
Differenzialrechnung

Übungen (II)

Aufgabe 11.1

Entwickle die Funktion f mit der Gleichung $f(x) = \sin x$ nach dem Satz von Taylor in eine Potenzreihe an der Stelle $x_0 = 0$.

Aufgabe 11.2

Entwickle die Funktion $f(x) = \sqrt{x}$ nach dem Satz von Taylor in eine Potenzreihe bis zur Potenz x^5 an der Stelle $x_0 = 1$.

Aufgabe 11.3

Gegeben ist die Funktion $f(x) = \ln x$.

- (a) Entwickle f nach dem Satz von Taylor in eine Potenzreihe an der Stelle $x_0 = 1$.
- (b) Berechne mit der Formel aus (a) und deinem Taschenrechner näherungsweise den Wert von $\ln 2$, indem du die Teilsummen für $n = 1, 2, 3, \dots, 200$ bestimmst und die Werte in einer Liste abspeicherst. Wie viele Stellen sind für $n = 200$ korrekt?

Aufgabe 11.4

Berechne die Lösung der Gleichung $x^2 = e^x$ näherungsweise, indem du die Exponentialfunktion in eine Potenzreihe bis zur Potenz x^3 an der Stelle $x_0 = 0$ entwickelst.

Aufgabe 11.5

Berechne den Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$$

mit Hilfe einer Potenzreihenentwicklung der Sinusfunktion.

Aufgabe 11.6

Schreibe das Polynom $p(x) = x^4 + 3x^3 + x^2 + 2x + 1$ mit Hilfe des Satzes von Taylor um in die Form

$$p(x) = c_4(x - 1)^4 + c_3(x - 1)^3 + c_2(x - 1)^2 + c_1(x - 1) + c_0.$$

Bestimme die Extrem- und Wendepunkte der Funktion.

Aufgabe 12.1

$$f(x) = x^2 - 6x + 8$$

Aufgabe 12.2

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x - 18$$

Aufgabe 12.3

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + x + 1$$

Aufgabe 12.4

$$f(x) = x^4 + 4x^3 - 16x - 20$$

Aufgabe 12.5

$$f(x) = x^5 + 15x^3$$

Aufgabe 12.6

$$f(x) = \frac{2x^3 + 6x^2 - 8}{2x}$$

Aufgabe 12.7

$$f(x) = \frac{x^2 - 5}{x - 3}$$

Aufgabe 12.8

$$f(x) = \frac{x - 4}{(x - 7)^2}$$

Aufgabe 12.9

$$f(x) = x^2 + 8\sqrt{x}$$

Aufgabe 12.10

$$f(x) = x \cdot e^x$$

Aufgabe 12.11

$$f(x) = (x^2 - 4x + 5)e^{-x}$$

Aufgabe 12.12

$$f(x) = x - \ln(x)$$

Aufgabe 12.13

$$f(x) = \frac{x}{\ln(x)}$$

Aufgabe 12.14

$$f(x) = \cos 3x + 1$$

Aufgabe 12.15

$$f(x) = x + \sin x$$

- Wenn nichts anderes steht, sind die Lösungen der auftretenden Gleichungen ganzzahlig (Horner).
- Es darf ein nicht programmierbarer und nicht grafikfähiger Taschenrechner verwendet werden

Aufgabe 13.1

Diskutiere die Funktion mit der Gleichung $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$.

Definitionsbereich, Symmetrie, asymptotisches Verhalten, Asymptoten, Nullstellen, Ordinatenabschnitt, Extrempunkte, Wendepunkte, Graph (1 Häuschen = 1 Einheit)

Aufgabe 13.2

Diskutiere die Funktion mit der Gleichung $f(x) = x^4 - 6x^2 + 8x - 3$.

Definitionsbereich, Symmetrie, asymptotisches Verhalten, Asymptoten, Nullstellen, Ordinatenabschnitt, Extrempunkte, Wendepunkte, Graph (1 Häuschen = 1 Einheit)

Aufgabe 13.3

Diskutiere die Funktion mit der Gleichung $f(x) = \frac{x^2 + 3x}{x + 4}$.

Definitionsbereich, Symmetrie, asymptotisches Verhalten, Asymptoten, Nullstellen, Ordinatenabschnitt, Extrempunkte, Wendepunkte, Graph (1 Häuschen = 1 Einheit)

Aufgabe 13.4

Diskutiere die Funktion mit der Gleichung $f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{(x - 4)^2}$.

Definitionsbereich, Symmetrie, asymptotisches Verhalten, Asymptoten, Nullstellen, Ordinatenabschnitt, Extrempunkte, Wendepunkte, Graph (1 Häuschen = 1 Einheit)

Aufgabe 13.5

Diskutiere die Funktion mit der Gleichung $f(x) = (x + 2)e^{1-x}$.

Definitionsbereich, Symmetrie, asymptotisches Verhalten, Asymptoten, Nullstellen, Ordinatenabschnitt, Extrempunkte, Wendepunkte, Graph ($-4 \leq x \leq 8$; $-2 \leq y \leq 10$)

Aufgabe 13.6

Diskutiere die Funktion mit der Gleichung $f(x) = \ln(x^2 + 4x + 5)$.

Definitionsbereich, Symmetrie, asymptotisches Verhalten, Asymptoten, Nullstellen, Ordinatenabschnitt, Extrempunkte, Wendepunkte, Graph ($-5 \leq x \leq 5$; $-2 \leq y \leq 5$)

Aufgabe 14.1

Der Graph einer Polynomfunktion dritten Grades hat im Punkt $P(2, 1)$ einen Terrassenpunkt und schneidet die x -Achse an der Stelle $x = 4$. Bestimme die Gleichung der Funktion.

Aufgabe 14.2

Bestimme die Gleichung des Polynoms dritten Grades mit einer Nullstelle bei $x = -2$. Die Tangente im Wendepunkt $W(0, y)$ hat die Gleichung $y = \frac{1}{3}x + 2$.

Aufgabe 14.3

Der Graph einer ganzrationalen Funktion dritten Grades berührt die x -Achse im Punkt $P(2, 0)$ und schneidet diese im Punkt $Q(-2, 0)$ unter einem Winkel von 45° . Wie lautet die Funktionsgleichung dieser Funktion?

Aufgabe 14.4

Eine Polynomfunktion dritten Grades hat einen zum Ursprung symmetrischen Graphen und im Punkt $(-2, -4)$ einen Tiefpunkt. Bestimme die Gleichung dieser Funktion.

Aufgabe 14.5

Eine Parabel 3. Ordnung geht durch den Ursprung und hat in $P(-2, 4)$ einen Wendepunkt. Die Wendetangente schneidet die x -Achse in $Q(4, 0)$. Bestimme die Gleichung der Parabel.

Aufgabe 14.6

Eine Parabel 3. Ordnung ist symmetrisch zum Ursprung. Die Wendetangente hat die Steigung $-\frac{9}{16}$; die 1. Winkelhalbierende schneidet die Parabel an der Stelle $x = \frac{5}{4}$.

Aufgabe 14.7

Eine zur y -Achse symmetrische Parabel 4. Ordnung hat in $P(2, 0)$ eine Wendetangente mit der Steigung $-\frac{4}{3}$.

Aufgabe 14.8

Eine Polynomfunktion f hat an der Stelle $x = 1$ eine doppelte Nullstelle und es ist $f''(x) = 6x$. Bestimme die Gleichung der Polynomfunktion.

Aufgabe 15.1

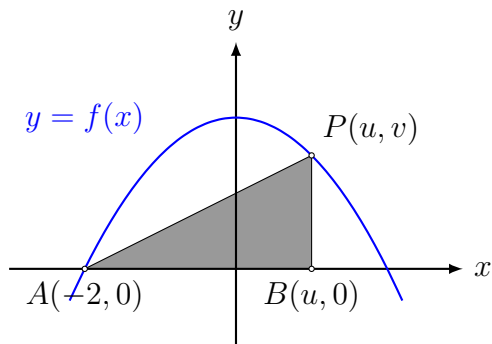
Zerlege die Zahl 36 so in zwei Summanden, dass die Summe ihrer Quadrate möglichst klein wird.

Aufgabe 15.2

Welches rechtwinklige Dreieck mit der Hypotenuse $c = 8$ cm erzeugt einen Kegel mit maximalem Volumen, wenn man es um eine seiner Katheten rotieren lässt?

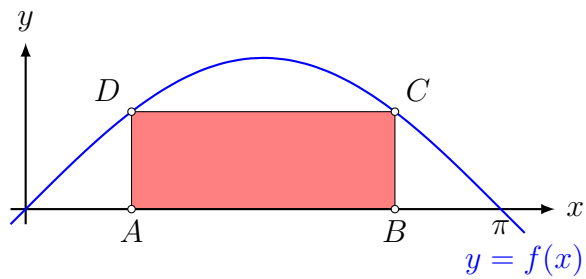
Aufgabe 15.3

Gesucht ist der Punkt $P(u, v)$ auf der Parabel mit der Gleichung $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2$, so, dass das Dreieck ABP mit $A(-2, 0)$ und $B(u, 0)$ den grösstmöglichen Flächeninhalt hat.



Aufgabe 15.4

Der Punkt $A(u, 0)$ mit $0 < u < \frac{\pi}{2}$ ist die linke untere Ecke eines Rechtecks $ABCD$. Die übrigen Ecken liegen auf der x -Achse und der Sinuskurve. Für welches u erhalten wir den grössten Flächeninhalt von $ABCD$ und wie gross ist er?

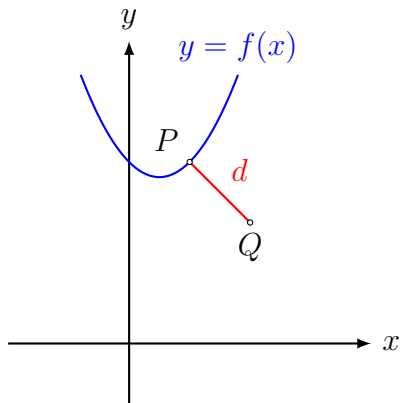


Aufgabe 15.5

Einem Zylinder mit Radius $r = 5$ cm und $h = 4$ cm soll der inhaltsskleinste Kegel so umschrieben werden, dass die Grundflächen beider Körper in derselben Ebene liegen. Welche Abmessungen muss der Kegel haben?

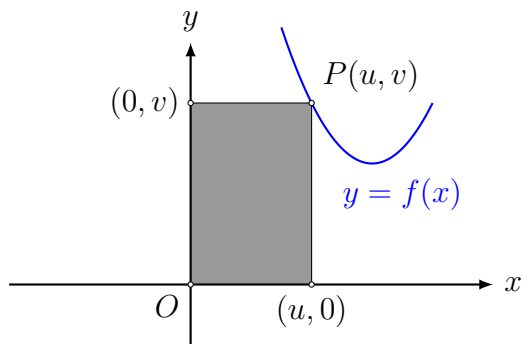
Aufgabe 15.6

Bestimme den Punkt P auf der Kurve $k: y = x^2 - x + 3$, der vom Punkt $Q(2, 2)$ den kleinsten Abstand besitzt.



Aufgabe 15.7

Für welchen Punkt $P(u, v)$ auf der Kurve mit der Gleichung $y = x^2 - 8x + 21$ mit $D_f = [0, 4]$ hat das achsenparallele Rechteck mit den gegenüberliegenden Ecken $P(x, y)$ und $O(0, 0)$ maximalen Inhalt?

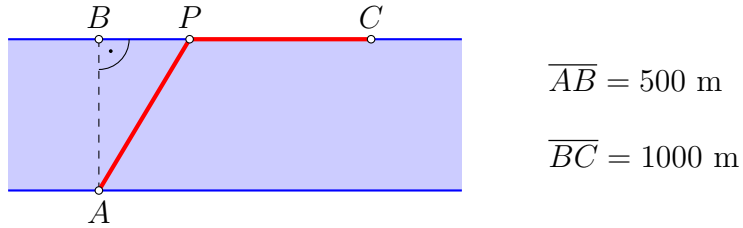


Aufgabe 15.8

Jemand möchte möglichst schnell vom Punkt A auf der einen Seite eines Flussufers zu einem 1000 m flussabwärts gelegenen Punkt C auf der anderen Seite eines 500 Meter breiten und gerade verlaufenden Flusses gelangen.

Die Person erreicht schwimmend eine mittlere Geschwindigkeit von 50 Metern pro Minute und kann auf dem Land durchschnittlich 300 Meter in einer Minute zurücklegen.

Bestimme die minimale Zeit sowie die Länge der zugehörigen Gesamtstrecke, welche die Person zurücklegt, wenn sie den Fluss in einer idealen geraden Linie überquert und die Strömungsgeschwindigkeit des Flusses vernachlässigt wird.



Aufgabe 16.1

Gegeben ist die Funktionenschar $f_t(x) = x^3 + tx^2 + t - 1$ mit $t \in \mathbb{R}$.

Für welche Werte des Parameters t geht der Graph von f_t durch den Punkt $P(-2, 1)$?

Aufgabe 16.2

Gegeben ist die Funktionenschar $f_t(x) = tx^3 - x^2 + t$ mit $t \in \mathbb{R}$.

Für welchen Wert von t hat die Tangente von f_t an der Stelle $x = 2$ die Steigung 4?

Aufgabe 16.3

Gegeben ist die Funktionenschar $f_t(x) = x^3 + tx - 2t$ mit $t \in \mathbb{R}$.

Welche Punkte liegen auf allen Graphen der Funktionenschar?

Aufgabe 16.4

Bestimme allgemein die Nullstellen der Funktionenschar $f_t(x) = x^2 - tx - 2t^2$.

Aufgabe 16.5

Für welche Werte des Parameters t hat die Funktionenschar $f_t(x) = x^2 + tx + 1$ genau eine Nullstelle?

Aufgabe 16.6

Für welche Werte des Parameters t hat die Funktionenschar $f_t(x) = x^2 + 2x + t$ genau zwei Nullstellen?

Aufgabe 16.7

Bestimme allgemein die Extrempunkte der Funktionenschar $f_t(x) = tx^3 - 3tx$ mit $t > 0$.

Aufgabe 16.8

Gegeben ist die Kurvenschar $f_a(x) = ax^2 - x^3$ mit $a > 0$. Auf welcher Kurve liegen alle Wendepunkte?

Aufgabe 16.9

Gegeben ist die Kurvenschar $f_t(x) = tx - x^2$ mit $t > 0$. Für welches t liegt der Hochpunkt des Graphen auf der 1. Winkelhalbierenden?

Aufgabe 16.10

Gegeben ist die Funktionenschar $f_t: y = \frac{4}{3}tx^3 - 4tx + 1 \quad (t > 0)$

- (a) Für welchen Wert des Parameters t geht der Graph G_f durch den Punkt $P(2, 9)$?
- (b) Bestimme die Koordinaten der Hochpunkte der Kurvenschar in Abhängigkeit des Parameters t .
- (c) In welchen Punkten schneiden sich die Graphen von f_t für alle $t > 0$?

Aufgabe 17.1

Beschreibe die Art der gebrochenrationalen Funktion mit dem richtigen Fachausdruck.

$$(a) \quad f(x) = \frac{x^2 - 5x + 1}{7x^3 + 2x - 1}$$

$$(b) \quad f(x) = \frac{x + 3}{x - 4}$$

Aufgabe 17.2

Beschreibe die Art der gebrochenrationalen Funktion mit dem richtigen Fachausdruck.

$$(a) \quad f(x) = \frac{2x^2 + 7x - 9}{11}$$

$$(b) \quad f(x) = \frac{(x + 1)^5}{(x^3 - 1)^2}$$

Aufgabe 17.3

Bestimme den Definitionsbereich der gebrochenrationalen Funktion f .

$$(a) \quad f(x) = \frac{(x - 1)(x + 5)}{x(x - 1)(x + 3)}$$

$$(b) \quad f(x) = \frac{x^5 + 2x - 4}{x^2 - 3x - 10}$$

Aufgabe 17.4

Stelle die unecht gebrochenrationale Funktion

$$f(x) = \frac{x^3 + 2x^2 - 3x + 4}{x - 1}$$

mit Hilfe einer Polynomdivision als Summe aus einer ganzrationalen Funktion und einer echt gebrochenrationalen Funktion dar.

Aufgabe 17.5

Stelle die unecht gebrochenrationale Funktion

$$f(x) = \frac{2x^3 - 5x^2 + 3x - 1}{x^2 + x + 1}$$

mit Hilfe einer Polynomdivision als Summe aus einer ganzrationalen Funktion und einer echt gebrochenrationalen Funktion dar.

Aufgabe 17.6

Stelle die unecht gebrochenrationale Funktion

$$f(x) = \frac{x^5 - 1}{x + 1}$$

mit Hilfe einer Polynomdivision als Summe aus einer ganzrationalen Funktion und einer echt gebrochenrationalen Funktion dar.

Aufgabe 17.7

Bestimme Definitionsmenge D , Nullstellenmenge N und alle Definitionslücken mit Typ.

$$f(x) = \frac{x-3}{x+5}$$

Aufgabe 17.8

Bestimme Definitionsmenge D , Nullstellenmenge N und den Typ aller Definitionslücken.

$$f(x) = \frac{x+1}{x^2-1}$$

Aufgabe 17.9

Bestimme Definitionsmenge D , Nullstellenmenge N und den Typ aller Definitionslücken.

$$f(x) = \frac{5x-3}{x^2+1}$$

Aufgabe 17.10

Bestimme Definitionsmenge D , Nullstellenmenge N und den Typ aller Definitionslücken.

$$f(x) = 1 + \frac{x}{x+1}$$

Aufgabe 17.11

Bestimme Definitionsmenge D , Nullstellenmenge N und den Typ aller Definitionslücken.

$$f(x) = \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 5x + 6}$$

Aufgabe 17.12

Bestimme die Gleichung einer ganzrationalen asymptotischen Näherungsfunktion.

(a) $f(x) = \frac{x+2}{x-1}$

(b) $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 3}{x+2}$

Aufgabe 17.13

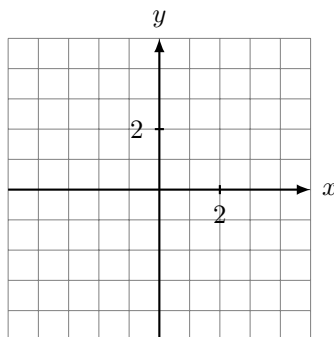
Bestimme den Ordinatenabschnitt der gebrochenrationalen Funktion.

(a) $f(x) = \frac{x+1}{2x-1}$

(b) $f(x) = \frac{x^3 - 4x^2 + 6x + 2}{x^2 - 2x + 4}$

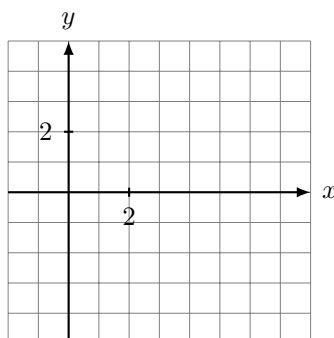
Aufgabe 17.14

Skizziere den Graphen von $f: y = \frac{1}{x+1}$ ohne Taschenrechner.



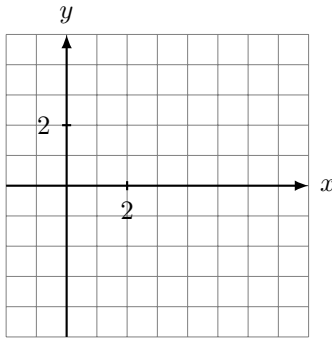
Aufgabe 17.15

Skizziere den Graphen von $f: y = \frac{x+2}{(x-3)^2}$ ohne Taschenrechner.



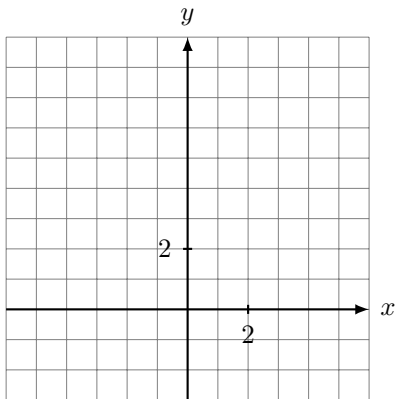
Aufgabe 17.16

Skizziere den Graphen von $f: y = \frac{1}{(x-2)^2}$ ohne Taschenrechner.



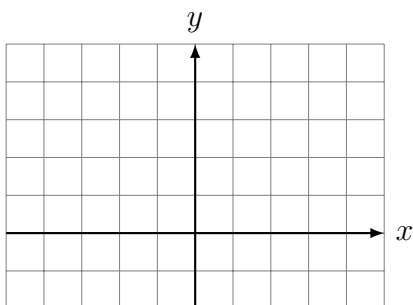
Aufgabe 17.17

Skizziere den Graphen von $f(x) = f: y = \frac{x(x+2)}{x-1}$ ohne Taschenrechner.



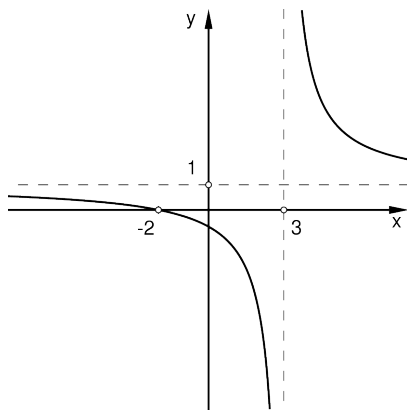
Aufgabe 17.18

Skizziere den Graphen von $f(x) = \frac{3}{1+x^2}$ ohne Taschenrechner.



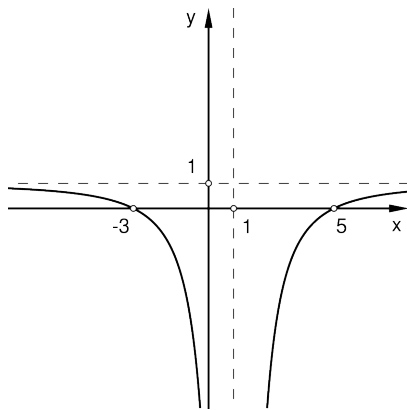
Aufgabe 17.19

Bestimme die Gleichung der Funktion f aus ihrem Graphen.



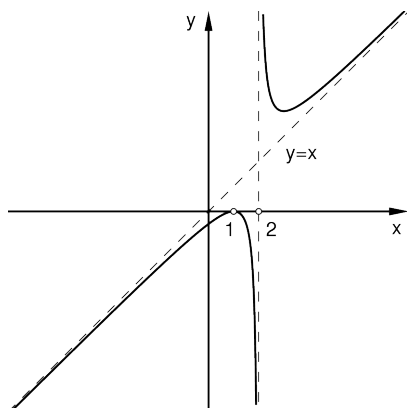
Aufgabe 17.20

Bestimme die Gleichung der Funktion f aus ihrem Graphen.



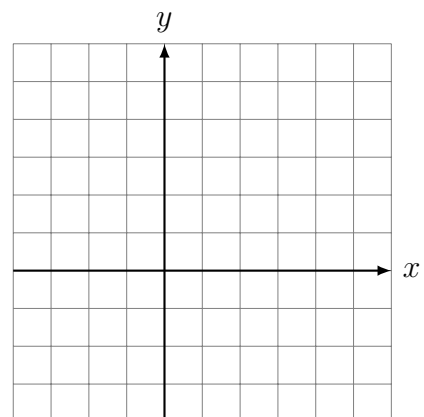
Aufgabe 17.21

Bestimme die Gleichung der Funktion f aus ihrem Graphen.



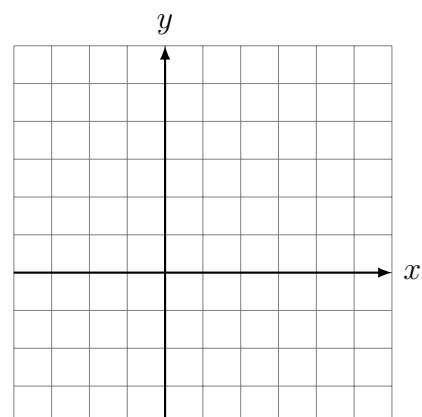
Aufgabe 17.22

Diskutiere die Funktion $f(x) = \frac{4 + x^2}{x^2 - 9}$.



Aufgabe 17.23

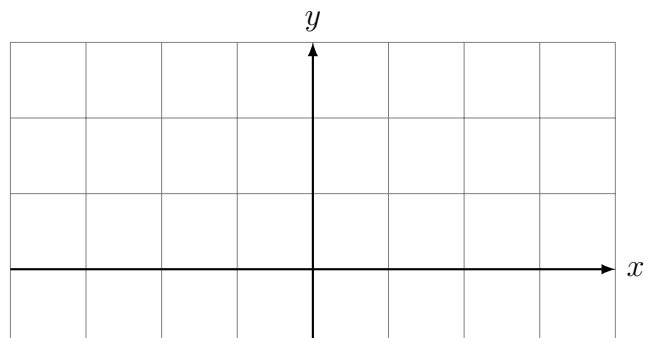
Diskutiere die Funktion $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$.



Führe eine Kurvendiskussion durch.

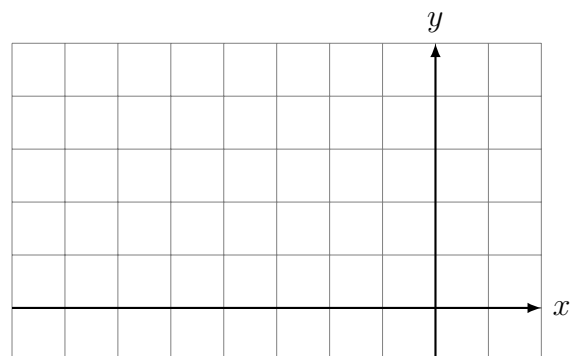
Aufgabe 18.1

Diskutiere die Funktion mit der Gleichung $f(x) = 2e^{-\frac{1}{2}x^2}$.



Aufgabe 18.2

Diskutiere die Funktion mit der Gleichung $f(x) = (x^2 - 2x + 2)e^x$.



Aufgabe 18.3

Diskutiere die Funktion mit der Gleichung $f(x) = \frac{5 \ln x}{x}$.

