:

$$y = 2 - \frac{1}{2}x^2$$

Nebenbedingung in Zielfunktion einsetzen:

$$A(x) = \frac{1}{2}(2 + x)\left(2 - \frac{1}{2}x^2\right) = -\frac{1}{4}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x + 2$$

$$\text{Extrema: } A'(x) = 0$$

$$-\frac{3}{4}x^2 - x + 1 = 0$$

$$3x^2 + 4x - 4 = 0$$

$$x_1 = \frac{2}{3}$$

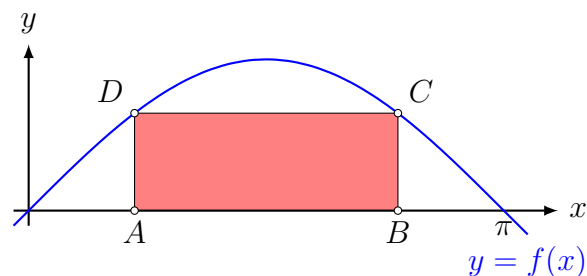
$$x_2 = -2 \quad (\text{sinnlos})$$

$$A''(x) = -\frac{3}{2}x - 1$$

$$A''\left(\frac{2}{3}\right) = -\frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} - 1 = -2 \quad (\text{Maximum})$$

$$\text{Lösung: } P\left(\frac{2}{3}, \frac{16}{9}\right)$$

Aufgabe 15.4



Zielfunktion:

$$A(l, b) = l \cdot b$$

Nebenbedingungen:

$$l = \pi - 2x$$

$$h = \sin(x)$$

Nebenbedingung in Zielfunktion einsetzen:

$$A(x) = (\pi - 2x) \sin(x) = \pi \sin(x) - 2x \sin(x)$$

Extrema:

$$A'(x) = (-2) \sin(x) + (\pi - 2x) \cos(x) = 0$$

Die Gleichung $-2 \sin(x) + (\pi - 2x) \cos(x) = 0$ ist *transzendent*, da sowohl trigonometrische Funktionen als auch der Faktor x in ihr auftreten. Normalerweise sind solche Gleichungen

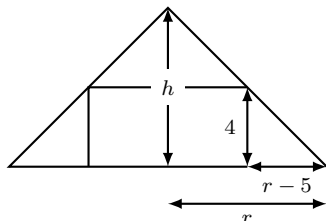
nicht algebraisch lösbar.

Mit einem geeigneten Taschenrechner bestimmt man entweder das Maximum von $A(x)$ oder die Nullstelle von $A'(x)$ im angegebenen Intervall und erhält $x_{\max} = 0.710$.

Lösung: Für $u = 0.710$ erhält man einen Flächeninhalt von 1.122 FE

Aufgabe 15.5

Achsenquerschnitt von Zylinder und Kegel:



r und h bezeichnen Radius und Höhe des Kegels.

Zielfunktion:

$$V(r, h) = \frac{\pi r^2 h}{3}$$

Nebenbedingung:

$$h : r = 4 : (r - 5) \quad (1. \text{ Strahlensatz})$$

$$h(r - 5) = 4r$$

$$h = \frac{4r}{r - 5} \quad (r > 5)$$

Nebenbedingung in Zielfunktion einsetzen:

$$V(r) = \frac{4\pi r^3}{3(r - 5)}$$

Extrema:

$$\begin{aligned} V'(r) &= \frac{12\pi r^2 \cdot 3(r - 5) - 4\pi r^3 \cdot 3}{9(r - 5)^2} \\ &= \frac{36\pi r^3 - 180\pi r^2 - 12\pi r^3}{9(r - 5)^2} = \frac{24\pi r^3 - 180\pi r^2}{9(r - 5)^2} \end{aligned}$$

$$V'(r) = 0$$

$$24\pi r^3 - 180\pi r^2 = 0$$

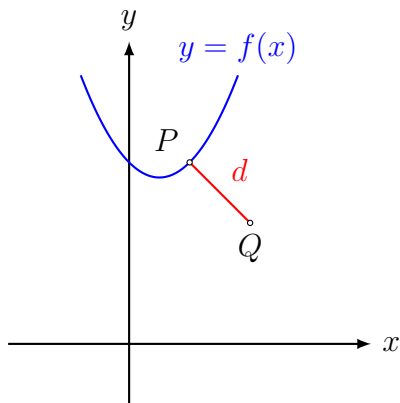
$$12\pi r^2(2r - 15) = 0$$

$$r_1 = 0 \quad (\text{verletzt } r > 5)$$

$$r_2 = 7.5 \quad (\text{Maximum})$$

Antwort: Der Kegel hat den Radius $r = 7.5$ und die Höhe $h = 12$.

Aufgabe 15.6



Zielfunktion: $d(x, y) = \sqrt{(x-2)^2 + (y-2)^2}$

$$D(x, y) = d^2(x, y) = (x-2)^2 + (y-2)^2$$

Nebenbedingung:

$$y = x^2 - x + 3$$

Nebenbedingung in Zielfunktion einsetzen:

$$\begin{aligned} D(x) &= (x-2)^2 + (x^2 - x + 1)^2 = \dots \\ &= x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 6x + 5 \end{aligned}$$

Extrema:

$$D'(x) = 4x^3 - 6x^2 + 8x - 6 = 0$$

$$D''(x) = 12x^2 - 12x + 8$$

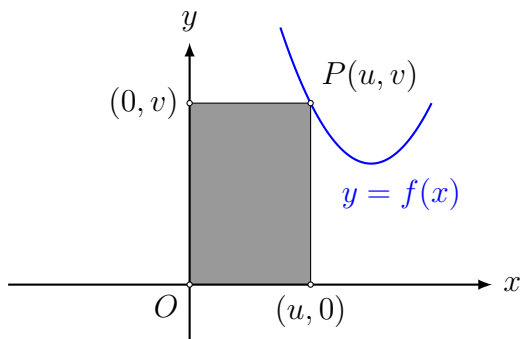
$$D'(x) = 0$$

$$x = 1 \quad (x_2 \text{ und } x_3 \text{ sind komplex})$$

$$\text{Test: } D''(1) = 8 > 0 \text{ (Minimum)}$$

Lösung: $P(1, 3)$

Aufgabe 15.7



Zielfunktion:

$$A(x, y) = x \cdot y$$

Nebenbedingung:

$$y = x^2 - 8x + 21$$

Nebenbedingung in Zielfunktion einsetzen:

$$A(x) = x(x^2 - 8x + 21) = x^3 - 8x^2 + 21x$$

Extrema:

$$A'(x) = 3x^2 - 16x + 21 = 0$$

$$A''(x) = 6x - 16$$

$$x_1 = 3, x_2 = \frac{7}{3}$$

$$A''(3) = 2 > 0 \text{ (} x_1 \text{ ist lokales Minimum)}$$

$$A''(\frac{7}{3}) = -2 < 0 \text{ (} x_2 \text{ ist lokales Maximum)}$$

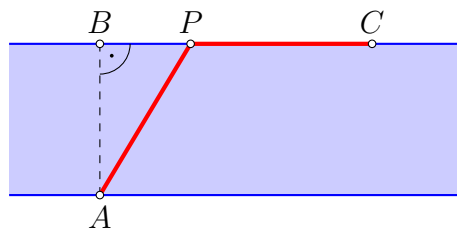
$$A(\frac{7}{3}) \approx 18.15$$

$$\text{Werte an den Rändern: } A(0) = 0$$

$$A(4) = 20$$

Lösung: Das Maximum wird im Randpunkt $P(4, 5)$ angenommen.

Aufgabe 15.8



$$\overline{AB} = 500 \text{ m}$$

$$\overline{BC} = 1000 \text{ m}$$

$$\bar{v} = \frac{s}{t} \quad \Leftrightarrow \quad t = \frac{s}{\bar{v}}$$

Zielfunktion:

$$T(s_1, s_2) = \frac{s_1}{\bar{v}_1} + \frac{s_2}{\bar{v}_2}$$

Nebenbedingungen:

$$s_1 = \sqrt{500^2 + x^2}$$

$$s_2 = 1000 - x$$

Nebenbedingungen in Zielfunktion einsetzen:

$$T(x) = \frac{\sqrt{500^2 + x^2}}{50} + \frac{1000 - x}{300} \quad ([t] = \text{Minuten})$$

Extrema:

$$T'(x) = \frac{1 \cdot 2x}{50 \cdot 2\sqrt{500^2 + x^2}} - \frac{1}{300} = \frac{x}{50\sqrt{500^2 + x^2}} - \frac{1}{300}$$

$$\frac{x}{50\sqrt{500^2 + x^2}} - \frac{1}{300} = 0 \quad || \cdot 300\sqrt{500^2 + x^2}$$

$$6x - \sqrt{500^2 + x^2} = 0$$

$$6x = \sqrt{500^2 + x^2}$$

$$36x^2 = 500^2 + x^2$$

$$35x^2 = 500^2$$

$$x = 500/\sqrt{35} \approx 84.51 \text{ m}$$

Lösung:

Dauer: $T(84.51) \approx 13.2 \text{ min}$

Streckenlänge:

$$s(84.51) = \sqrt{500^2 + 84.51^2} + (1000 - 84.51) \approx 1422.5 \text{ m}$$

Aufgabe 16.1

Für welche Werte des Parameters t geht der Graph von $y = f_t(x) = x^3 + tx^2 + t - 1$ durch den Punkt $P(-2, 1)$?

$$1 = -8 + 4t + t - 1$$

$$10 = 5t$$

$$t = 2$$

Aufgabe 16.2

Gegeben: $f_t(x) = tx^3 - x^2 + t$ mit $t \in \mathbb{R}$.

Gesucht: t , so dass $f'_t(2) = 4$

$$f_t(x) = tx^3 - x^2 + t$$

$$f'_t(x) = 3tx^2 - 2x$$

$$f'_t(2) = 4$$

$$3t \cdot 2^2 - 2 \cdot 2 = 4$$

$$12t = 8$$

$$t = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$$

Aufgabe 16.3

Welche Punkte liegen auf allen Graphen von $f_t(x) = x^3 + tx - 2t$ mit $t \in \mathbb{R}$?

$$f_s(x) = f_t(x) \quad [s \neq t]$$

$$x^3 + sx - 2s = x^3 + tx - 2t$$

$$sx - 2s = tx - 2t$$

$$sx - tx - 2s + 2t = 0$$

$$x(s - t) - 2(s - t) = 0$$

$$(s - t)(x - 2) = 0$$

$$x = 2$$

Zur Bestimmung der y -Koordinate muss die x -Koordinate in die Funktionsgleichung eingesetzt werden:

$$f_t(2) = 2^3 + t \cdot 2 - 2 \cdot t = 8 + 2t - 2t = 8$$

Alle Kurven der Schar gehen durch den Punkt $P(2, 8)$.

Aufgabe 16.4

Bestimme allgemein die Nullstellen der Funktionenschar $f_t(x) = x^2 - tx - 2t^2$.

Verwende die Lösungsformel für die quadratische Gleichung.

Das Polynom auf der linken Seite der Gleichung $x^2 - tx - 2t^2 = 0$ hat die Koeffizienten $a = 1$, $b = -t$ und $c = -2t^2$.

Diskriminante: $D = b^2 - 4ac = t^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2t^2) = 9t^2$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{t + 3t}{2} = 2t$$
$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{t - 3t}{2} = -t$$

Aufgabe 16.5

Die quadratische Gleichung $x^2 + tx + 1 = 0$ hat genau dann eine Lösung, wenn $D = b^2 - 4ac = 0$ gilt.

Koeffizienten: $a = 1$, $b = t$ und $c = 1$.

$$b^2 - 4ac = 0$$
$$t^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 0$$
$$t^2 - 4 = 0$$
$$t_1 = -2$$
$$t_2 = 2$$

Die Funktionenschar hat für $t = -2$ oder $t = 2$ genau eine Nullstelle.

Aufgabe 16.6

Die quadratische Gleichung $x^2 + 2x + t = 0$ mit den Koeffizienten $a = 1$, $b = 2$, $c = t$ hat genau dann zwei Lösungen, wenn $D = b^2 - 4ac > 0$ gilt.

$$b^2 - 4ac > 0$$
$$4 - 4t > 0$$
$$4 > 4t$$
$$1 > t$$

Die Funktionenschar hat für $t < 1$ genau zwei Nullstellen.

Aufgabe 16.7

Ansatz und Ableitungen: $f_t(x) = tx^3 - 3tx$

$$f'_t(x) = 3tx^2 - 3t$$

$$f''_t(x) = 6tx$$

Kandidaten: $f'_t(x) = 0$

$$3tx^2 - 3t = 0$$

$$3t(x^2 - 1) = 0$$

$$x^2 - 1 = 0$$

$$x_1 = -1$$

$$x_2 = 1$$

Die Extremstellen sind offenbar unabhängig von t .

Test: $f''_t(x) = 6tx$

$f''_t(-1) = -6t < 0$, da $t > 0$ vorausgesetzt wurde

$f''_t(1) = 6t > 0$, da $t > 0$ vorausgesetzt wurde

y -Koordinaten:

$$y_1 = f_t(-1) = t(-1)^3 - 3t(-1) = -t + 3t = 2t$$

$$y_2 = f_t(1) = t \cdot 1^3 - 3t = -2t$$

$$\Rightarrow \text{HoP}(-1, 2t), \text{TiP}(1, -2t)$$

Aufgabe 16.8

Ableitungen:

$$f_a(x) = ax^2 - x^3$$

$$f'_a(x) = 2ax - 3x^2$$

$$f''_a(x) = 2a - 6x$$

$$f'''_a(x) = -6$$

Wendepunkt-Kandidaten: $f''_a(x) = 0$

$$2a - 6x = 0$$

$$2(a - 3x) = 0$$

$$x = \frac{1}{3}a$$

Test: $f'''_a\left(\frac{1}{3}a\right) = -6 \neq 0 \Rightarrow x = \frac{1}{3}a$ ist Wendestelle

$$y = f_a\left(\frac{1}{3}a\right) = a \cdot \left(\frac{1}{3}a\right)^2 - \left(\frac{1}{3}a\right)^3 = \frac{1}{9}a^3 - \frac{1}{27}a^3 = \frac{2}{27}a^3 \Rightarrow \text{WeP} \left(\frac{1}{3}a \mid \frac{2}{27}a^3 \right)$$

$$x = \frac{1}{3}a \Rightarrow a = 3 (*)$$

$$y = \frac{2}{27}a^3 \stackrel{(*)}{=} \frac{2}{27}(3a)^3 = \frac{2}{27} \cdot 27a^3 = 2a^3$$

Die Wendepunkte liegen auf der Kurve mit der Gleichung $y = 2a^3$

Aufgabe 16.9

$$f_t(x) = tx - x^2$$

$$f'_t(x) = t - 2x$$

$$f''_t(x) = -2$$

$$\text{Kandidaten: } f'_t(x) = 0$$

$$t - 2x = 0$$

$$x = \frac{t}{2}$$

Test:

$$f''_t\left(\frac{t}{2}\right) = -2 < 0$$

$x = \frac{t}{2}$ ist in der Tat eine Hochstelle.

Hochpunkt:

$$y = f_t\left(\frac{t}{2}\right) = t \cdot \frac{t}{2} - \left(\frac{t}{2}\right)^2 = \frac{t^2}{2} - \frac{t^2}{4} = \frac{t^2}{4}$$

$$\Rightarrow \text{HoP}\left(\frac{t}{2}, \frac{t^2}{4}\right)$$

$P(x, y)$ liegt auf der 1. Winkelhalbierenden, wenn $x = y$ gilt.

$$x = y$$

$$\frac{t}{2} = \frac{t^2}{4} \quad || \cdot 4$$

$$2t = t^2$$

$$2t - t^2 = 0$$

$$t(2 - t) = 0$$

$$t_1 = 0 \quad (\text{entfällt wegen } t > 0)$$

$$t_2 = 2$$

Aufgabe 16.10

$$f_t: y = \frac{4}{3}tx^3 - 4tx + 1 \quad (t > 0)$$

$$(a) \quad f_t(2) = 9$$

$$\frac{32}{3}t - 8t = 8$$

$$\frac{4}{3}t - t = 1$$

$$\frac{1}{3}t = 1$$

$$t = 3$$

$$(b) \quad f'_t(x) = 4tx^2 + 4t$$

$$f''_t(x) = 8tx$$

$$f'_t(x) = 0$$

$$4tx^2 + 4t = 0$$

$$tx^2 + t = 0$$

$$t(x^2 + 1) = 0$$

$$t(x - 1)(x + 1) = 0$$

$$x_1 = 1$$

$$x_2 = -1$$

$$f''(1) = 8t > 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 1 \text{ ist Tiefpunkt}$$

$$f''(-1) = -8t < 0 \quad \Rightarrow \quad x_2 = -1 \text{ ist Hochpunkt}$$

$$\text{HoP}\left(-1, -\frac{4}{3}t + 4t\right)$$

$$(c) \quad f_s(x) = f_t(x) \quad (s \neq t)$$

$$\frac{4}{3}sx^3 - 4sx + 1 = \frac{4}{3}tx^3 - 4tx + 1$$

$$\frac{4}{3}x^3(s - t) - 4x(s - t) = 0$$

$$\frac{4}{3}x^3 - 4x = 0$$

$$4x^3 - 12x = 0$$

$$4x(x^2 - 3) = 0$$

$$x_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad P_1(0, 1)$$

$$x_2 = \sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad P_2(\sqrt{3}, 1)$$

$$x_3 = -\sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad P_3(-\sqrt{3}, 1)$$

Aufgabe 17.1

- (a) $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 1}{7x^3 + 2x - 1}$ echt gebrochenrational
(Grad Zählerpolynom < Grad Nennerpolynom)
- (b) $f(x) = \frac{x + 3}{x - 4}$ unecht gebrochenrational
(Grad Zählerpolynom $\geq$ Grad Nennerpolynom)

Aufgabe 17.2

- (a) $f(x) = \frac{2x^2 + 7x - 9}{11}$ ganzrational
(Grad Nennerpolynom: 0)
- (b) $f(x) = \frac{(x + 1)^5}{(x^3 - 1)^2}$ echt gebrochenrational
(Grad Zählerpolynom < Grad Nennerpolynom)

Aufgabe 17.3

- (a) $f(x) = \frac{(x - 1)(x + 5)}{x(x - 1)(x + 3)} = \frac{(x - 1)(x + 5)}{x(x - 1)(x + 3)}$
 $D = \mathbb{R} \setminus \{-3, 0, 1\}$
- (b) $f(x) = \frac{x^5 + 2x - 4}{x^2 - 3x - 10} = \frac{x^5 + 2x - 4}{x^2 - 3x - 10} = \frac{x^5 + 2x - 4}{x^2 - 3x - 10} = \frac{x^5 + 2x - 4}{(x - 5)(x + 2)}$
 $D = \mathbb{R} \setminus \{-2, 5\}$

Aufgabe 17.4

$$\begin{array}{r} (x^3 + 2x^2 - 3x + 4) : (x - 1) = x^2 + 3x + 4/(x - 1) \\ -(x^2 - x^2) \\ \hline 3x^2 - 3x \\ -(3x^2 - 3x) \\ \hline / + 4 \text{ (Rest)} \end{array}$$

Aufgabe 17.5

$$\begin{array}{r} (2x^3 - 5x^2 + 3x - 1) : (x^2 + x + 1) = 2x - 7 + (8x + 6)/(x^2 + x + 1) \\ -(2x^3 + 2x^2 + 2x) \\ \hline -7x^2 + x - 1 \\ -(-7x^2 - 7x - 7) \\ \hline 8x + 6 \text{ (Rest)} \end{array}$$

Aufgabe 17.6

$$\begin{array}{r}
 (x^5 + 0x^4 + 0x^3 + 0x^2 + 0x - 1) : (x+1) = x^4 - x^3 + x^2 - x + 1 - 2/(x+1) \\
 -(x^4 + x^4) \\
 \hline
 -x^4 + 0x^3 \\
 -(-x^4 - x^3) \\
 \hline
 x^3 + 0x^2 \\
 -(x^3 + x^2) \\
 \hline
 -x^2 + 0x \\
 -(-x^2 - x) \\
 \hline
 x - 1 \\
 -(x + 1) \\
 \hline
 -2 \text{ (Rest)}
 \end{array}$$

Aufgabe 17.7

$$f(x) = \frac{x-3}{x+5}$$

- Definitionsmenge: $D = \mathbb{R} \setminus \{-5\}$
- Nullstellenmenge: $N = \{3\}$
- $x = -5$: Polstelle mVzw

Aufgabe 17.8

$$f(x) = \frac{x+1}{x^2-1} = \frac{x+1}{(x+1)(x-1)}$$

- Definitionsmenge: $D = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$
- Nullstellenmenge: $N = \{ \}$
- $x = -1$: hebbare Definitionslücke
- $x = 1$: Polstelle mVzw

Aufgabe 17.9

$$f(x) = \frac{5x-3}{x^2+1}$$

- Definitionsmenge: $D = \mathbb{R}$
- Nullstellenmenge: $N = \{\frac{3}{5}\}$

Aufgabe 17.10

$$f(x) = 1 + \frac{x}{x+1} = \frac{x+1}{x+1} + \frac{x}{x+1} = \frac{x+1+x}{x+1} = \frac{2x+1}{x+1}$$

- Definitionsmenge: $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$
- Nullstellenmenge: $N = \{-\frac{1}{2}\}$
- $x = -1$: Polstelle mVzw

Aufgabe 17.11

$$f(x) = \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 5x + 6} = \frac{(x-2)^2}{(x-2)(x-3)}$$

- Definitionsmenge: $D = \mathbb{R} \setminus \{2, 3\}$
- Nullstellenmenge: $N = \{ \}$
- $x = 2$: hebbare Definitionslücke
- $x = 3$: Polstelle mVzw

Aufgabe 17.12

(a) horizontale Asymptote: $y = 1$

$$(b) (x^2 + 2x + 3) : (x + 2) = \dots = x + \frac{3}{x+2} \quad \Rightarrow \quad a(x) = x$$

Aufgabe 17.13

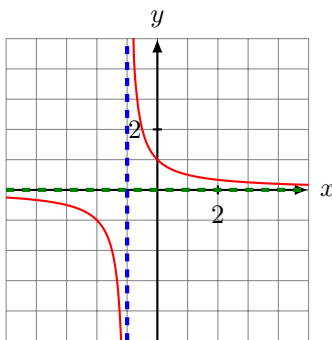
$$(a) f(0) = \frac{1}{-1} = -1$$

$$(b) f(0) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Aufgabe 17.14

$$f: y = \frac{1}{x+1}$$

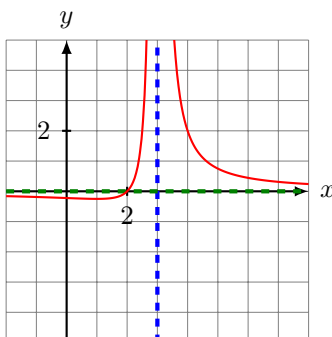
- Nullstellen: keine
- Ordinatenabschnitt: $y = 1$
- vertikale Asymptote: $x = -1$ (mit Vzw)
- Asymptote: $y = 0$, denn $\lim_{|x| \rightarrow \infty} f(x) \rightarrow 0$



Aufgabe 17.15

$$f: y = \frac{x+2}{(x-3)^2}$$

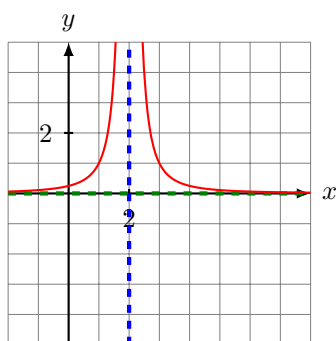
- Nullstelle: $x = -2$
- Ordinatenabschnitt: $y = \frac{2}{9}$
- vertikale Asymptote: $x = 3$ (ohne Vzw)
- Asymptote: $y = 0$, denn $\lim_{|x| \rightarrow \infty} f(x) \rightarrow 0$



Aufgabe 17.16

$$f: y = \frac{1}{(x-2)^2}$$

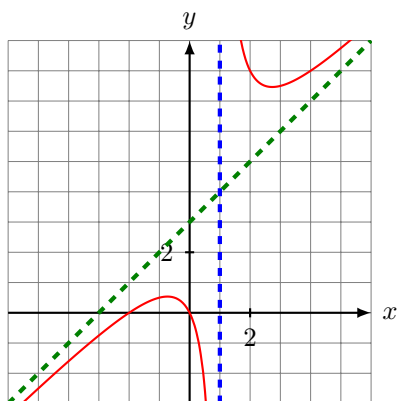
- Nullstelle: keine
- Ordinatenabschnitt: $y = \frac{1}{4}$
- vertikale Asymptote: $x = 2$:
- horizontale Asymptote: $y = 0$, denn $\lim_{|x| \rightarrow \infty} f(x) \rightarrow 0$



Aufgabe 17.17

$$f: y = \frac{x(x+2)}{x-1}$$

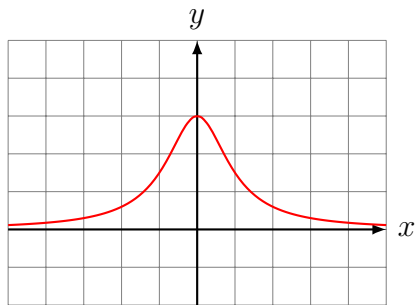
- Nullstellen: $x_1 = 0$, $x_2 = -2$
- Ordinatenabschnitt: $y = 0$
- vertikale Asymptote: $x = 1$
- $\frac{x(x+2)}{x-1} = (x^2 + 2x) : (x-1) = x + 3 + \frac{3}{x-1}$
 $\Rightarrow$ schiefe Asymptote: $y = x + 3$



Aufgabe 17.18

$$f(x) = \frac{3}{1+x^2}$$

- Nullstellen: $x = -2$
- Ordinatenabschnitt: $y = 3$
- vertikale Asymptoten: keine
- horizontale Asymptote: $y = 0$



Aufgabe 17.19

$$f: y = \frac{x+2}{x-3}$$

Aufgabe 17.20

$$f: y = \frac{(x+3)(x-5)}{(x-1)^2}$$

Aufgabe 17.21

$$f: y = \frac{(x-1)^2}{x-2}$$

Aufgabe 17.22

$$f(x) = \frac{4+x^2}{x^2-9} = \frac{(2-x)(2+x)}{(x-3)(x+3)}$$

- *Definitionsbereich:* $D = \mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}$
- *Symmetrie:* Zähler- und Nennerpolynom sind beide gerade Funktionen. Also ist $f(x)$ eine gerade Funktion und der Graph ordinatensymmetrisch, d. h. symmetrisch zur y -Achse.
- *Nullstellen:* $N = \{ \}$ (keine)

- *Ordinatenabschnitt:* $f(0) = \frac{4}{-9} \approx -0.44$

- *Verhalten bei den Definitionslücken:*

$$x = -3: \lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = -\infty; \text{ Pol mit Vzw}$$

$$x = 3: \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = +\infty; \text{ Pol mit Vzw}$$

Beachte die Symmetrie der Vorzeichen: $+/-/-/+$ (von links nach rechts)

(keine hebbaren Definitionslücken)

- *Verhalten für grosse $|x|$:*

Da der Grad des Zählerpolynoms (2) gleich gross wie der Grad des Nennerpolynoms (2) ist, muss eine Polynomdivision durchgeführt werden. Beachte, dass die Terme vor der Division nach absteigenden Potenzen von x sortiert werden müssen, da sonst die Polynomdivision nicht funktioniert.

$$(x^2 + 4) : (x^2 - 9) = 1 + \frac{13}{x^2 - 9} \quad (\text{ohne ausführliche Berechnung})$$

für grosse $|x|$ gilt: $f(x) \approx 1$ ($y = 1$ ist horizontale Asymptote)

- *Ableitungen:*

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2x \cdot (x^2 - 9) - (4 + x^2) \cdot 2x}{(x^2 - 9)^2} \\ &= \frac{2x^3 - 18x - 8x - 2x^3}{(x^2 - 9)^2} = \frac{-26x}{(x^2 - 9)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f''(x) &= \frac{-26 \cdot (x^2 - 9)^2 + 26x \cdot 2 \cdot (x^2 - 9) \cdot 2x}{(x^2 - 9)^4} \\
&= \frac{-26 \cdot (x^2 - 9)^2 + 104x^2 \cdot (x^2 - 9)}{(x^2 - 9)^4} \quad [\text{mit } (x^2 - 9) \text{ kürzen}] \\
&= \frac{-26 \cdot (x^2 - 9) + 104x^2}{(x^2 - 9)^3} \\
&= \frac{78x^2 + 234}{(x^2 - 9)^3}
\end{aligned}$$

Beachte: Der Nenner $(x^2 - 9)^2$ wird sinnvollerweise mit der Kettenregel abgeleitet: die Ableitung der äusseren Funktion $(x^2 - 9)^2$ wird bei unveränderter innerer Funktion [also $2 \cdot (x^2 - 9)$] mit der Ableitung der inneren Funktion [also $2x$] multipliziert.

- *Extrempunkte:*

$$\text{Kandidaten: } f'(x) = \frac{-26x}{(x^2 - 9)^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$$

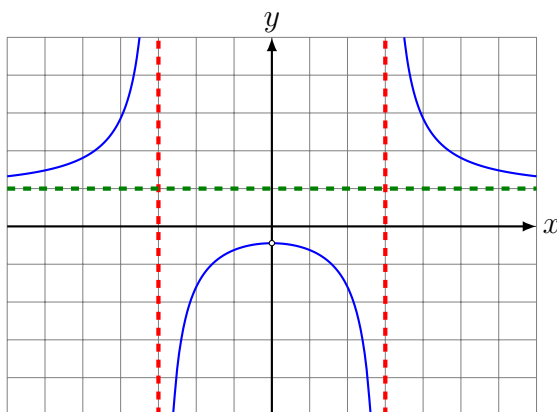
Bemerkung: In Frage kommen nur Nullstellen des Zählers, die nicht Nullstellen des Nenners sind, da die Division durch Null verboten ist.

$$\text{Test: } f''(0) = \frac{0 + 234}{(0 - 9)^3} < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{TiP}(0, -\frac{4}{9}) \quad [\rightarrow \text{Ordinatenabschnitt}]$$

- *Wendepunkte:*

$$\text{Kandidaten: } f''(x) = \frac{48x^2 + 234}{(x^2 - 9)^3} = 0 \quad (\text{keine Nullstellen im Zähler})$$

- *Graph:* (Abstand Gitternetzlinien: 1 Einheit)



Aufgabe 17.23

$$f(x) = \frac{x^2}{x-1}$$

- *Definitionsbereich:* $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$
- *Symmetrie:* Da das Nennpolynom aus Termen mit ungeraden und geraden Exponenten der Variablen x besteht, liegt keine uns bekannte Symmetrie vor.
- *Nullstellen:* $N = \{0\}$

Bemerkung: Wegen $x^2 = 0$ ist $x = 0$ eine „doppelte“ Nullstelle, was meist auf eine Extremstelle hinweist.

- *Ordinatenabschnitt:* $f(0) = \frac{0}{-1} = 0$

- *Verhalten bei den Definitionslücken:*

$$x = 1: \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty; \text{ Pol mit Vzw}$$

(keine hebbaren Definitionslücken)

- *Verhalten für grosse $|x|$:*

Da der Grad des Zählerpolynoms (2) grösser als der Grad des Nennerpolynoms (1) ist, muss eine Polynomdivision durchgeführt werden.

$$(x^2 + 0x + 0) : (x - 1) = x + 1 + \frac{1}{x-1} \quad (\text{ohne ausführliche Berechnung})$$

für grosse $|x|$ gilt also: $f(x) \approx x + 1$ ($y = x + 1$ ist schiefe Asymptote)

- *Ableitungen:*

$$f'(x) = \frac{2x \cdot (x-1) - x^2 \cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{2x^2 - 2x - x^2}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$$

$$f''(x) = \frac{(2x-2) \cdot (x-1)^2 - (x^2-2x) \cdot 2 \cdot (x-1) \cdot 1}{(x-1)^4} \quad [\text{mit } (x-1) \text{ kürzen}]$$

$$= \frac{(2x-2) \cdot (x-1) - (x^2-2x) \cdot 2}{(x-1)^3} \quad [\text{ausmultiplizieren, vereinfachen}]$$

$$= \frac{2x^2 - 2x - 2x + 2 - 2x^2 + 4x}{(x-1)^3}$$

$$= \frac{2}{(x-1)^3}$$

Beachte: Der Nenner $(x-1)^2$ wird sinnvollerweise mit der Kettenregel abgeleitet: die Ableitung der äusseren Funktion $(x-1)^2$ wird bei unveränderter innerer Funktion [also $2 \cdot (x-1)$] mit der Ableitung der inneren Funktion [hier eine harmlose 1] multipliziert.

- *Extrempunkte:*

$$\text{Kandidaten: } f'(x) = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2} \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 2$$

Bemerkung: In Frage kommen nur Nullstellen des Zählers, die nicht Nullstellen des Nenners sind, da die Division durch Null verboten ist.

Test:

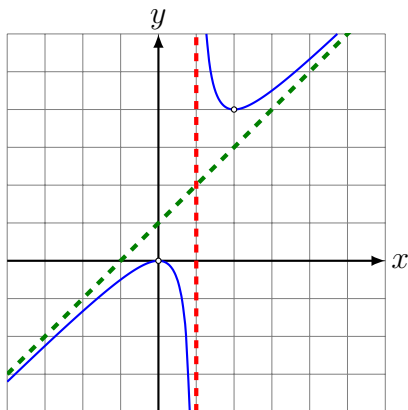
$$f''(0) = \frac{2}{(0-1)^3} = -2 < 0 \Rightarrow \text{HoP}(0,0) \text{ } [\rightarrow \text{Ordinatenabschnitt}]$$

$$f''(2) = \frac{2}{(2-1)^3} = 2 > 0 \Rightarrow \text{TiP}(2,4)$$

- *Wendepunkte:*

$$\text{Kandidaten: } f''(x) = \frac{2}{(x-1)^3} = 0 \text{ (keine Nullstellen im Zähler)}$$

- *Graph:* (Abstand Gitternetzlinien: 1 Einheit)



Aufgabe 18.1

$$f(x) = 2e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

(a) *Definitionsbereich:* $D = \mathbb{R}$

(b) *Symmetrie:*

$$f(-x) = 2e^{-\frac{1}{2}(-x)^2} = 2e^{-\frac{1}{2}x^2} = f(x) \Rightarrow \text{ordinatensymmetrisch}$$

(c) *Asymptoten und asymptotisches Verhalten:*

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 \text{ und } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \text{ (} x\text{-Achse ist Asymptote)}$$

(d) *Nullstellen und Ordinatenabschnitt:*

$$2e^{-\frac{1}{2}(-x)^2} = 0 \Rightarrow \text{keine Nullstellen}$$

$$f(0) = 2e^0 = 2$$

(e) *Ableitungen:*

$$f(x) = 2e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

$$f'(x) = 2e^{-\frac{1}{2}x^2} \cdot (-x) = -2xe^{-\frac{1}{2}x^2}$$

$$f''(x) = -2 \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2} + (-2x) \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2} \cdot (-x) = (2x^2 - 2)e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

$$f'''(x) = 4x \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2} + (2x^2 - 2) \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2} \cdot (-x) = (6x - 2x^3)e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

(f) *Extremstellen:*

$$\text{Kandidaten: } f'(x) = 0$$

$$-2xe^{-\frac{1}{2}x^2} = 0$$

$$x = 0$$

$$\text{Test: } f''(0) = (-2)e^0 = -2 < 0 \Rightarrow x = 0 \text{ ist Hochstelle}$$

$$y\text{-Koordinate: } f(0) = 2 \Rightarrow \text{HoP}(0|2)$$

(g) *Wendepunkte:*

$$\text{Kandidaten: } f''(x) = 0$$

$$(2x^2 - 2)e^{-\frac{1}{2}x^2} = 0$$

$$2(x^2 - 1) = 0$$

$$x_1 = 1$$

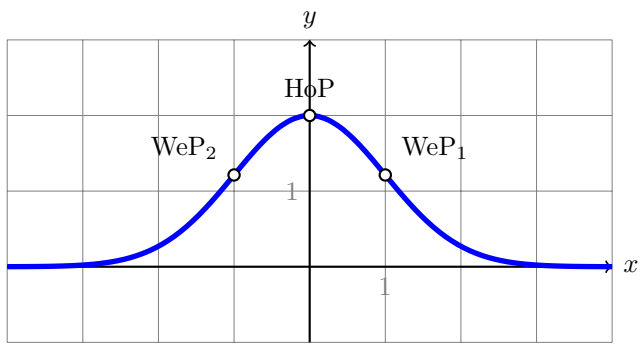
$$x_2 = -1$$

$$\text{Test: } f'''(1) = 4e^{-\frac{1}{2}} > 0 \Rightarrow x = 1 \text{ ist Wendestelle}$$

$$y\text{-Koordinate: } f(1) = 2e^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow \text{WeP}_1(1|1.21)$$

$$\text{Symmetrie} \Rightarrow \text{WeP}_2(-1|1.21)$$

(h) *Graph:*



Aufgabe 18.2

$$f(x) = (x^2 - 2x + 2)e^x$$

(a) *Definitionsbereich:* $D = \mathbb{R}$

(b) *Symmetrie:*

$$f(-x) = (x^2 + 2x + 2)e^{-x} \neq f(x) \text{ (für alle } x)$$

$$-f(-x) = -(x^2 + 2x + 2)e^{-x} \neq f(x) \text{ (für alle } x)$$

$\Rightarrow$ weder ordinaten- noch ursprungssymmetrisch

(c) *Asymptoten und asymptotisches Verhalten:*

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 \text{ und } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \infty \text{ (} x\text{-Achse ist Asymptote)}$$

(d) *Nullstellen und Ordinatenabschnitt:*

$$(x^2 - 2x + 2) \cdot e^x = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{keine Nullstellen (negative Diskriminante)}$$

$$f(0) = 2$$

(e) *Ableitungen:*

$$f(x) = (x^2 - 2x + 2)e^x$$

$$f'(x) = (2x - 2) \cdot e^x + (x^2 - 2x + 2) \cdot e^x = x^2 \cdot e^x$$

$$f''(x) = 2x \cdot e^x + x^2 \cdot e^x = (x^2 + 2x) \cdot e^x$$

$$f'''(x) = (2x + 2) \cdot e^x + (x^2 + 2x) \cdot e^x = (x^2 + 4x + 2) \cdot e^x$$

(f) *Extremstellen:*

$$\text{Kandidaten: } f'(x) = 0$$

$$x^2 \cdot e^x = 0$$

$$x = 0$$

$$\text{Test: } f''(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{unklar}$$

(g) *Wendepunkte:*

$$\text{Kandidaten: } f''(x) = 0$$

$$(x^2 + 2x) \cdot e^x = 0$$

$$x(x + 2) \cdot e^x = 0$$

$$x_1 = 0$$

$$x_2 = -2$$

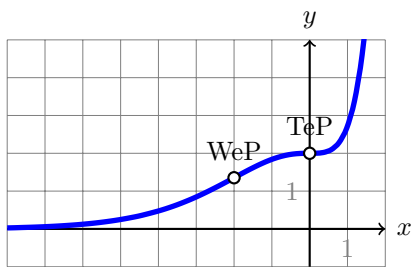
$$\text{Test: } f'''(0) = 2 > 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0 \text{ ist Wendestelle}$$

$$f'''(-2) = -2 < 0 \quad \Rightarrow \quad x = -2 \text{ ist Wendestelle}$$

$$y\text{-Koordinaten: } f(0) = 2 \quad \Rightarrow \quad \text{TeP}(0, 2)$$

$$f(-2) = 10e^{-2} \quad \Rightarrow \quad \text{WeP}(-2, 3.68)$$

(h) *Graph:*



Aufgabe 18.3

$$f(x) = 5 \frac{\ln x}{x}$$

(a) *Definitionsbereich:* $D = \mathbb{R} = (0, \infty)$

(b) *Symmetrie:*

weder ordinaten- noch ursprungssymmetrisch

(c) *Asymptoten und asymptotisches Verhalten:*

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty \text{ und } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0; \text{ Asymptoten: } x\text{- und } y\text{-Achse}$$

(d) *Nullstellen und Ordinatenabschnitt:*

$$\frac{5 \ln x}{x} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 1$$

$f(0)$ ist nicht definiert

(e) *Ableitungen:*

$$f(x) = \frac{5 \ln x}{x} = 0$$

$$f'(x) = \frac{5/x \cdot x - 5 \ln x \cdot 1}{x^2} = \frac{5 - 5 \ln x}{x^2}$$

$$f''(x) = \frac{(-5/x) \cdot x^2 - (5 - 5 \ln x) \cdot 2x}{x^4} = \frac{-15x + 10x \ln x}{x^4} = \frac{10 \ln x - 15}{x^3}$$

$$f'''(x) = \frac{(10/x) \cdot x^3 - (10 \ln x - 15) \cdot 3x^2}{x^6} = \frac{55 - 30 \log x}{x^4}$$

(f) *Extremstellen:*

$$\text{Kandidaten: } f'(x) = 0$$

$$5 - 5 \ln x = 0$$

$$x = e$$

$$\text{Test: } f''(e) = -15 < 0 \quad \Rightarrow \quad x = e \text{ ist Hochstelle}$$

$$y\text{-Koordinate: } f(e) = 5/e \quad \Rightarrow \quad \text{HoP}(2.72|1.84)$$

(g) *Wendepunkte:*

$$\text{Kandidaten: } f''(x) = 0$$

$$10 \ln x - 15 = 0$$

$$\ln x = 1.5$$

$$x = e^{1.5}$$

$$\text{Test: } f''(e^{1.5}) = -15 < 0 \quad \Rightarrow \quad x = e^{1.5} \text{ ist Wendestelle}$$

$$y\text{-Koordinate: } f(e^{1.5}) \approx 1.67 \quad \Rightarrow \quad \text{WeP}(4.48|1.67)$$

(h) *Graph:*

