

Differenzialrechnung

Übungen (II)

Aufgabe 11.1

Entwickle die Funktion f mit der Gleichung $f(x) = \sin x$ nach dem Satz von Taylor in eine Potenzreihe an der Stelle $x_0 = 0$.

Aufgabe 11.1

$f(x) = \sin x$; Entwicklungsstelle: $x_0 = 0$

$$f^{(0)}(x) = \sin x \quad \Rightarrow \quad f^{(0)}(0) = 0$$

Aufgabe 11.1

$f(x) = \sin x$; Entwicklungsstelle: $x_0 = 0$

$$f^{(0)}(x) = \sin x \quad \Rightarrow \quad f^{(0)}(0) = 0$$

$$f^{(1)}(x) = \cos x \quad \Rightarrow \quad f^{(1)}(0) = 1$$

Aufgabe 11.1

$f(x) = \sin x$; Entwicklungsstelle: $x_0 = 0$

$$f^{(0)}(x) = \sin x \quad \Rightarrow \quad f^{(0)}(0) = 0$$

$$f^{(1)}(x) = \cos x \quad \Rightarrow \quad f^{(1)}(0) = 1$$

$$f^{(2)}(x) = -\sin x \quad \Rightarrow \quad f^{(2)}(0) = 0$$

Aufgabe 11.1

$f(x) = \sin x$; Entwicklungsstelle: $x_0 = 0$

$$f^{(0)}(x) = \sin x \quad \Rightarrow \quad f^{(0)}(0) = 0$$

$$f^{(1)}(x) = \cos x \quad \Rightarrow \quad f^{(1)}(0) = 1$$

$$f^{(2)}(x) = -\sin x \quad \Rightarrow \quad f^{(2)}(0) = 0$$

$$f^{(3)}(x) = -\cos x \quad \Rightarrow \quad f^{(3)}(0) = -1$$

Aufgabe 11.1

$f(x) = \sin x$; Entwicklungsstelle: $x_0 = 0$

$$f^{(0)}(x) = \sin x \quad \Rightarrow \quad f^{(0)}(0) = 0$$

$$f^{(1)}(x) = \cos x \quad \Rightarrow \quad f^{(1)}(0) = 1$$

$$f^{(2)}(x) = -\sin x \quad \Rightarrow \quad f^{(2)}(0) = 0$$

$$f^{(3)}(x) = -\cos x \quad \Rightarrow \quad f^{(3)}(0) = -1$$

$$f^{(4)}(x) = \sin x \quad \Rightarrow \quad f^{(4)}(0) = 0$$

$$\dots = \dots \quad \Rightarrow \quad \dots = \dots$$

$$f(x) = \frac{f^{(0)}(x_0)}{0!} + \frac{f^{(1)}(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f^{(2)}(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots$$

$$f(x) = \frac{f^{(0)}(x_0)}{0!} + \frac{f^{(1)}(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f^{(2)}(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots$$

$$\sin(x) = 1 \cdot x - \frac{1}{3!} \cdot x^3 + \frac{1}{5!} \cdot x^5 - \frac{1}{7!} \cdot x^7 + \dots$$

$$f(x) = \frac{f^{(0)}(x_0)}{0!} + \frac{f^{(1)}(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f^{(2)}(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots$$

$$\sin(x) = 1 \cdot x - \frac{1}{3!} \cdot x^3 + \frac{1}{5!} \cdot x^5 - \frac{1}{7!} \cdot x^7 + \dots$$

$$= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

Aufgabe 11.2

Entwickle die Funktion $f(x) = \sqrt{x}$ nach dem Satz von Taylor in eine Potenzreihe bis zur Potenz x^5 an der Stelle $x_0 = 1$.

Aufgabe 11.2

$$f(x) = \sqrt{x}; x_0 = 1$$

$$f^{(0)}(x) = x^{\frac{1}{2}}$$

Aufgabe 11.2

$$f(x) = \sqrt{x}; x_0 = 1$$

$$f^{(0)}(x) = x^{\frac{1}{2}} \quad \Rightarrow \quad f^{(0)}(1) = 1$$

Aufgabe 11.2

$$f(x) = \sqrt{x}; x_0 = 1$$

$$f^{(0)}(x) = x^{\frac{1}{2}} \quad \Rightarrow \quad f^{(0)}(1) = 1$$

$$f^{(1)}(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$$

Aufgabe 11.2

$$f(x) = \sqrt{x}; x_0 = 1$$

$$f^{(0)}(x) = x^{\frac{1}{2}} \quad \Rightarrow \quad f^{(0)}(1) = 1$$

$$f^{(1)}(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} \quad \Rightarrow \quad f^{(1)}(1) = \frac{1}{2}$$

Aufgabe 11.2

$$f(x) = \sqrt{x}; x_0 = 1$$

$$f^{(0)}(x) = x^{\frac{1}{2}} \quad \Rightarrow \quad f^{(0)}(1) = 1$$

$$f^{(1)}(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} \quad \Rightarrow \quad f^{(1)}(1) = \frac{1}{2}$$

$$f^{(2)}(x) = -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}$$

Aufgabe 11.2

$$f(x) = \sqrt{x}; x_0 = 1$$

$$f^{(0)}(x) = x^{\frac{1}{2}} \quad \Rightarrow \quad f^{(0)}(1) = 1$$

$$f^{(1)}(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} \quad \Rightarrow \quad f^{(1)}(1) = \frac{1}{2}$$

$$f^{(2)}(x) = -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}} \quad \Rightarrow \quad f^{(2)}(1) = -\frac{1}{4}$$

Aufgabe 11.2

$$f(x) = \sqrt{x}; x_0 = 1$$

$$f^{(0)}(x) = x^{\frac{1}{2}} \quad \Rightarrow \quad f^{(0)}(1) = 1$$

$$f^{(1)}(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} \quad \Rightarrow \quad f^{(1)}(1) = \frac{1}{2}$$

$$f^{(2)}(x) = -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}} \quad \Rightarrow \quad f^{(2)}(1) = -\frac{1}{4}$$

$$f^{(3)}(x) = \frac{3}{8}x^{-\frac{5}{2}}$$

Aufgabe 11.2

$$f(x) = \sqrt{x}; x_0 = 1$$

$$f^{(0)}(x) = x^{\frac{1}{2}} \quad \Rightarrow \quad f^{(0)}(1) = 1$$

$$f^{(1)}(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} \quad \Rightarrow \quad f^{(1)}(1) = \frac{1}{2}$$

$$f^{(2)}(x) = -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}} \quad \Rightarrow \quad f^{(2)}(1) = -\frac{1}{4}$$

$$f^{(3)}(x) = \frac{3}{8}x^{-\frac{5}{2}} \quad \Rightarrow \quad f^{(3)}(1) = \frac{3}{8}$$

Aufgabe 11.2

$$f(x) = \sqrt{x}; x_0 = 1$$

$$f^{(0)}(x) = x^{\frac{1}{2}} \quad \Rightarrow \quad f^{(0)}(1) = 1$$

$$f^{(1)}(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} \quad \Rightarrow \quad f^{(1)}(1) = \frac{1}{2}$$

$$f^{(2)}(x) = -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}} \quad \Rightarrow \quad f^{(2)}(1) = -\frac{1}{4}$$

$$f^{(3)}(x) = \frac{3}{8}x^{-\frac{5}{2}} \quad \Rightarrow \quad f^{(3)}(1) = \frac{3}{8}$$

$$f^{(4)}(x) = -\frac{15}{16}x^{-\frac{7}{2}}$$

Aufgabe 11.2

$$f(x) = \sqrt{x}; x_0 = 1$$

$$f^{(0)}(x) = x^{\frac{1}{2}} \quad \Rightarrow \quad f^{(0)}(1) = 1$$

$$f^{(1)}(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} \quad \Rightarrow \quad f^{(1)}(1) = \frac{1}{2}$$

$$f^{(2)}(x) = -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}} \quad \Rightarrow \quad f^{(2)}(1) = -\frac{1}{4}$$

$$f^{(3)}(x) = \frac{3}{8}x^{-\frac{5}{2}} \quad \Rightarrow \quad f^{(3)}(1) = \frac{3}{8}$$

$$f^{(4)}(x) = -\frac{15}{16}x^{-\frac{7}{2}} \quad \Rightarrow \quad f^{(4)}(1) = -\frac{15}{16}$$

Aufgabe 11.2

$$f(x) = \sqrt{x}; x_0 = 1$$

$$f^{(0)}(x) = x^{\frac{1}{2}} \quad \Rightarrow \quad f^{(0)}(1) = 1$$

$$f^{(1)}(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} \quad \Rightarrow \quad f^{(1)}(1) = \frac{1}{2}$$

$$f^{(2)}(x) = -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}} \quad \Rightarrow \quad f^{(2)}(1) = -\frac{1}{4}$$

$$f^{(3)}(x) = \frac{3}{8}x^{-\frac{5}{2}} \quad \Rightarrow \quad f^{(3)}(1) = \frac{3}{8}$$

$$f^{(4)}(x) = -\frac{15}{16}x^{-\frac{7}{2}} \quad \Rightarrow \quad f^{(4)}(1) = -\frac{15}{16}$$

$$f^{(5)}(x) = \frac{105}{32}x^{-\frac{9}{2}}$$

Aufgabe 11.2

$$f(x) = \sqrt{x}; x_0 = 1$$

$$f^{(0)}(x) = x^{\frac{1}{2}} \quad \Rightarrow \quad f^{(0)}(1) = 1$$

$$f^{(1)}(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} \quad \Rightarrow \quad f^{(1)}(1) = \frac{1}{2}$$

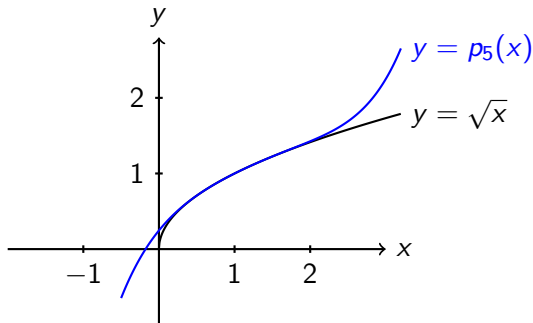
$$f^{(2)}(x) = -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}} \quad \Rightarrow \quad f^{(2)}(1) = -\frac{1}{4}$$

$$f^{(3)}(x) = \frac{3}{8}x^{-\frac{5}{2}} \quad \Rightarrow \quad f^{(3)}(1) = \frac{3}{8}$$

$$f^{(4)}(x) = -\frac{15}{16}x^{-\frac{7}{2}} \quad \Rightarrow \quad f^{(4)}(1) = -\frac{15}{16}$$

$$f^{(5)}(x) = \frac{105}{32}x^{-\frac{9}{2}} \quad \Rightarrow \quad f^{(5)}(1) = \frac{105}{32}$$

$$\begin{aligned}\sqrt{x} &= 1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{4 \cdot 2!}(x-1)^2 + \frac{3}{8 \cdot 3!}(x-1)^3 - \frac{15}{16 \cdot 4!}(x-1)^4 + \dots \\ &= 1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{8}(x-1)^2 + \frac{1}{16}(x-1)^3 - \frac{5}{128}(x-1)^4 + \frac{7}{256}(x-1)^5 + \dots\end{aligned}$$



Aufgabe 11.3

Gegeben ist die Funktion $f(x) = \ln x$.

- (a) Entwickle f nach dem Satz von Taylor in eine Potenzreihe an der Stelle $x_0 = 1$.
- (b) Berechne mit der Formel aus (a) und deinem Taschenrechner näherungsweise den Wert von $\ln 2$, indem du die Teilsummen für $n = 1, 2, 3, \dots, 200$ bestimmst und die Werte in einer Liste abspeicherst. Wie viele Stellen sind für $n = 200$ korrekt?

Aufgabe 11.3

$$(a) \quad f^{(0)}(x) = \ln x \quad \Rightarrow \quad f^{(0)}(1) = 0$$

Aufgabe 11.3

$$(a) \quad f^{(0)}(x) = \ln x \quad \Rightarrow \quad f^{(0)}(1) = 0$$

$$f^{(1)}(x) = x^{-1} \quad \Rightarrow \quad f^{(1)}(1) = 1$$

Aufgabe 11.3

$$(a) \quad f^{(0)}(x) = \ln x \quad \Rightarrow \quad f^{(0)}(1) = 0$$

$$f^{(1)}(x) = x^{-1} \quad \Rightarrow \quad f^{(1)}(1) = 1$$

$$f^{(2)}(x) = -x^{-2} \quad \Rightarrow \quad f^{(2)}(1) = -1$$

Aufgabe 11.3

$$(a) \quad f^{(0)}(x) = \ln x \quad \Rightarrow \quad f^{(0)}(1) = 0$$

$$f^{(1)}(x) = x^{-1} \quad \Rightarrow \quad f^{(1)}(1) = 1$$

$$f^{(2)}(x) = -x^{-2} \quad \Rightarrow \quad f^{(2)}(1) = -1$$

$$f^{(3)}(x) = 2x^{-3} \quad \Rightarrow \quad f^{(3)}(1) = 2 = 2!$$

Aufgabe 11.3

$$(a) \quad f^{(0)}(x) = \ln x \quad \Rightarrow \quad f^{(0)}(1) = 0$$

$$f^{(1)}(x) = x^{-1} \quad \Rightarrow \quad f^{(1)}(1) = 1$$

$$f^{(2)}(x) = -x^{-2} \quad \Rightarrow \quad f^{(2)}(1) = -1$$

$$f^{(3)}(x) = 2x^{-3} \quad \Rightarrow \quad f^{(3)}(1) = 2 = 2!$$

$$f^{(4)}(x) = -6x^{-4} \quad \Rightarrow \quad f^{(4)}(1) = -6 = -3!$$

Aufgabe 11.3

$$(a) \quad f^{(0)}(x) = \ln x \quad \Rightarrow \quad f^{(0)}(1) = 0$$

$$f^{(1)}(x) = x^{-1} \quad \Rightarrow \quad f^{(1)}(1) = 1$$

$$f^{(2)}(x) = -x^{-2} \quad \Rightarrow \quad f^{(2)}(1) = -1$$

$$f^{(3)}(x) = 2x^{-3} \quad \Rightarrow \quad f^{(3)}(1) = 2 = 2!$$

$$f^{(4)}(x) = -6x^{-4} \quad \Rightarrow \quad f^{(4)}(1) = -6 = -3!$$

$$f^{(5)}(x) = 24x^{-5} \quad \Rightarrow \quad f^{(5)}(1) = 24 = 4!$$

Aufgabe 11.3

$$(a) \quad f^{(0)}(x) = \ln x \quad \Rightarrow \quad f^{(0)}(1) = 0$$

$$f^{(1)}(x) = x^{-1} \quad \Rightarrow \quad f^{(1)}(1) = 1$$

$$f^{(2)}(x) = -x^{-2} \quad \Rightarrow \quad f^{(2)}(1) = -1$$

$$f^{(3)}(x) = 2x^{-3} \quad \Rightarrow \quad f^{(3)}(1) = 2 = 2!$$

$$f^{(4)}(x) = -6x^{-4} \quad \Rightarrow \quad f^{(4)}(1) = -6 = -3!$$

$$f^{(5)}(x) = 24x^{-5} \quad \Rightarrow \quad f^{(5)}(1) = 24 = 4!$$

$$\dots\dots\dots \Rightarrow \dots = \dots$$

$$f(x) = \frac{f^{(0)}(x_0)}{0!} + \frac{f^{(1)}(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f^{(2)}(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots$$

$$f(x) = \frac{f^{(0)}(x_0)}{0!} + \frac{f^{(1)}(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f^{(2)}(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots$$

$$\ln(x) = 1 \cdot (x - 1) - \frac{1}{2!} \cdot (x - 1)^2 + \frac{2!}{3!} \cdot (x - 1)^3 - \dots$$

$$f(x) = \frac{f^{(0)}(x_0)}{0!} + \frac{f^{(1)}(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f^{(2)}(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots$$

$$\ln(x) = 1 \cdot (x - 1) - \frac{1}{2!} \cdot (x - 1)^2 + \frac{2!}{3!} \cdot (x - 1)^3 - \dots$$

$$= (x - 1) - \frac{(x - 1)^2}{2} + \frac{(x - 1)^3}{3} - \frac{(x - 1)^4}{4} + \dots$$

=

$$f(x) = \frac{f^{(0)}(x_0)}{0!} + \frac{f^{(1)}(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f^{(2)}(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots$$

$$\ln(x) = 1 \cdot (x - 1) - \frac{1}{2!} \cdot (x - 1)^2 + \frac{2!}{3!} \cdot (x - 1)^3 - \dots$$

$$= (x - 1) - \frac{(x - 1)^2}{2} + \frac{(x - 1)^3}{3} - \frac{(x - 1)^4}{4} + \dots$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(x - 1)^{k+1}}{k + 1}$$

mit der Substitution $x - 1 \rightarrow x$ erhält man:

mit der Substitution $x - 1 \rightarrow x$ erhält man:

$$\ln(x + 1) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \dots$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1}$$

mit der Substitution $x - 1 \rightarrow x$ erhält man:

$$\ln(x + 1) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \dots$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k}$$

mit der Substitution $x - 1 \rightarrow x$ erhält man:

$$\ln(x + 1) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \dots$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k}$$

mit der Substitution $x - 1 \rightarrow x$ erhält man:

$$\ln(x + 1) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \dots$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k}$$

Bei der letzte Umformung wird die Summe bei $k = 1$ statt bei $k = 0$ gestartet, weshalb im allgemeinen Summanden zum Ausgleich k durch $k - 1$ ersetzt werden muss. Dies führt zu einer etwas einfachere Formel. Beachte $(-1)^{k-1} = (-1)^{k+1}$.

$$(b) \ln(2) = \ln(1 + 1) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1^k}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$$

$$(b) \ln(2) = \ln(1 + 1) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1^k}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$$

$$s_n = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k}$$

n	s_n
10	0.64563
20	0.66877
30	0.67676
40	0.68080
...	...
198	0.69063
199	0.69565
200	0.69065

$$(b) \ln(2) = \ln(1 + 1) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1^k}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$$

$$s_n = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k}$$

n	s_n
10	0.64563
20	0.66877
30	0.67676
40	0.68080
...	...
198	0.69063
199	0.69565
200	0.69065

erst zwei signifikante Stellen.

Aufgabe 11.4

Berechne die Lösung der Gleichung $x^2 = e^x$ näherungsweise, indem du die Exponentialfunktion in eine Potenzreihe bis zur Potenz x^3 an der Stelle $x_0 = 0$ entwickelst.

Aufgabe 11.4

$$x^2 = e^x$$

Aufgabe 11.4

$$x^2 = e^x$$

$$x^2 \approx 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$$

Aufgabe 11.4

$$x^2 = e^x$$

$$x^2 \approx 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$$

$$6x^2 \approx 6 + 6x + 3x^2 + x^3$$

Aufgabe 11.4

$$x^2 = e^x$$

$$x^2 \approx 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$$

$$6x^2 \approx 6 + 6x + 3x^2 + x^3$$

$$0 \approx x^3 - 3x^2 + 6x + 6$$

Aufgabe 11.4

$$x^2 = e^x$$

$$x^2 \approx 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$$

$$6x^2 \approx 6 + 6x + 3x^2 + x^3$$

$$0 \approx x^3 - 3x^2 + 6x + 6$$

$$x \approx -0.69889$$

Aufgabe 11.4

$$x^2 = e^x$$

$$x^2 \approx 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$$

$$6x^2 \approx 6 + 6x + 3x^2 + x^3$$

$$0 \approx x^3 - 3x^2 + 6x + 6$$

$$x \approx -0.69889$$

Zum Vergleich die „exakte“ Lösung: -0.7035

Aufgabe 11.5

Berechne den Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$$

mit Hilfe einer Potenzreihenentwicklung der Sinusfunktion.

Aufgabe 11.5

Reihenentwicklung von $\sin x$: Formelsammlung S. 79

Aufgabe 11.5

Reihenentwicklung von $\sin x$: Formelsammlung S. 79

Entwicklungsstelle: $x_0 = 0$

Aufgabe 11.5

Reihenentwicklung von $\sin x$: Formelsammlung S. 79

Entwicklungsstelle: $x_0 = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} \cdot \sin x \right)$$

Aufgabe 11.5

Reihenentwicklung von $\sin x$: Formelsammlung S. 79

Entwicklungsstelle: $x_0 = 0$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} \cdot \sin x \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \right)\end{aligned}$$

Aufgabe 11.5

Reihenentwicklung von $\sin x$: Formelsammlung S. 79

Entwicklungsstelle: $x_0 = 0$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} \cdot \sin x \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \dots \right)\end{aligned}$$

Aufgabe 11.5

Reihenentwicklung von $\sin x$: Formelsammlung S. 79

Entwicklungsstelle: $x_0 = 0$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} \cdot \sin x \right) \\&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \right) \\&= \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \dots \right) \\&= 1\end{aligned}$$

Aufgabe 11.6

Schreibe das Polynom $p(x) = x^4 + 3x^3 + x^2 + 2x + 1$ mit Hilfe des Satzes von Taylor um in die Form

$$p(x) = c_4(x-1)^4 + c_3(x-1)^3 + c_2(x-1)^2 + c_1(x-1) + c_0.$$

Aufgabe 11.6

$$\begin{aligned} p(x) = & p(1) + p'(1)(x-1) + \frac{1}{2!}p''(1)(x-1)^2 \\ & + \frac{1}{3!}p'''(1)(x-1)^3 + \frac{1}{4!}p^{(4)}(1)(x-1)^4 \end{aligned}$$

Aufgabe 11.6

$$\begin{aligned} p(x) &= p(1) + p'(1)(x-1) + \frac{1}{2!}p''(1)(x-1)^2 \\ &\quad + \frac{1}{3!}p'''(1)(x-1)^3 + \frac{1}{4!}p^{(4)}(1)(x-1)^4 \end{aligned}$$

$$p(x) = x^4 + 3x^3 + x^2 + 2x + 1$$

Aufgabe 11.6

$$\begin{aligned} p(x) &= p(1) + p'(1)(x-1) + \frac{1}{2!}p''(1)(x-1)^2 \\ &\quad + \frac{1}{3!}p'''(1)(x-1)^3 + \frac{1}{4!}p^{(4)}(1)(x-1)^4 \end{aligned}$$

$$p(x) = x^4 + 3x^3 + x^2 + 2x + 1 \quad \Rightarrow \quad p(1) = 8$$

Aufgabe 11.6

$$p(x) = p(1) + p'(1)(x-1) + \frac{1}{2!}p''(1)(x-1)^2 \\ + \frac{1}{3!}p'''(1)(x-1)^3 + \frac{1}{4!}p^{(4)}(1)(x-1)^4$$

$$p(x) = x^4 + 3x^3 + x^2 + 2x + 1 \quad \Rightarrow \quad p(1) = 8$$

$$p'(x) = 4x^3 + 9x^2 + 2x + 2$$

Aufgabe 11.6

$$p(x) = p(1) + p'(1)(x-1) + \frac{1}{2!}p''(1)(x-1)^2 \\ + \frac{1}{3!}p'''(1)(x-1)^3 + \frac{1}{4!}p^{(4)}(1)(x-1)^4$$

$$p(x) = x^4 + 3x^3 + x^2 + 2x + 1 \quad \Rightarrow \quad p(1) = 8$$

$$p'(x) = 4x^3 + 9x^2 + 2x + 2 \quad \Rightarrow \quad p'(1) = 17$$

Aufgabe 11.6

$$p(x) = p(1) + p'(1)(x-1) + \frac{1}{2!}p''(1)(x-1)^2 \\ + \frac{1}{3!}p'''(1)(x-1)^3 + \frac{1}{4!}p^{(4)}(1)(x-1)^4$$

$$p(x) = x^4 + 3x^3 + x^2 + 2x + 1 \quad \Rightarrow \quad p(1) = 8$$

$$p'(x) = 4x^3 + 9x^2 + 2x + 2 \quad \Rightarrow \quad p'(1) = 17$$

$$p''(x) = 12x^2 + 18x + 2$$

Aufgabe 11.6

$$p(x) = p(1) + p'(1)(x-1) + \frac{1}{2!}p''(1)(x-1)^2 \\ + \frac{1}{3!}p'''(1)(x-1)^3 + \frac{1}{4!}p^{(4)}(1)(x-1)^4$$

$$p(x) = x^4 + 3x^3 + x^2 + 2x + 1 \quad \Rightarrow \quad p(1) = 8$$

$$p'(x) = 4x^3 + 9x^2 + 2x + 2 \quad \Rightarrow \quad p'(1) = 17$$

$$p''(x) = 12x^2 + 18x + 2 \quad \Rightarrow \quad p''(1) = 32$$

Aufgabe 11.6

$$p(x) = p(1) + p'(1)(x-1) + \frac{1}{2!}p''(1)(x-1)^2 \\ + \frac{1}{3!}p'''(1)(x-1)^3 + \frac{1}{4!}p^{(4)}(1)(x-1)^4$$

$$p(x) = x^4 + 3x^3 + x^2 + 2x + 1 \quad \Rightarrow \quad p(1) = 8$$

$$p'(x) = 4x^3 + 9x^2 + 2x + 2 \quad \Rightarrow \quad p'(1) = 17$$

$$p''(x) = 12x^2 + 18x + 2 \quad \Rightarrow \quad p''(1) = 32$$

$$p'''(x) = 24x + 18$$

Aufgabe 11.6

$$p(x) = p(1) + p'(1)(x-1) + \frac{1}{2!}p''(1)(x-1)^2 \\ + \frac{1}{3!}p'''(1)(x-1)^3 + \frac{1}{4!}p^{(4)}(1)(x-1)^4$$

$$p(x) = x^4 + 3x^3 + x^2 + 2x + 1 \quad \Rightarrow \quad p(1) = 8$$

$$p'(x) = 4x^3 + 9x^2 + 2x + 2 \quad \Rightarrow \quad p'(1) = 17$$

$$p''(x) = 12x^2 + 18x + 2 \quad \Rightarrow \quad p''(1) = 32$$

$$p'''(x) = 24x + 18 \quad \Rightarrow \quad p'''(1) = 42$$

Aufgabe 11.6

$$p(x) = p(1) + p'(1)(x-1) + \frac{1}{2!}p''(1)(x-1)^2 \\ + \frac{1}{3!}p'''(1)(x-1)^3 + \frac{1}{4!}p^{(4)}(1)(x-1)^4$$

$$p(x) = x^4 + 3x^3 + x^2 + 2x + 1 \quad \Rightarrow \quad p(1) = 8$$

$$p'(x) = 4x^3 + 9x^2 + 2x + 2 \quad \Rightarrow \quad p'(1) = 17$$

$$p''(x) = 12x^2 + 18x + 2 \quad \Rightarrow \quad p''(1) = 32$$

$$p'''(x) = 24x + 18 \quad \Rightarrow \quad p'''(1) = 42$$

$$p^{(4)}(x) = 24$$

Aufgabe 11.6

$$p(x) = p(1) + p'(1)(x-1) + \frac{1}{2!}p''(1)(x-1)^2 \\ + \frac{1}{3!}p'''(1)(x-1)^3 + \frac{1}{4!}p^{(4)}(1)(x-1)^4$$

$$p(x) = x^4 + 3x^3 + x^2 + 2x + 1 \quad \Rightarrow \quad p(1) = 8$$

$$p'(x) = 4x^3 + 9x^2 + 2x + 2 \quad \Rightarrow \quad p'(1) = 17$$

$$p''(x) = 12x^2 + 18x + 2 \quad \Rightarrow \quad p''(1) = 32$$

$$p'''(x) = 24x + 18 \quad \Rightarrow \quad p'''(1) = 42$$

$$p^{(4)}(x) = 24 \quad \Rightarrow \quad p^{(4)}(1) = 24$$

Aufgabe 11.6

$$p(x) = p(1) + p'(1)(x-1) + \frac{1}{2!}p''(1)(x-1)^2 \\ + \frac{1}{3!}p'''(1)(x-1)^3 + \frac{1}{4!}p^{(4)}(1)(x-1)^4$$

$$p(x) = x^4 + 3x^3 + x^2 + 2x + 1 \quad \Rightarrow \quad p(1) = 8$$

$$p'(x) = 4x^3 + 9x^2 + 2x + 2 \quad \Rightarrow \quad p'(1) = 17$$

$$p''(x) = 12x^2 + 18x + 2 \quad \Rightarrow \quad p''(1) = 32$$

$$p'''(x) = 24x + 18 \quad \Rightarrow \quad p'''(1) = 42$$

$$p^{(4)}(x) = 24 \quad \Rightarrow \quad p^{(4)}(1) = 24$$

$$p(x) = 8 + 17(x-1) + \frac{32}{2}(x-1)^2 + \frac{42}{6}(x-1)^3 + \frac{24}{24}(x-1)^4 \\ = (x-1)^4 + 7(x-1)^3 + 16(x-1)^2 + 17(x-1) + 8$$

Bestimme die Extrem- und Wendepunkte der Funktion.

Aufgabe 12.1

$$f(x) = x^2 - 6x + 8$$

Aufgabe 12.1

Ableitungen:

$$f(x) = x^2 - 6x + 8$$

$$f'(x) = 2x - 6$$

$$f''(x) = 2$$

$$f'''(x) = 0$$

Aufgabe 12.1

Ableitungen:

$$f(x) = x^2 - 6x + 8$$

$$f'(x) = 2x - 6$$

$$f''(x) = 2$$

$$f'''(x) = 0$$

Extrempunkte:

Aufgabe 12.1

Ableitungen:

$$f(x) = x^2 - 6x + 8$$

$$f'(x) = 2x - 6$$

$$f''(x) = 2$$

$$f'''(x) = 0$$

Extrempunkte:

$$f'(x) = 0$$

$$2x - 6 = 0$$

$$x = 3$$

Aufgabe 12.1

Ableitungen:

$$f(x) = x^2 - 6x + 8$$

$$f'(x) = 2x - 6$$

$$f''(x) = 2$$

$$f'''(x) = 0$$

Extrempunkte:

$$f'(x) = 0$$

$$2x - 6 = 0$$

$$x = 3$$

$$f''(3) = 2 > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{TiP}(3, -1)$$

Wendepunkte:

Wendepunkte:

$$f''(x) = 0$$

$$2 = 0$$

keine Lösung

keine Wendepunkte

Aufgabe 12.2

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x - 18$$

Aufgabe 12.2

Ableitungen:

Aufgabe 12.2

Ableitungen:

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x - 18$$

Aufgabe 12.2

Ableitungen:

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x - 18$$

$$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12$$

Aufgabe 12.2

Ableitungen:

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x - 18$$

$$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12$$

$$f''(x) = 12x - 6$$

Aufgabe 12.2

Ableitungen:

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x - 18$$

$$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12$$

$$f''(x) = 12x - 6$$

$$f'''(x) = 12$$

Extrempunkte:

Extrempunkte:

$$f'(x) = 0$$

Extrempunkte:

$$f'(x) = 0$$

$$6x^2 - 6x - 12 = 0$$

Extrempunkte:

$$f'(x) = 0$$

$$6x^2 - 6x - 12 = 0$$

$$6(x^2 - x - 2) = 0$$

Extrempunkte:

$$f'(x) = 0$$

$$6x^2 - 6x - 12 = 0$$

$$6(x^2 - x - 2) = 0$$

$$(x + 1)(x - 2) = 0$$

Extrempunkte:

$$f'(x) = 0$$

$$6x^2 - 6x - 12 = 0$$

$$6(x^2 - x - 2) = 0$$

$$(x + 1)(x - 2) = 0$$

$$x_1 = -1$$

Extrempunkte:

$$f'(x) = 0$$

$$6x^2 - 6x - 12 = 0$$

$$6(x^2 - x - 2) = 0$$

$$(x + 1)(x - 2) = 0$$

$$x_1 = -1$$

$$x_2 = 2$$

Extrempunkte:

$$f'(x) = 0$$

$$6x^2 - 6x - 12 = 0$$

$$6(x^2 - x - 2) = 0$$

$$(x + 1)(x - 2) = 0$$

$$x_1 = -1$$

$$x_2 = 2$$

$$f''(-1) = -18 < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{HoP}(-1, -11)$$

Extrempunkte:

$$f'(x) = 0$$

$$6x^2 - 6x - 12 = 0$$

$$6(x^2 - x - 2) = 0$$

$$(x + 1)(x - 2) = 0$$

$$x_1 = -1$$

$$x_2 = 2$$

$$f''(-1) = -18 < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{HoP}(-1, -11)$$

$$f''(2) = 18 > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{TiP}(2, -38)$$

Wendepunkte:

Wendepunkte:

$$f''(x) = 0$$

Wendepunkte:

$$f''(x) = 0$$

$$12x - 6 = 0$$

Wendepunkte:

$$f''(x) = 0$$

$$12x - 6 = 0$$

$$x = \frac{1}{2}$$

Wendepunkte:

$$f''(x) = 0$$

$$12x - 6 = 0$$

$$x = \frac{1}{2}$$

$$f'''(\frac{1}{2}) = 12 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{WeP}(\frac{1}{2}, -\frac{49}{2})$$

Aufgabe 12.3

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + x + 1$$

Aufgabe 12.3

Ableitungen:

Aufgabe 12.3

Ableitungen:

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + x + 1$$

Aufgabe 12.3

Ableitungen:

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + x + 1$$

$$f'(x) = x^2 - 2x + 1$$

Aufgabe 12.3

Ableitungen:

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + x + 1$$

$$f'(x) = x^2 - 2x + 1$$

$$f''(x) = 2x - 2$$

Aufgabe 12.3

Ableitungen:

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + x + 1$$

$$f'(x) = x^2 - 2x + 1$$

$$f''(x) = 2x - 2$$

$$f'''(x) = 2$$

Extrempunkte:

Extrempunkte:

$$f'(x) = 0$$

Extrempunkte:

$$f'(x) = 0$$

$$x^2 - 2x + 1 = 0$$

Extrempunkte:

$$f'(x) = 0$$

$$x^2 - 2x + 1 = 0$$

$$(x - 1)^2 = 0$$

Extrempunkte:

$$f'(x) = 0$$

$$x^2 - 2x + 1 = 0$$

$$(x - 1)^2 = 0$$

$$x_1 = x_2 = 1$$

Extrempunkte:

$$f'(x) = 0$$

$$x^2 - 2x + 1 = 0$$

$$(x - 1)^2 = 0$$

$$x_1 = x_2 = 1$$

$$f''(1) = 0 \text{ (} x = 1 \text{ Terrassenstelle?} \Rightarrow \text{WP)}$$

Wendepunkte:

Wendepunkte:

$$f''(x) = 0$$

Wendepunkte:

$$f''(x) = 0$$

$$2x - 2 = 0$$

Wendepunkte:

$$f''(x) = 0$$

$$2x - 2 = 0$$

$$x = 1$$

Wendepunkte:

$$f''(x) = 0$$

$$2x - 2 = 0$$

$$x = 1$$

$$f'''(1) = 2 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{TeP}\left(1, \frac{4}{3}\right)$$

Aufgabe 12.4

$$f(x) = x^4 + 4x^3 - 16x - 20$$

Aufgabe 12.4

Ableitungen:

Aufgabe 12.4

Ableitungen:

$$f(x) = x^4 + 4x^3 - 16x - 20$$

Aufgabe 12.4

Ableitungen:

$$f(x) = x^4 + 4x^3 - 16x - 20$$

$$f'(x) = 4x^3 + 12x^2 - 16$$

Aufgabe 12.4

Ableitungen:

$$f(x) = x^4 + 4x^3 - 16x - 20$$

$$f'(x) = 4x^3 + 12x^2 - 16$$

$$f''(x) = 12x^2 + 24x$$

Aufgabe 12.4

Ableitungen:

$$f(x) = x^4 + 4x^3 - 16x - 20$$

$$f'(x) = 4x^3 + 12x^2 - 16$$

$$f''(x) = 12x^2 + 24x$$

$$f'''(x) = 24x + 24$$

Extrempunkte:

Extrempunkte:

$$f'(x) = 0$$

Extrempunkte:

$$f'(x) = 0$$

$$4x^3 + 12x^2 - 16 = 0$$

Extrempunkte:

$$f'(x) = 0$$

$$4x^3 + 12x^2 - 16 = 0$$

$$x^3 + 3x^2 - 4 = 0$$

Extrempunkte:

$$f'(x) = 0$$

$$4x^3 + 12x^2 - 16 = 0$$

$$x^3 + 3x^2 - 4 = 0$$

$$x_1 = 1$$

Extrempunkte:

$$f'(x) = 0$$

$$4x^3 + 12x^2 - 16 = 0$$

$$x^3 + 3x^2 - 4 = 0$$

$$x_1 = 1$$

$$x_2 = x_3 = -2$$

Extrempunkte:

$$f'(x) = 0$$

$$4x^3 + 12x^2 - 16 = 0$$

$$x^3 + 3x^2 - 4 = 0$$

$$x_1 = 1$$

$$x_2 = x_3 = -2$$

$x = 1$ kann erraten werden. Mit dem Hornerschema oder Polynomdivision erhält man

$$x^3 + 3x^2 - 4 = (x - 1)(x^2 + 4x + 4) = (x - 1)(x + 2)^2$$

und damit die zweite Lösung

Extrempunkte:

$$f'(x) = 0$$

$$4x^3 + 12x^2 - 16 = 0$$

$$x^3 + 3x^2 - 4 = 0$$

$$x_1 = 1$$

$$x_2 = x_3 = -2$$

$x = 1$ kann erraten werden. Mit dem Hornerschema oder Polynomdivision erhält man

$$x^3 + 3x^2 - 4 = (x - 1)(x^2 + 4x + 4) = (x - 1)(x + 2)^2$$

und damit die zweite Lösung

$$f''(1) = 36 > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{TiP}(1, -31)$$

Extrempunkte:

$$f'(x) = 0$$

$$4x^3 + 12x^2 - 16 = 0$$

$$x^3 + 3x^2 - 4 = 0$$

$$x_1 = 1$$

$$x_2 = x_3 = -2$$

$x = 1$ kann erraten werden. Mit dem Hornerschema oder Polynomdivision erhält man

$$x^3 + 3x^2 - 4 = (x - 1)(x^2 + 4x + 4) = (x - 1)(x + 2)^2$$

und damit die zweite Lösung

$$f''(1) = 36 > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{TiP}(1, -31)$$

$$f''(-2) = 48 - 48 = 0 \dots$$

Wendepunkte:

Wendepunkte:

$$f''(x) = 0$$

Wendepunkte:

$$f''(x) = 0$$

$$12x^2 + 24x = 0$$

Wendepunkte:

$$f''(x) = 0$$

$$12x^2 + 24x = 0$$

$$12x(x + 2) = 0$$

Wendepunkte:

$$f''(x) = 0$$

$$12x^2 + 24x = 0$$

$$12x(x + 2) = 0$$

$$x_1 = 0$$

Wendepunkte:

$$f''(x) = 0$$

$$12x^2 + 24x = 0$$

$$12x(x + 2) = 0$$

$$x_1 = 0$$

$$x_2 = -2$$

Wendepunkte:

$$f''(x) = 0$$

$$12x^2 + 24x = 0$$

$$12x(x + 2) = 0$$

$$x_1 = 0$$

$$x_2 = -2$$

$$f'''(0) = 24 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{WeP}(0, -20)$$

Wendepunkte:

$$f''(x) = 0$$

$$12x^2 + 24x = 0$$

$$12x(x + 2) = 0$$

$$x_1 = 0$$

$$x_2 = -2$$

$$f'''(0) = 24 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{WeP}(0, -20)$$

$$f'''(-2) = -4 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{TeP}(-2, -4)$$

Aufgabe 12.5

$$f(x) = x^5 + 15x^3$$

Aufgabe 12.5

Ableitungen:

Aufgabe 12.5

Ableitungen:

$$f(x) = x^5 + 15x^3$$

Aufgabe 12.5

Ableitungen:

$$f(x) = x^5 + 15x^3$$

$$f'(x) = 5x^4 + 45x^2$$

Aufgabe 12.5

Ableitungen:

$$f(x) = x^5 + 15x^3$$

$$f'(x) = 5x^4 + 45x^2$$

$$f''(x) = 20x^3 + 90x$$

Aufgabe 12.5

Ableitungen:

$$f(x) = x^5 + 15x^3$$

$$f'(x) = 5x^4 + 45x^2$$

$$f''(x) = 20x^3 + 90x$$

$$f'''(x) = 60x^2 + 90$$

Aufgabe 12.5

Ableitungen:

$$f(x) = x^5 + 15x^3$$

$$f'(x) = 5x^4 + 45x^2$$

$$f''(x) = 20x^3 + 90x$$

$$f'''(x) = 60x^2 + 90$$

Aufgabe 12.5

Ableitungen:

$$f(x) = x^5 + 15x^3$$

$$f'(x) = 5x^4 + 45x^2$$

$$f''(x) = 20x^3 + 90x$$

$$f'''(x) = 60x^2 + 90$$

Extrempunkte:

Aufgabe 12.5

Ableitungen:

$$f(x) = x^5 + 15x^3$$

$$f'(x) = 5x^4 + 45x^2$$

$$f''(x) = 20x^3 + 90x$$

$$f'''(x) = 60x^2 + 90$$

Extrempunkte:

$$f'(x) = 0$$

Aufgabe 12.5

Ableitungen:

$$f(x) = x^5 + 15x^3$$

$$f'(x) = 5x^4 + 45x^2$$

$$f''(x) = 20x^3 + 90x$$

$$f'''(x) = 60x^2 + 90$$

Extrempunkte:

$$f'(x) = 0$$

$$5x^4 + 45x^2 = 0$$

Aufgabe 12.5

Ableitungen:

$$f(x) = x^5 + 15x^3$$

$$f'(x) = 5x^4 + 45x^2$$

$$f''(x) = 20x^3 + 90x$$

$$f'''(x) = 60x^2 + 90$$

Extrempunkte:

$$f'(x) = 0$$

$$5x^4 + 45x^2 = 0$$

$$5x^2(x^2 + 9) = 0$$

Aufgabe 12.5

Ableitungen:

$$f(x) = x^5 + 15x^3$$

$$f'(x) = 5x^4 + 45x^2$$

$$f''(x) = 20x^3 + 90x$$

$$f'''(x) = 60x^2 + 90$$

Extrempunkte:

$$f'(x) = 0$$

$$5x^4 + 45x^2 = 0$$

$$5x^2(x^2 + 9) = 0$$

$$x = 0$$

Aufgabe 12.5

Ableitungen:

$$f(x) = x^5 + 15x^3$$

$$f'(x) = 5x^4 + 45x^2$$

$$f''(x) = 20x^3 + 90x$$

$$f'''(x) = 60x^2 + 90$$

Extrempunkte:

$$f'(x) = 0$$

$$5x^4 + 45x^2 = 0$$

$$5x^2(x^2 + 9) = 0$$

$$x = 0$$

$$f''(0) = 0 \dots$$

Wendepunkte:

Wendepunkte:

$$f''(x) = 0$$

Wendepunkte:

$$f''(x) = 0$$

$$20x^3 + 90x = 0$$

Wendepunkte:

$$f''(x) = 0$$

$$20x^3 + 90x = 0$$

$$10x(2x^2 + 9) = 0$$

Wendepunkte:

$$f''(x) = 0$$

$$20x^3 + 90x = 0$$

$$10x(2x^2 + 9) = 0$$

$$x = 0$$

Wendepunkte:

$$f''(x) = 0$$

$$20x^3 + 90x = 0$$

$$10x(2x^2 + 9) = 0$$

$$x = 0$$

$$f'''(0) = 90 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{TeP}(0, 0)$$

Aufgabe 12.6

$$f(x) = \frac{2x^3 + 6x^2 - 8}{2x}$$

Aufgabe 12.6

Ableitungen:

Aufgabe 12.6

Ableitungen:

$$f(x) = \frac{2x^3 + 6x^2 - 8}{2x} = x^2 + 3x - \frac{4}{x}$$

Aufgabe 12.6

Ableitungen:

$$f(x) = \frac{2x^3 + 6x^2 - 8}{2x} = x^2 + 3x - \frac{4}{x}$$

$$f'(x) = 2x + 3 + \frac{4}{x^2}$$

Aufgabe 12.6

Ableitungen:

$$f(x) = \frac{2x^3 + 6x^2 - 8}{2x} = x^2 + 3x - \frac{4}{x}$$

$$f'(x) = 2x + 3 + \frac{4}{x^2}$$

$$f''(x) = 2 - \frac{8}{x^3}$$

Aufgabe 12.6

Ableitungen:

$$f(x) = \frac{2x^3 + 6x^2 - 8}{2x} = x^2 + 3x - \frac{4}{x}$$

$$f'(x) = 2x + 3 + \frac{4}{x^2}$$

$$f''(x) = 2 - \frac{8}{x^3}$$

$$f'''(x) = \frac{24}{x^4}$$

Extrempunkte:

Extrempunkte:

$$f'(x) = 0$$

Extrempunkte:

$$f'(x) = 0$$

$$2x + 3 + \frac{4}{x^2} = 0$$

Extrempunkte:

$$f'(x) = 0$$

$$2x + 3 + \frac{4}{x^2} = 0$$

$$2x^3 + 3x^2 + 4 = 0$$

Extrempunkte:

$$f'(x) = 0$$

$$2x + 3 + \frac{4}{x^2} = 0$$

$$2x^3 + 3x^2 + 4 = 0$$

$$x_1 = -2$$

$x = -2$ kann durch systematisches Probieren gefunden werden (nichtnegative Lösungen kann man gleich ausschliessen):

x		3	0	4
-1	2	1	-1	5
-2	2	-1	2	0

somit: $2x^3 + 3x^2 + 4 = (x + 2)(2x^2 - x + 2)$

Der quadratische Faktor hat die Diskriminante $(-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = -15$ und liefert keine weiteren Lösungen.

Extrempunkte:

$$f'(x) = 0$$

$$2x + 3 + \frac{4}{x^2} = 0$$

$$2x^3 + 3x^2 + 4 = 0$$

$$x_1 = -2$$

$x = -2$ kann durch systematisches Probieren gefunden werden (nichtnegative Lösungen kann man gleich ausschliessen):

x		3	0	4
-1	2	1	-1	5
-2	2	-1	2	0

somit: $2x^3 + 3x^2 + 4 = (x + 2)(2x^2 - x + 2)$

Der quadratische Faktor hat die Diskriminante $(-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = -15$ und liefert keine weiteren Lösungen.

$$f''(-2) = 2 - \frac{8}{-8} = 3 > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{TiP}(-2, 0)$$

Wendepunkte:

Wendepunkte:

$$f''(x) = 0$$

Wendepunkte:

$$f''(x) = 0$$

$$2 - \frac{8}{x^3} = 0$$

Wendepunkte:

$$f''(x) = 0$$

$$2 - \frac{8}{x^3} = 0$$

$$2x^3 - 8 = 0$$

Wendepunkte:

$$f''(x) = 0$$

$$2 - \frac{8}{x^3} = 0$$

$$2x^3 - 8 = 0$$

$$x^3 = 4$$

Wendepunkte:

$$f''(x) = 0$$

$$2 - \frac{8}{x^3} = 0$$

$$2x^3 - 8 = 0$$

$$x^3 = 4$$

$$x = 4^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{4}$$

Wendepunkte:

$$f''(x) = 0$$

$$2 - \frac{8}{x^3} = 0$$

$$2x^3 - 8 = 0$$

$$x^3 = 4$$

$$x = 4^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{4}$$

$$f'''(4^{\frac{1}{3}}) = \frac{24}{4^{\frac{1}{3}}} = 6 \cdot \frac{4^1}{4^{\frac{1}{3}}} = 6 \cdot 4^{\frac{2}{3}} \neq 0$$

Wendepunkte:

$$f''(x) = 0$$

$$2 - \frac{8}{x^3} = 0$$

$$2x^3 - 8 = 0$$

$$x^3 = 4$$

$$x = 4^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{4}$$

$$f'''(4^{\frac{1}{3}}) = \frac{24}{4^{\frac{1}{3}}} = 6 \cdot \frac{4^1}{4^{\frac{1}{3}}} = 6 \cdot 4^{\frac{2}{3}} \neq 0$$

$$f(4^{\frac{1}{3}}) = 4^{\frac{2}{3}} + 3 \cdot 4^{\frac{1}{3}} - \frac{4^1}{4^{\frac{1}{3}}} = 4^{\frac{2}{3}} + 3 \cdot 4^{\frac{1}{3}} - 4^{\frac{2}{3}} = 3 \cdot 4^{\frac{1}{3}}$$

Wendepunkte:

$$f''(x) = 0$$

$$2 - \frac{8}{x^3} = 0$$

$$2x^3 - 8 = 0$$

$$x^3 = 4$$

$$x = 4^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{4}$$

$$f'''(4^{\frac{1}{3}}) = \frac{24}{4^{\frac{1}{3}}} = 6 \cdot \frac{4^1}{4^{\frac{1}{3}}} = 6 \cdot 4^{\frac{2}{3}} \neq 0$$

$$f(4^{\frac{1}{3}}) = 4^{\frac{2}{3}} + 3 \cdot 4^{\frac{1}{3}} - \frac{4^1}{4^{\frac{1}{3}}} = 4^{\frac{2}{3}} + 3 \cdot 4^{\frac{1}{3}} - 4^{\frac{2}{3}} = 3 \cdot 4^{\frac{1}{3}}$$

$$\text{WeP}(\sqrt[3]{4}, 3\sqrt[3]{4})$$

Aufgabe 12.7

$$f(x) = \frac{x^2 - 5}{x - 3}$$

Aufgabe 12.7

Ableitungen:

Aufgabe 12.7

Ableitungen:

$$f(x) = \frac{x^2 - 5}{x - 3}$$

Aufgabe 12.7

Ableitungen:

$$f(x) = \frac{x^2 - 5}{x - 3}$$

Aufgabe 12.7

Ableitungen:

$$f(x) = \frac{x^2 - 5}{x - 3}$$

$$f'(x) = \frac{2x(x - 3) - (x^2 - 5)}{(x - 3)^2} = \dots = \frac{x^2 - 6x + 5}{(x - 3)^2}$$

Aufgabe 12.7

Ableitungen:

$$f(x) = \frac{x^2 - 5}{x - 3}$$

$$f'(x) = \frac{2x(x - 3) - (x^2 - 5)}{(x - 3)^2} = \dots = \frac{x^2 - 6x + 5}{(x - 3)^2}$$

$$f''(x) = \frac{(2x - 6)(x - 3)^2 - (x^2 - 6x + 5) \cdot 2(x - 3)}{(x - 3)^4}$$

$$= \frac{(2x - 6)(x - 3) - 2(x^2 - 6x + 5)}{(x - 3)^3}$$

$$= \frac{2x^2 - 12x + 18 - 2x^2 + 12x - 10}{(x - 3)^3}$$

$$= \frac{8}{(x - 3)^3}$$

Extrempunkte:

Extrempunkte:

$$f'(x) = 0$$

$$\frac{x^2 - 6x + 5}{(x - 3)^2} = 0$$

$$x^2 - 6x + 5 = 0 \quad (x \neq 3)$$

$$(x - 1)(x - 5) = 0$$

$$x_1 = 1$$

$$x_2 = 5$$

Extrempunkte:

$$f'(x) = 0$$

$$\frac{x^2 - 6x + 5}{(x - 3)^2} = 0$$

$$x^2 - 6x + 5 = 0 \quad (x \neq 3)$$

$$(x - 1)(x - 5) = 0$$

$$x_1 = 1$$

$$x_2 = 5$$

$$f''(1) = \frac{8}{(1 - 3)^3} = \frac{8}{-8} = -1 < 0 \quad (x = 1 \text{ ist Maximalstelle})$$

Extrempunkte:

$$f'(x) = 0$$

$$\frac{x^2 - 6x + 5}{(x - 3)^2} = 0$$

$$x^2 - 6x + 5 = 0 \quad (x \neq 3)$$

$$(x - 1)(x - 5) = 0$$

$$x_1 = 1$$

$$x_2 = 5$$

$$f''(1) = \frac{8}{(1 - 3)^3} = \frac{8}{-8} = -1 < 0 \quad (x = 1 \text{ ist Maximalstelle})$$

$$f(1) = \frac{1^2 - 5}{1 - 3} = \frac{-4}{-2} = 1 \quad \Rightarrow \quad \text{HoP}(1, 2)$$

Extrempunkte:

$$f'(x) = 0$$

$$\frac{x^2 - 6x + 5}{(x - 3)^2} = 0$$

$$x^2 - 6x + 5 = 0 \quad (x \neq 3)$$

$$(x - 1)(x - 5) = 0$$

$$x_1 = 1$$

$$x_2 = 5$$

$$f''(1) = \frac{8}{(1 - 3)^3} = \frac{8}{-8} = -1 < 0 \quad (x = 1 \text{ ist Maximalstelle})$$

$$f(1) = \frac{1^2 - 5}{1 - 3} = \frac{-4}{-2} = 1 \quad \Rightarrow \quad \text{HoP}(1, 2)$$

$$f''(5) = \frac{8}{(5 - 3)^3} = \frac{8}{8} = 1 > 0 \quad (x = 5 \text{ ist Minimalstelle})$$

Extrempunkte:

$$f'(x) = 0$$

$$\frac{x^2 - 6x + 5}{(x - 3)^2} = 0$$

$$x^2 - 6x + 5 = 0 \quad (x \neq 3)$$

$$(x - 1)(x - 5) = 0$$

$$x_1 = 1$$

$$x_2 = 5$$

$$f''(1) = \frac{8}{(1 - 3)^3} = \frac{8}{-8} = -1 < 0 \quad (x = 1 \text{ ist Maximalstelle})$$

$$f(1) = \frac{1^2 - 5}{1 - 3} = \frac{-4}{-2} = 1 \quad \Rightarrow \quad \text{HoP}(1, 2)$$

$$f''(5) = \frac{8}{(5 - 3)^3} = \frac{8}{8} = 1 > 0 \quad (x = 5 \text{ ist Minimalstelle})$$

Wendepunkte:

$$f''(x) = 0$$

$$\frac{8}{(x-3)^3} = 0$$

$$8 = 0 \quad (x \neq 3)$$

Wendepunkte:

$$f''(x) = 0$$

$$\frac{8}{(x-3)^3} = 0$$

$$8 = 0 \quad (x \neq 3)$$

keine Lösung $\Rightarrow$ keine Wendepunkte

Aufgabe 12.8

$$f(x) = \frac{x - 4}{(x - 7)^2}$$

Aufgabe 12.8

Ableitungen:

Aufgabe 12.8

Ableitungen:

$$f(x) = \frac{x - 4}{(x - 7)^2}$$

Aufgabe 12.8

Ableitungen:

$$f(x) = \frac{x - 4}{(x - 7)^2}$$

Aufgabe 12.8

Ableitungen:

$$f(x) = \frac{x - 4}{(x - 7)^2}$$

$$f'(x) = \frac{1 \cdot (x - 7)^2 - (x - 4) \cdot 2(x - 7)}{(x - 7)^4} = \dots = \frac{1 - x}{(x - 7)^3}$$

Aufgabe 12.8

Ableitungen:

$$f(x) = \frac{x - 4}{(x - 7)^2}$$

$$f'(x) = \frac{1 \cdot (x - 7)^2 - (x - 4) \cdot 2(x - 7)}{(x - 7)^4} = \dots = \frac{1 - x}{(x - 7)^3}$$

$$f''(x) = \frac{(-1)(x - 7)^3 - (1 - x) \cdot 3(x - 7)^2}{(x - 7)^6} = \dots = \frac{2x + 4}{(x - 7)^4}$$

Aufgabe 12.8

Ableitungen:

$$f(x) = \frac{x - 4}{(x - 7)^2}$$

$$f'(x) = \frac{1 \cdot (x - 7)^2 - (x - 4) \cdot 2(x - 7)}{(x - 7)^4} = \dots = \frac{1 - x}{(x - 7)^3}$$

$$f''(x) = \frac{(-1)(x - 7)^3 - (1 - x) \cdot 3(x - 7)^2}{(x - 7)^6} = \dots = \frac{2x + 4}{(x - 7)^4}$$

$$f'''(x) = \frac{2(x - 7)^4 - (2x + 4) \cdot 4(x - 7)^3}{(x - 7)^8} = \dots = \frac{-6x - 30}{(x - 7)^5}$$

Extrempunkte:

Extrempunkte:

$$f'(x) = 0$$

$$\frac{1-x}{(x-7)^2} = 0$$

$$1-x=0 \quad (x \neq 7)$$

$$x = 1$$

Extrempunkte:

$$f'(x) = 0$$

$$\frac{1-x}{(x-7)^2} = 0$$

$$1-x=0 \quad (x \neq 7)$$

$$x = 1$$

$$f''(1) = \frac{2+4}{(1-7)^4} = \frac{6}{(-6)^4} = \frac{1}{6^3} > 0 \quad (x=1 \text{ ist Minimalstelle})$$

Extrempunkte:

$$f'(x) = 0$$

$$\frac{1-x}{(x-7)^2} = 0$$

$$1-x=0 \quad (x \neq 7)$$

$$x=1$$

$$f''(1) = \frac{2+4}{(1-7)^4} = \frac{6}{(-6)^4} = \frac{1}{6^3} > 0 \quad (x=1 \text{ ist Minimalstelle})$$

$$f(1) = \frac{1-4}{(1-7)^2} = \frac{-3}{6^2} = -\frac{1}{12} \quad \Rightarrow \quad \text{TiP}(1, -\frac{1}{12})$$

Extrempunkte:

$$f'(x) = 0$$

$$\frac{1-x}{(x-7)^2} = 0$$

$$1-x=0 \quad (x \neq 7)$$

$$x=1$$

$$f''(1) = \frac{2+4}{(1-7)^4} = \frac{6}{(-6)^4} = \frac{1}{6^3} > 0 \quad (x=1 \text{ ist Minimalstelle})$$

$$f(1) = \frac{1-4}{(1-7)^2} = \frac{-3}{6^2} = -\frac{1}{12} \quad \Rightarrow \quad \text{TiP}(1, -\frac{1}{12})$$

Wendepunkte:

Wendepunkte:

$$f''(x) = 0$$

$$\frac{2x + 4}{(x - 7)^4} = 0$$

$$2x + 4 = 0 \quad (x \neq 7)$$

$$x = -2$$

Wendepunkte:

$$f''(x) = 0$$

$$\frac{2x + 4}{(x - 7)^4} = 0$$

$$2x + 4 = 0 \quad (x \neq 7)$$

$$x = -2$$

$$f'''(-2) = \frac{-6 \cdot (-2) - 30}{(2 - 7)^5} = \frac{-18}{(-9)^5} = \frac{2}{9^4} \neq 0 \quad (x = -2 \text{ ist}$$

Wendestelle)

Wendepunkte:

$$f''(x) = 0$$

$$\frac{2x + 4}{(x - 7)^4} = 0$$

$$2x + 4 = 0 \quad (x \neq 7)$$

$$x = -2$$

$$f'''(-2) = \frac{-6 \cdot (-2) - 30}{(2 - 7)^5} = \frac{-18}{(-9)^5} = \frac{2}{9^4} \neq 0 \quad (x = -2 \text{ ist}$$

Wendestelle)

$$f(2) = \frac{-2 - 4}{(-2 - 7)^2} = \frac{-6}{(-9^2)} = -\frac{2}{27} \quad \Rightarrow \quad \text{WeP}(2, -\frac{2}{27})$$

Aufgabe 12.9

$$f(x) = x^2 + 8\sqrt{x}$$

Aufgabe 12.9

Ableitungen:

Aufgabe 12.9

Ableitungen:

$$f(x) = x^2 + 8\sqrt{x} = x^2 + 8x^{\frac{1}{2}}$$

Aufgabe 12.9

Ableitungen:

$$f(x) = x^2 + 8\sqrt{x} = x^2 + 8x^{\frac{1}{2}}$$

$$f'(x) = 2x + \frac{8}{2\sqrt{x}} = 2x + 4x^{-\frac{1}{2}}$$

Aufgabe 12.9

Ableitungen:

$$f(x) = x^2 + 8\sqrt{x} = x^2 + 8x^{\frac{1}{2}}$$

$$f'(x) = 2x + \frac{8}{2\sqrt{x}} = 2x + 4x^{-\frac{1}{2}}$$

$$f''(x) = 2 - 2x^{-\frac{3}{2}}$$

Aufgabe 12.9

Ableitungen:

$$f(x) = x^2 + 8\sqrt{x} = x^2 + 8x^{\frac{1}{2}}$$

$$f'(x) = 2x + \frac{8}{2\sqrt{x}} = 2x + 4x^{-\frac{1}{2}}$$

$$f''(x) = 2 - 2x^{-\frac{3}{2}}$$

$$f'''(x) = 3x^{-\frac{5}{2}}$$

Extrempunkte:

Extrempunkte:

$$f'(x) = 0$$

Extrempunkte:

$$f'(x) = 0$$

$$2x + \frac{4}{\sqrt{x}} = 0$$

Extrempunkte:

$$f'(x) = 0$$

$$2x + \frac{4}{\sqrt{x}} = 0$$

$$x\sqrt{x} + 2 = 0$$

Extrempunkte:

$$f'(x) = 0$$

$$2x + \frac{4}{\sqrt{x}} = 0$$

$$x\sqrt{x} + 2 = 0$$

keine Lösung $\Rightarrow$ keine Extrempunkte

Wendepunkte:

Wendepunkte:

$$f''(x) = 0$$

Wendepunkte:

$$f''(x) = 0$$

$$2 - 2x^{\frac{3}{2}} = 0$$

Wendepunkte:

$$f''(x) = 0$$

$$2 - 2x^{\frac{3}{2}} = 0$$

$$1 = x^{\frac{3}{2}}$$

Wendepunkte:

$$f''(x) = 0$$

$$2 - 2x^{\frac{3}{2}} = 0$$

$$1 = x^{\frac{3}{2}}$$

$$x = 1$$

Wendepunkte:

$$f''(x) = 0$$

$$2 - 2x^{\frac{3}{2}} = 0$$

$$1 = x^{\frac{3}{2}}$$

$$x = 1$$

$$f'''(1) = 3 \cdot 1^{\frac{-5}{2}} = 3 \neq 0$$

$$f'(1) = 1^2 + 8\sqrt{1} = 9$$

WeP(1, 9)

Aufgabe 12.10

$$f(x) = x \cdot e^x$$

Aufgabe 12.10

Ableitungen:

Aufgabe 12.10

Ableitungen:

$$f(x) = xe^x$$

Aufgabe 12.10

Ableitungen:

$$f(x) = xe^x$$

$$f'(x) = e^x + xe^x = (x + 1)e^x$$

Aufgabe 12.10

Ableitungen:

$$f(x) = xe^x$$

$$f'(x) = e^x + xe^x = (x + 1)e^x$$

$$f''(x) = e^x + (x + 1)e^x = (x + 2)e^x$$

Aufgabe 12.10

Ableitungen:

$$f(x) = xe^x$$

$$f'(x) = e^x + xe^x = (x + 1)e^x$$

$$f''(x) = e^x + (x + 1)e^x = (x + 2)e^x$$

$$f'''(x) = e^x + (x + 2)e^x = (x + 3)e^x$$

Extrempunkte:

Extrempunkte:

$$f'(x) = 0$$

Extrempunkte:

$$f'(x) = 0$$

$$(x + 1)e^x = 0$$

Extrempunkte:

$$f'(x) = 0$$

$$(x + 1)e^x = 0$$

$$x = -1$$

Extrempunkte:

$$f'(x) = 0$$

$$(x + 1)e^x = 0$$

$$x = -1$$

$$f''(-1) = (-1 + 2)e^{-1} = e^{-1} > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{TiP}(-1, -e^{-1})$$

Wendepunkte:

Wendepunkte:

$$f''(x) = 0$$

Wendepunkte:

$$f''(x) = 0$$

$$(x + 2)e^x = 0$$

Wendepunkte:

$$f''(x) = 0$$

$$(x + 2)e^x = 0$$

$$x = -2$$

Wendepunkte:

$$f''(x) = 0$$

$$(x + 2)e^x = 0$$

$$x = -2$$

$$f'''(-2) = (-2 + 3)e^{-1} = e^{-1} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{WeP}(-2, -e^{-2})$$

Aufgabe 12.11

$$f(x) = (x^2 - 4x + 5)e^{-x}$$

Aufgabe 12.11

Ableitungen:

$$f(x) = (x^2 - 4x + 5)e^{-x}$$

$$f'(x) = (2x - 4)e^{-x} - (x^2 - 4x + 5)e^{-x} = (-x^2 + 6x - 9)e^{-x}$$

$$f''(x) = (-2x + 6)e^{-x} - (-x^2 + 6x - 9)e^{-x} = (x^2 - 8x + 15)e^{-x}$$

$$f'''(x) = (2x - 8)e^{-x} - (x^2 - 8x + 15)e^{-x} = (-x^2 + 10x - 23)e^{-x}$$

Aufgabe 12.11

Ableitungen:

$$f(x) = (x^2 - 4x + 5)e^{-x}$$

$$f'(x) = (2x - 4)e^{-x} - (x^2 - 4x + 5)e^{-x} = (-x^2 + 6x - 9)e^{-x}$$

$$f''(x) = (-2x + 6)e^{-x} - (-x^2 + 6x - 9)e^{-x} = (x^2 - 8x + 15)e^{-x}$$

$$f'''(x) = (2x - 8)e^{-x} - (x^2 - 8x + 15)e^{-x} = (-x^2 + 10x - 23)e^{-x}$$

Extrempunkte:

Extrempunkte:

$$f'(x) = 0$$

$$(-x^2 + 6x - 9)e^{-x} = 0$$

$$x^2 - 6x + 9 = 0$$

$$(x - 3) = 0$$

$$x = 3$$

$$f''(3) = (3^2 - 8 \cdot 3 + 15)e^{-3} = 0 \dots (\rightarrow \text{Wendepunkte})$$

Wendepunkte:

$$f'(x) = 0$$

$$(x^2 + 6x - 9)e^{-x} = 0$$

$$x^2 - 6x + 9 = 0$$

$$(x - 5)(x - 3)e^{-x} = 0$$

$$x_1 = 3$$

$$x_2 = 5$$

Wendepunkte:

$$f'(x) = 0$$

$$(x^2 + 6x - 9)e^{-x} = 0$$

$$x^2 - 6x + 9 = 0$$

$$(x - 5)(x - 3)e^{-x} = 0$$

$$x_1 = 3$$

$$x_2 = 5$$

$$f'''(3) = (-3^2 + 10 \cdot 3 - 23)e^{-3} = -2e^{-3} \neq 0$$

Wendepunkte:

$$f'(x) = 0$$

$$(x^2 + 6x - 9)e^{-x} = 0$$

$$x^2 - 6x + 9 = 0$$

$$(x - 5)(x - 3)e^{-x} = 0$$

$$x_1 = 3$$

$$x_2 = 5$$

$$f'''(3) = (-3^2 + 10 \cdot 3 - 23)e^{-3} = -2e^{-3} \neq 0$$

$$f(3) = 2e^{-3} \Rightarrow \text{TeP}(3, 2e^{-3})$$

Wendepunkte:

$$f'(x) = 0$$

$$(x^2 + 6x - 9)e^{-x} = 0$$

$$x^2 - 6x + 9 = 0$$

$$(x - 5)(x - 3)e^{-x} = 0$$

$$x_1 = 3$$

$$x_2 = 5$$

$$f'''(3) = (-3^2 + 10 \cdot 3 - 23)e^{-3} = -2e^{-3} \neq 0$$

$$f(3) = 2e^{-3} \Rightarrow \text{TeP}(3, 2e^{-3})$$

$$f'''(5) = (-5^2 + 10 \cdot 5 - 23)e^{-5} = 2e^{-5} \Rightarrow \text{WeP}(5, 10e^{-5})$$