Differenzialrechnung

Übungen (I) (L+)

Version vom 18. August 2025

Aufgabe 1.1

(a) $\frac{1}{2}$, $\frac{4}{3}$, $\frac{9}{4}$, $\frac{16}{5}$, $\frac{25}{6}$, ...

nicht beschränkt, monoton wachsend

(b) -1, $\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $-\frac{1}{5}$, ...

beschränkt, nicht monoton

(c) $-\frac{2}{3}$, $-\frac{2}{15}$, $-\frac{2}{35}$, $-\frac{2}{63}$, $-\frac{2}{99}$, ...

beschränkt, monoton wachsend

(d) 8, $\frac{27}{8}$, $\frac{64}{27}$, $\frac{125}{64}$, $\frac{216}{125}$, ...

beschränkt, monoton fallend

(e) 2, 1.4142, 1.2599, 1.1892, 1.1487, ...

beschränkt, monoton fallend

(f) 0.41421, 0.31784, 0.26795, 0.23607, 0.21342, ...

beschränkt, monoton fallend

(g) $\frac{1}{2}$, 1, $\frac{9}{8}$, 1, $\frac{25}{32}$, ...

beschränkt, nicht monoton

Aufgabe 1.2

(a) divergent

(b) konvergent; $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-1)^n}{n} = 0$

(c) divergent

(d) konvergent; $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\cos n}{n} = 0$

(e) konvergent; $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{3n}{n+1} - \dfrac{n}{n+4}\right) = 2$

(f) konvergent; $\lim\limits_{n\to\infty} 0.8^n = 0$

(g) divergent

(h) divergent

(i) konvergent; $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}$

(j) konvergent; $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

Aufgabe 1.3

(a) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

(b) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} - 2 = -2$

(c) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 0$

(d) $\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2-1}{4n^2+2} = \frac{3}{4}$

(e) $\lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{n}{4n+1}} = \frac{1}{2}$

(f) $\lim_{n\to\infty} \mathrm{e}^{\frac{1}{n}} = 1$

(g) $\lim_{n\to\infty} \mathrm{e}^{-n} = 0$

Aufgabe 1.4

(a) $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$

(b) $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2}$

(c) $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$

(d) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

(e) divergent

(f) $\lim_{n\to\infty} a_n = 2$

Aufgabe 1.5

(a) $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2}$

(b) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

(c) $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$

(d) divergent

Aufgabe 1.6

(a) $a_n = n$ monoton aber nicht konvegent.

(b) $a_n = \frac{1}{n}$ beschränkt aber nicht divergent.

(c) $a_n = (-1)^n$ divergent aber nicht unbeschränkt.

(d) $a_n = (-1)^n$ divergent aber $1/(-1)^n$ ist nicht konvergent.

Aufgabe 2.1

$$\lim_{x\to 2}(3x-7) = -1$$

Aufgabe 2.2

$$\lim_{x\to \pi}\sin 3x = 0$$

Aufgabe 2.3

$$\lim_{x\to 0}(3x^2-4x+1) = 1$$

Aufgabe 2.4

$$\lim_{x\to 0^+}\sqrt{x} = 0$$

Aufgabe 2.5

$$\lim_{x\to 3}\frac{2x^2-6x}{x-3} = \lim_{x\to 3}\frac{2x(x-3)}{x-3} = \lim_{x\to 3}2x = 6$$

Aufgabe 2.6

$$\lim_{x\to -2}\frac{(x+2)^3}{(x+2)} = \lim_{x\to -2}(x+2)^2 = 0$$

Aufgabe 2.7

$$\lim_{x\to 4}\frac{x^2-16}{x-4} = \lim_{x\to 4}\frac{(x-4)(x+4)}{x-4} = \lim_{x\to 4}(x+4) = 8$$

Aufgabe 2.8

$$\lim_{x\to -\frac{2}{3}}\frac{9x^2-4}{3x+2} = \lim_{x\to -\frac{2}{3}}\frac{(3x-2)(3x+2)}{3x+2} = \lim_{x\to -\frac{2}{3}}(3x-2) = -4$$

Aufgabe 2.9

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}\frac{x^4-a^4}{x-a} &= \lim_{x\to a}\frac{(x^2+a^2)(x^2-a^2)}{x-a} = \lim_{x\to a}\frac{(x^2+a^2)(x-a)(x+a)}{x-a}\\ &= \lim_{x\to a}(x^2+a^2)(x+a) = 4a^3\end{aligned}$$

Aufgabe 2.10

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{1}{x-2} = \infty$$

Aufgabe 2.11

$$\lim_{x\to -2} \frac{x^2+4x+4}{x^2-4} = \lim_{x\to -2} \frac{(x+2)^2}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x\to -2} \frac{x+2}{x-2} = \frac{0}{-4} = 0$$

Aufgabe 2.12

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^3-5x^2+2x+8}{x^3-7x+6} = \dots$$

Setzt man $x = 2$ in Zähler und Nenner ein, erhält man $0/0$. Also ist $(x-2)$ ein Linearfaktor von Zähler und Nenner.

Polynomdivision $(x^3-5x^2+2x+8) : (x-2)$ mit Horner-Schema:

		-5	2	8
2	1	-3	-4	0

$\Rightarrow (x^3-5x^2+2x+8) : (x-2) = x^2-3x-4$

Polynomdivision $(x^3-7x+6) : (x-2)$ mit Horner-Schema

		0	-7	6
2	1	2	-3	0

$\Rightarrow (x^3-7x+6) : (x-2) = x^2+2x-3$

$$\dots = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x^2-3x-4)}{(x-2)(x^2+2x-3)} = \lim_{x\to 2} \frac{x^2-3x-4}{x^2+2x-3} = -\frac{6}{5}$$

Aufgabe 2.13

$$\lim_{x\to 1} \frac{1-x}{1-\sqrt{x}} = \lim_{x\to 1} \frac{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}{1-\sqrt{x}} = \lim_{x\to 1}(1+\sqrt{x}) = 2$$

Aufgabe 2.14

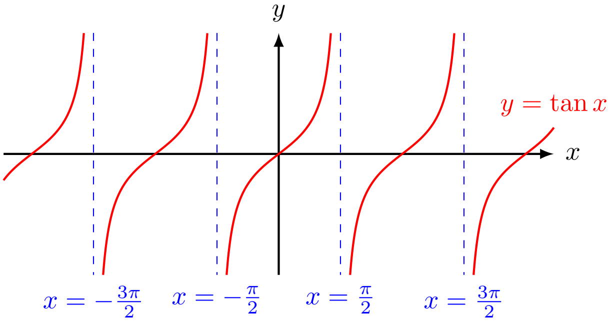
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \infty$$

Aufgabe 2.15

$$\lim_{x\to 3^-} \frac{1}{x-3} = -\infty$$

Aufgabe 2.16

$\lim_{x\to\pi^+} \tan\frac{x}{2} = -\infty$



Aufgabe 2.17

$\lim_{x\to\pi^-} \tan\frac{x}{2} = \infty$ (siehe Graph)

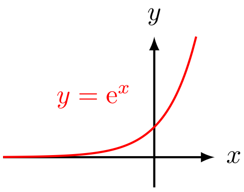
Aufgabe 2.18

$\lim_{x\to 0^+} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} = \dots$

Aus $x \to 0^+$ folgt $-\frac{1}{x} \to -\infty$.

Mit der Substitution $a = -\frac{1}{x}$ lässt sich der obige Grenzwert etwas vereinfachen:

$\dots = \lim_{a\to-\infty} \mathrm{e}^a = 0$



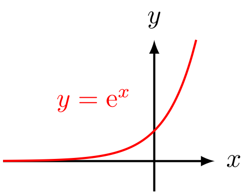
Aufgabe 2.19

$\lim_{x\to 0^-} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} = \dots$

Aus $x \to 0^-$ folgt $-\frac{1}{x} \to +\infty$.

Mit der Substitution $a = -\frac{1}{x}$ lässt sich der obige Grenzwert etwas vereinfachen:

$\dots = \lim_{a\to+\infty} \mathrm{e}^a = \infty$



Aufgabe 2.20

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Aufgabe 2.21

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x}{|x|} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x} = \lim_{x\to 0^+} 1 = 1$$

Der Betrag darf weggelassen werden, da die Folge sich von der positiven Seite der Null nähert.

Aufgabe 2.22

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{x}{|x|} = \lim_{x\to 0^-} \frac{x}{-x} = \lim_{x\to 0^-} -1 = -1$$

Der Betrag darf weggelassen werden, wenn man dafür einen Vorzeichenwechsel durchführt, denn die Folge besteht nur aus negativen Werten.

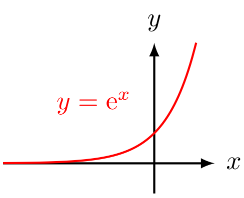
Aufgabe 2.23

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}} &= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x - 0}{x-\frac{\pi}{2}} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x - \cos\frac{\pi}{2}}{x-\frac{\pi}{2}} \\
&= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{-2\sin\left(\left[x-\frac{\pi}{2}\right]/2\right)\sin\left(\left[x+\frac{\pi}{2}\right]/2\right)}{x-\frac{\pi}{2}} \\
&= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{-\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}{\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}} \\
&= -\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}{\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}} \cdot \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right) = -1\cdot\sin\tfrac{\pi}{2} = -1\cdot 1 = -1
\end{aligned}$$

Diese Umformungen sind mehr für Interessierte gedacht. Ansonstn lässwt sich die Aufgabe auch mit dem Taschenrechner lösen.

Aufgabe 2.24

$$\lim_{x\to 0} \mathrm{e}^{-1/x^2} = \mathrm{e}^{-\infty} = 0$$



Aufgabe 2.25

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Aufgabe 2.26

$$\lim_{x\to\infty} 2^x = \infty$$

Aufgabe 2.27

$$\lim_{x\to-\infty} 2^x = 0$$

Aufgabe 2.28

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3+x}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{3}{x} + \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{3}{x} + \lim_{x\to\infty} 1 = 0 + 1 = 1$$

Aufgabe 2.29

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^3+2x+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1/x}{1+2/x^2+1/x^2} = \frac{0}{1+0+0} = 0$$

Aufgabe 2.30

$$\lim_{x\to\infty} \frac{4x+3}{5x-9} = \lim_{x\to\infty} \frac{4+3/x}{5-9/x} = \frac{4}{5}$$

Aufgabe 2.31

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+4x+2}{2x^2+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1+4/x+2/x^2}{2+1/x^2} = \frac{1}{2}$$

Aufgabe 2.32

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3+2}{x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{x+2/x^2}{1} = \infty$$

Aufgabe 2.33

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}+1}{x+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1/\sqrt{x}+1/x}{1+1/x} = 0$$

Aufgabe 2.34

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1+x+x^2}{x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{1/x^2+1/x+1}{1} = 1$$

Aufgabe 2.35

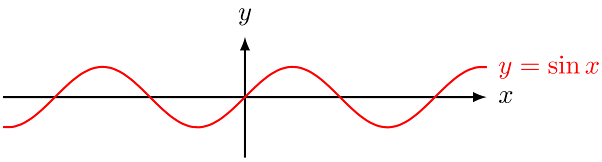
$$\lim_{x\to\infty} \frac{2+x-x^2}{2x^2+3} = \lim_{x\to\infty} \frac{2/x^2+1/x-1}{2+3/x^2} = \frac{0+0-1}{2+0} = -\frac{1}{2}$$

Aufgabe 2.36

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{2x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}/x}{2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1+1/x^2}}{2}=\frac{\sqrt{1+0}}{2}=\frac{1}{2}$$

Aufgabe 2.37

$\lim_{x\to\infty}\sin x$ existiert nicht

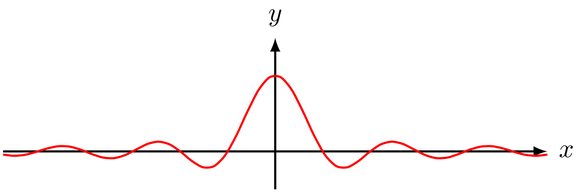


Die Werte der Sinusfunktion nähern sich für $x \to \infty$ keinem festen Wert an.

Aufgabe 2.38

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=0$$

Da die Werte im Zähler zwischen -1 und $+1$ beschränkt sind, der Nenner aber immer grösser wird, strebt der Wert des Quotienten gegen Null.



Aufgabe 2.39

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{|x|}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{-x}=\lim_{x\to-\infty}-1=-1$$

Das Auflösen des Betrags ist möglich, da die Werte der Folge $x \to -\infty$ ab einem bestimmten Folgeglied x_N immer negativ sein müssen.

Aufgabe 2.40

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^8}{2^x}=0$$

Jede Exponentialfunktion $y = b^x$ $(b > 1)$ wächst mit zunehmendem x schneller als jede Potenzfunktion $y = x^a$.

Aufgabe 2.41

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2^x}{x^5}=\infty$$

Jede Exponentialfunktion $y = b^x$ $(b > 1)$ wächst mit zunehmendem x schneller als jede Potenzfunktion $y = x^a$.

Aufgabe 2.42

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e}$$

Dieser Grenzwert sollte bekannt sein. (Formelsammlung S. 52)

Aufgabe 2.43

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt[x]{100} = 1$$

Aufgabe 3.1

(a) $f(2+h) = (2+h)^2 - 4(2+h) + 5$

$$= 4 + 4h + h^2 - 8 - 4h + 5$$

$$= h^2 + 1$$

(b) $f(3+h) = \dfrac{(3+h)+2}{(3+h)-3} = \dfrac{h+5}{h}$

$$= 1 + 5/h$$

(c) $f(6+h) = (6+h-4)^3 = (h+2)^3$

$$= h^3 + 3 \cdot 2^1 \cdot h^2 + 3 \cdot 2^2 \cdot h^1 + 2^3$$

$$= h^3 + 6h^2 + 12h + 8$$

Aufgabe 3.2

$f(x) = x^2$; $x_0 = -3$

$$f'(-3) = \lim_{h\to 0} \frac{f(-3+h) - f(-3)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(-3+h)^2 - 3^2}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(-3+h)^2 - 9}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{9 - 6h + h^2 - 9}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-6h + h^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h(-6+h)}{h} = \lim_{h\to 0}(-6+h) = -6$$

Aufgabe 3.3

$f(x) = 3x - 4$; $x_0 = 2$

$$f'(2) = \lim_{h\to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{3(2+h) - 4 - 2}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{6 + 3h - 6}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{3h}{h} = \lim_{h\to 0} 3 = 3$$

Aufgabe 3.4

$f(x) = x^3$; $x_0 = 2$

$$f'(2) = \lim_{h\to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(2+h)^3 - 2^3}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{8 + 3 \cdot 2^2 \cdot h + 3 \cdot 2 \cdot h^2 + h^3 - 8}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h(12 + 6h + h^2)}{h} = \lim_{h\to 0}(12 + 6h + h^2) = 12$$

Aufgabe 3.5

$f(x) = \dfrac{1}{x}$; $x_0 = 4$

$$\begin{aligned}
f'(4) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(4+h) - f(4)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[\frac{1}{4+h} - \frac{1}{4}\right] \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[\frac{4}{4(4+h)} - \frac{(4+h)}{4(4+h)}\right] = \lim_{h\to 0}\left[\frac{1}{h}\cdot\frac{4-(4+h)}{4(4+h)}\right] \\
&= \lim_{h\to 0}\left[\frac{1}{h}\cdot\frac{-h}{4(4+h)}\right] = \lim_{h\to 0}\frac{-1}{4(4+h)} = -\frac{1}{16}
\end{aligned}$$

Aufgabe 3.6

$f(x) = \dfrac{1}{x+1}$; $x_0 = 1$

$$\begin{aligned}
f'(1) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[\frac{1}{(1+h)+1} - \frac{1}{1+1}\right] \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[\frac{1}{2+h} - \frac{1}{2}\right] = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[\frac{2-(2+h)}{2(2+h)}\right] \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[\frac{-h}{2(2+h)}\right] = \lim_{h\to 0}\frac{-1}{2(2+h)} = -\frac{1}{4}
\end{aligned}$$

Aufgabe 3.7

$f(x) = \dfrac{1}{x^2}$; $x_0 = 2$

$$\begin{aligned}
f'(2) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[\frac{1}{(2+h)^2} - \frac{1}{4}\right] \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[\frac{4-(2+h)^2}{4(2+h)^2}\right] = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[\frac{4-(4+4h+h^2)}{4(2+h)^2}\right] \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[\frac{-4h-h^2}{4(2+h)^2}\right] = \lim_{h\to 0}\frac{-4-h}{4(2+h)^2} = -\frac{1}{4}
\end{aligned}$$

Aufgabe 3.8

$f(x) = \sqrt{x}$; $x_0 = 4$

$$\begin{aligned}
f'(4) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(4+h) - f(4)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{4+h} - \sqrt{4}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\left(\sqrt{4+h} - \sqrt{4}\right)\left(\sqrt{4+h} + \sqrt{4}\right)}{h\left(\sqrt{4+h} + \sqrt{4}\right)} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(4+h) - 4}{h\left(\sqrt{4+h} + \sqrt{4}\right)} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{h}{h\left(\sqrt{4+h} + \sqrt{4}\right)} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{4+h} + \sqrt{4}} = \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

Aufgabe 3.9

$f(x) = \sqrt{2x}$; $x_0 = 3$

$$\begin{aligned}
f'(3) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{2(3+h)} - \sqrt{2\cdot 3}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{2h+6} - \sqrt{6}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\left(\sqrt{2h+6} - \sqrt{6}\right)\left(\sqrt{2h+6} + \sqrt{6}\right)}{h\left(\sqrt{2h+6} + \sqrt{6}\right)} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(2h+6) - 6}{h\left(\sqrt{2h+6} + \sqrt{6}\right)} = \lim_{h\to 0} \frac{2h}{h\left(\sqrt{2h+6} + \sqrt{6}\right)} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{2}{\sqrt{2h+6} + \sqrt{6}} = \lim_{h\to 0} \frac{2}{2\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{6}}
\end{aligned}$$

Aufgabe 3.10

$f(x) = \sqrt{x+3}$; $x_0 = -2$

$$\begin{aligned}
f'(-2) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{-2+h+3} - \sqrt{-2+3}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{h+1} - 1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\left(\sqrt{h+1} - 1\right)\left(\sqrt{h+1} + 1\right)}{h\left(\sqrt{h+1} + 1\right)} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(h+1) - 1}{h\left(\sqrt{h+1} + 1\right)} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h\left(\sqrt{h+1} + 1\right)} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{h+1} + 1} = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Aufgabe 3.11

$f(x) = x^2 + 1;\ x_0 = -2$

$$\begin{aligned} f'(-2) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(-2+h)^2 + 1 - (4+1)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{4 - 4h + h^2 - 4}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h(h-4)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} (h-4) = -4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= m_t x + q \\ d5 &= -4 \cdot (-2) + q \\ q &= -3 \quad \Rightarrow \quad t\colon y = -4x - 3 \end{aligned}$$

Aufgabe 3.12

$f(x) = \sqrt{x-3};\ x = 4$

$$\begin{aligned} f'(4) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(4+h) - f(4)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{4+h-3} - 1}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{1+h} - 1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(\sqrt{1+h}-1)(\sqrt{1+h}+1)}{h(\sqrt{1+h}+1)} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1+h-1}{h(\sqrt{1+h}+1)} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h(\sqrt{h+1}+1)} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{h+1}+1} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= m_n\, x + q \\ 1 &= -2 \cdot 4 + q \\ q &= 9 \quad \Rightarrow \quad n\colon y = -2x + 9 \end{aligned}$$

Aufgabe 3.13

$f(x) = \dfrac{1}{2x-1};\ x = 1$

$$\begin{aligned} f'(1) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[\frac{1}{2(1+h)-1} - 1\right] \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[\frac{1}{1+2h} - 1\right] = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[\frac{1-(1+2h)}{1+2h}\right] \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[\frac{-2h}{1+2h}\right] = \lim_{h\to 0} \frac{-2}{1+2h} = -2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= m_t\, x + q \\ 1 &= -2 \cdot 1 + q \\ q &= 3 \quad \Rightarrow \quad t\colon y = -2x + 3 \end{aligned}$$

Aufgabe 3.14

$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x$; $x_0 = 1$

$$\begin{aligned} f'(1) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{2}(1+h)^2 - (1+h) + \frac{1}{2}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{2} + h + \frac{1}{2}h^2 - 1 - h + \frac{1}{2}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{2}h^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \tfrac{1}{2}h = 0 \end{aligned}$$

Da die Tangente parallel zur x-Achse ist (Steigung: 0), muss die Normale senkrecht zur x-Achse verlaufen. Da $P(1, 0.5) \in G_f$, gilt: $n\colon x = 1$.

Aufgabe 3.15

$f(x) = \dfrac{x-1}{x} = 1 - \dfrac{1}{x}$; $x_0 = 2$

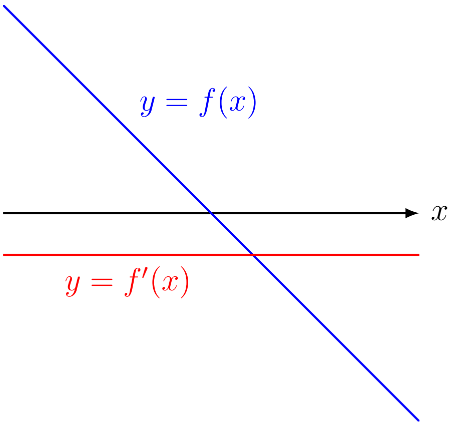
$$\begin{aligned} f'(2) &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[f(2+h) - f(2)\right] = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[1 - \frac{1}{2+h} - \frac{1}{2}\right] \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2+h}\right] = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[\frac{2+h-2}{2(2+h)}\right] \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{2(2+h)} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$y = m_t\, x + q$$

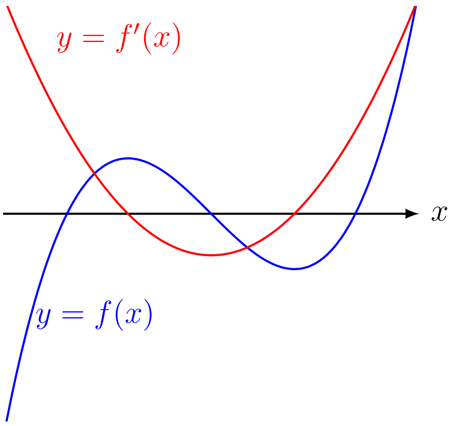
$$\frac{1}{2} = \frac{1}{4} \cdot 2 + q$$

$$q = 0 \quad \Rightarrow \quad t\colon y = \frac{1}{4}x$$

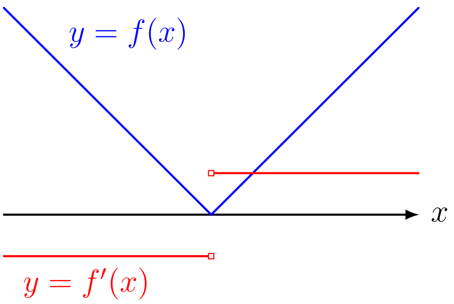
Aufgabe 3.16



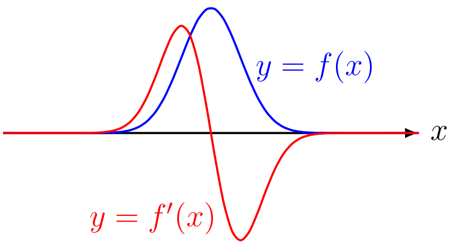
Aufgabe 3.17



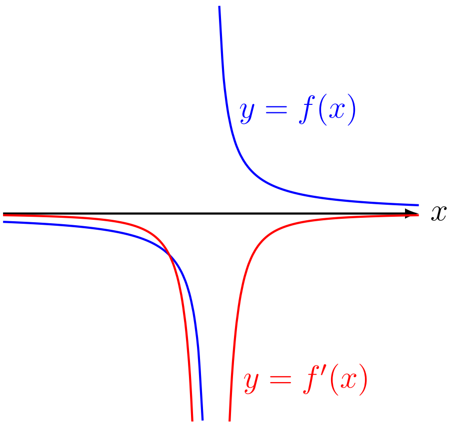
Aufgabe 3.18



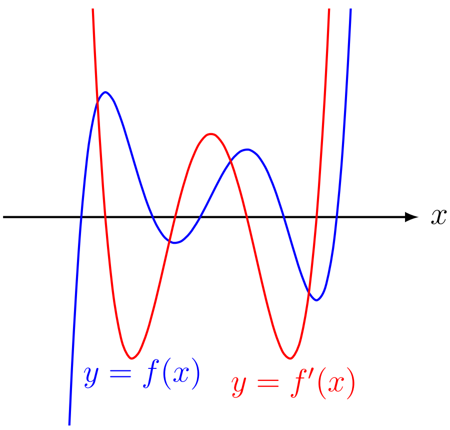
Aufgabe 3.19



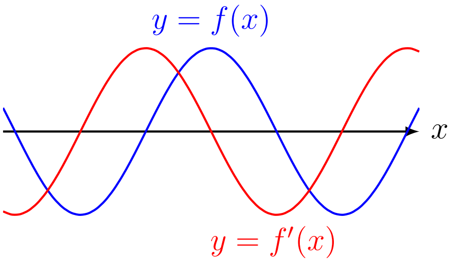
Aufgabe 3.20



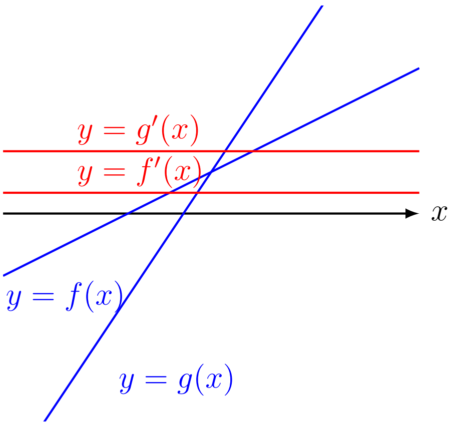
Aufgabe 3.21



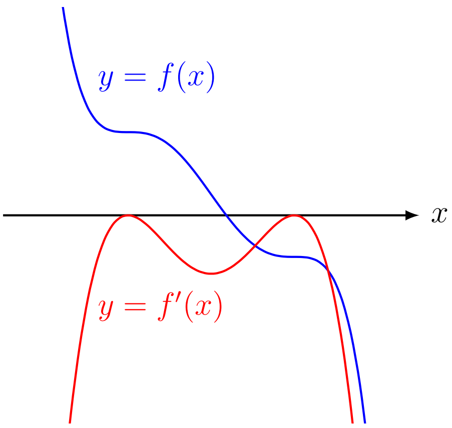
Aufgabe 3.22



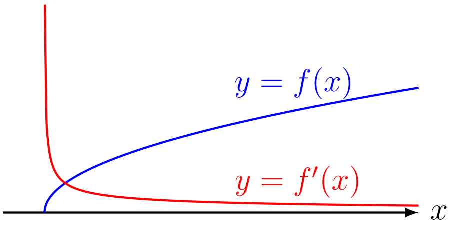
Aufgabe 3.23



Aufgabe 3.24



Aufgabe 3.25


$y = f(x)$
$y = f'(x)$
x

Aufgabe 4.1

$f(x) = \ln x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 1/x \quad \Rightarrow \quad f'(5) = \frac{1}{5}$

Aufgabe 4.2

$f(x) = x^5 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 5x^4 \quad \Rightarrow \quad f'(-2) = 5 \cdot (-2)^4 = 5 \cdot 16 = 80$

Aufgabe 4.3

$f(x) = \cos x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = -\sin x \quad \Rightarrow \quad f'(\pi/2) = -\sin(\pi/2) = -1$

Aufgabe 4.4

$f(x) = \mathrm{e}^x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \mathrm{e}^x \quad \Rightarrow \quad f'(0) = \mathrm{e}^0 = 1 = m_t$

$$\begin{aligned}
&t\colon y = mx + q \\
&\quad 1 = 1 \cdot 0 + q \\
&\quad q = 1 \\
&t\colon y = x + 1
\end{aligned}$$

Aufgabe 4.5

$f(x) = x^3 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 3x^2 \quad \Rightarrow \quad f'(\frac{2}{3}) = 3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 3 \cdot \frac{4}{9} = \frac{4}{3} = m_t$

$m_n = -1/m_t = -\frac{3}{4}$

$$\begin{aligned}
&n\colon y = mx + q \\
&\quad \frac{8}{27} = -\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} + q \\
&\quad \frac{8}{27} = -\frac{1}{2} + q \\
&\quad q = \frac{43}{54} \\
&n\colon y = -\frac{3}{4}x + \frac{43}{54}
\end{aligned}$$

Aufgabe 4.6

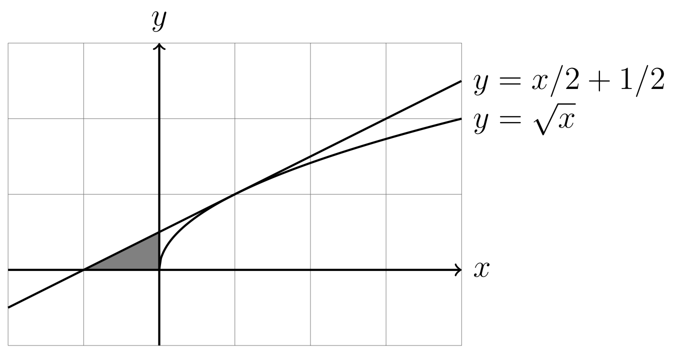
$f(x) = \sqrt{x} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \quad \Rightarrow \quad m = f'(1) = \dfrac{1}{2}$

$$\begin{aligned}
&\quad y = m \cdot x + q \\
&\quad 1 = \frac{1}{2} \cdot 1 + q \quad \Rightarrow \quad q = \frac{1}{2} \\
&t\colon y = \frac{1}{2} \cdot x + \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Ordinatenabschnitt von t: $q = \frac{1}{2}$

Nullstelle von t: $\dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -1$

Flächeninhalt: $A = \dfrac{1}{2} \cdot |-1| \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{4}$



Aufgabe 4.7

$$\begin{aligned} f(x) &= 1/x \\ f'(x) &= -1/x^2 = -1.44 \\ x^2 &= 1/1.44 \\ x &= \pm 1/1.2 = \pm 1/(6/5) = \pm 5/6 \end{aligned}$$

Aufgabe 4.8

(a) $f(x) = x^4 \Rightarrow f'(x) = 4x^3$

$f'(-3) = 4 \cdot (-3)^3 < 0 \Rightarrow$ monoton fallend

(b) $f(x) = x^7 \Rightarrow f'(x) = 7x^6$

$f'(-100) = 7 \cdot (-100)^6 > 0 \Rightarrow$ monoton wachsend

(c) $f(x) = \ln x \Rightarrow f'(x) = 1/x$

$\Rightarrow f'(0.7) = 1/0.7 > 0 \Rightarrow$ monoton wachsend

(d) $f(x) = 1/x \Rightarrow f'(x) = -1/x^2$

$\Rightarrow f'(4) = -1/16 < 0 \Rightarrow$ monoton fallend

(e) $f(x) = 1/x \Rightarrow f'(x) = -1/x^2$

$f'(-4) = -1/(-4)^2 < 0 \Rightarrow$ monoton fallend

Aufgabe 4.9

(a) $f(x) = \mathrm{e}^x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \mathrm{e}^x \quad \Rightarrow \quad f''(x) = \mathrm{e}^x$

(b) $f(x) = \sin x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \cos x \quad \Rightarrow \quad f''(x) = -\sin x$

(c) $f(x) = \ln x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 1/x \quad \Rightarrow \quad f''(x) = -1/x^2$

(e) $f(x) = x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 1 \quad \Rightarrow \quad f''(x) = 0$

Aufgabe 4.10

Die Steigungen von Tangente und Gerade müssen an der gesuchten Stelle übereinstimmen.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3 \\ 2x &= 3 \\ x &= 3/2 \end{aligned}$$

Aufgabe 4.11

(a) $f(x) = x^4 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 4x^3$

$\varphi = \arctan(4 \cdot 0.5^3) = 26.57°$

(b) $f(x) = 1/x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = -1/x^2$

$\varphi = \arctan(-1/(-1)^2) = -45°$

(c) $f(x) = \mathrm{e}^x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \mathrm{e}^x$

$\varphi = \arctan(\mathrm{e}^{-2}) = 7.71°$

(d) $f(x) = \ln x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 1/x$

$\varphi = \arctan(1/\sqrt{3}) = 30°$

(e) $f(x) = \cos x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = -\sin x$

$\varphi = \arctan(-\sin \frac{\pi}{6}) = -26.57°$

Aufgabe 5.1

$f(x) = x^2 + x^3$

$f'(x) = 2x + 3x^2$

Aufgabe 5.2

$f(x) = \sin x + \cos x$

$f'(x) = \cos x - \sin x$

Aufgabe 5.3

$f(x) = \tan x + x$

$f'(x) = 2 + \tan^2 x$

Aufgabe 5.4

$f(t) = 3 + \ln t$

$f'(t) = \dfrac{1}{t}$

Aufgabe 5.5

$f(x) = x^2 + \dfrac{1}{x^2}$

$f'(x) = 2x - \dfrac{2}{x^3}$

Aufgabe 5.6

$f(x) = 3^x + x^3$

$f'(x) = \ln 3 \cdot 3^x + 3x^2$

Aufgabe 5.7

$a(z) = 1 + z + z^2 + z^3$

$a'(z) = 1 + 2z + 3z^2$

Aufgabe 5.8

$f(x) = \log_{10} x + \sqrt{x}$

$f'(x) = \dfrac{1}{\ln 10} \cdot \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

Aufgabe 5.9

$f(x) = 4 + x$

$f'(x) = 1$

Aufgabe 5.10

$f(x) = x^{-4} + x^{-6}$

$f'(x) = -4x^{-5} - 6x^{-7}$

Aufgabe 5.11

$f(x) = 3\,x^2$

$f'(x) = 6\,x$

Aufgabe 5.12

$f(x) = 5\,\mathrm{e}^x$

$f'(x) = 5\,\mathrm{e}^x$

Aufgabe 5.13

$f(x) = -4\ \sin x$

$f'(x) = -4\ \cos x$

Aufgabe 5.14

$g(x) = \pi\ \ln x$

$g'(x) = \pi\,\frac{1}{x}$

Aufgabe 5.15

$f(x) = -\cos x$

$f'(x) = \sin x$

Aufgabe 5.16

$f(x) = 7$

$f'(x) = 0$

Aufgabe 5.17

$f(t) = \dfrac{5}{t}$

$f'(t) = -\dfrac{5}{t^2}$

Aufgabe 5.18

$f(x) = 4\sqrt{x}$

$f'(x) = \dfrac{2}{\sqrt{x}}$

Aufgabe 5.19

$f(x) = \dfrac{1}{\ln 2} \cdot 2^x$

$f'(x) = 2^x$

Aufgabe 5.20

$h(s) = 3\,s^{-5}$

$h'(s) = -15\,s^{-6}$

Aufgabe 5.21

$f(x) = 2x^2 + 3x - 5$

$f'(x) = 4x + 3$

Aufgabe 5.22

$f(x) = x^3 - 7x^2 + 9$

$f'(x) = 3x^2 - 14x$

Aufgabe 5.23

$f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2 + 6x - 2$

$f'(x) = x^3 - x^2 + 5x + 6$

Aufgabe 5.24

$f(x) = \frac{2}{3}x^5 + \frac{4}{3}x^4 + \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{5}x^2 + \frac{1}{2}x - 3$

$f'(x) = \frac{10}{3}x^4 + \frac{16}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{2}{5}x + \frac{1}{2}$

Aufgabe 5.25

$f(x) = \sqrt{2}\,x^3 - \pi\,x^2 + \mathrm{e}\,x$

$f'(x) = 3\sqrt{2}\,x^2 - 2\pi\,x + \mathrm{e}$

Aufgabe 5.26

$g(x) = 0.1\,x^5 - 0.25\,x^3 - 0.3\,x$

$g'(x) = 0.5\,x^4 - 0.75\,x^2 - 0.3$

Aufgabe 5.27

$f(x) = 2 \cdot (7x^2 + 3x - 8)$

$f'(x) = 28x + 6$

Aufgabe 5.28

$f(t) = (t-1)(t+1) = t^2 - 1$

$f'(t) = 2t$

Aufgabe 5.29

$h(x) = (x+2)^2 == x^2 + 4x + 4$

$h'(x) = 2x + 4$

Aufgabe 5.30

$f(x) = 3(x+1)(x-2) = 3(x^2 - x - 2) = 3x^2 - 3x - 6$

$f'(x) = 6x - 3$

Aufgabe 5.31

$f(t) = (3t^2 + t) \cdot (1 - t^2)$

$f'(t) = (6t+1)(1-t^2) + (3t^2+t)(-2t) = \ldots = -12t^3 - 3t^2 + 6t + 1$

Aufgabe 5.32

$f(x) = (1 + 3x + x^2) \cdot (x^3 + 4x - 3)$

$f'(x) = (3+2x)(x^3+4x-3) + (1+3x+x^2)(3x^2+4) = \ldots = 5x^4 + 12x^3 + 15x^2 + 18x - 5$

Aufgabe 5.33

$g(x) = x \cdot \cos x$

$g'(x) = \cos x - x \cdot \sin x$

Aufgabe 5.34

$f(t) = (t^2 - 1) \cdot \sin t$

$f'(t) = 2t \cdot \sin t + (t^2 - 1) \cdot \cos t$

Aufgabe 5.35

$f(x) = \sin x \cdot \cos x$

$f'(x) = \cos x \cdot \cos x + \sin x \cdot (-\sin x) = \cos^2 x - \sin^2 x \overset{\text{Trig.}}{=} \cos(2x)$

Aufgabe 5.36

$h(t) = \cos^2 t$

$h'(t) = (-\sin t) \cdot \cos t + \cos t \cdot (-\sin t) = -2 \sin t \cdot \cos t \overset{\text{Trig.}}{=} -2\sin(2t)$

Aufgabe 5.37

$f(x) = x \cdot \ln x$

$f'(x) = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1$

Aufgabe 5.38

$f(x) = \sqrt{x} \cdot \sin x$

$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \sin x + \sqrt{x} \cdot \cos x$

Aufgabe 5.39

$h(x) = x^2 \cdot \mathrm{e}^x$

$h'(x) = 2x \cdot \mathrm{e}^x + x^2 \cdot \mathrm{e}^x$

Aufgabe 5.40

$f(x) = \tan x \cdot \cos x$

$f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x} \cdot \cos x + \tan x \cdot (-\sin x) = \dfrac{1}{\cos x} - \tan x \cdot \sin x$

Aufgabe 5.41

$$f(x) = \frac{x+1}{x-1}$$

$$f'(x) = \frac{1 \cdot (x-1) - (x+1) \cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{-2}{(x-1)^2}$$

Aufgabe 5.42

$$f(x) = \frac{3x}{x+1}$$

$$f'(x) = \frac{3 \cdot (x+1) - 3x \cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{3x+3-3x}{(x+1)^2} = \frac{3}{(x+1)^2}$$

Aufgabe 5.43

Hier ist es vorteilhaft, die Funktion vor dem Ableiten zu vereinfachen:

$$f(x) = \frac{x^2-1}{x+1} = \frac{(x-1)(x+1)}{x+1} = x-1$$

$$f'(x) = 1$$

Aufgabe 5.44

Hier ist es vorteilhaft, die Funktion vor dem Ableiten zu vereinfachen:

$$f(x) = \frac{x^3+2x^2-4}{x} = x^2+2x-\frac{4}{x}$$

$$f'(x) = 2x+2+\tfrac{4}{x^2}$$

Zur Erinnernung: $\left[\frac{1}{x}\right]' = \left[x^{-1}\right]' = (-1) \cdot x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$

Aufgabe 5.45

$$f(x) = \frac{x^4+3x^2+2}{x+5}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(4x^3+6x)(x+5)-(x^4+3x^2+2)}{(x+5)^2} \\ &= \frac{4x^4+20x^3+6x^2+30x-x^4-3x^2-2}{(x+5)^2} \\ &= \frac{3x^4+20x^3+3x^2+30x-2}{(x+5)^2} \end{aligned}$$

Aufgabe 5.46

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 3x + 2}$$

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{(2x-2)(x^2+3x+2) - (x^2-2x+1)(2x+3)}{(x^2+3x+2)^2} \\
&= \frac{(2x^3+6x^2+4x-2x^2-6x-4) - (2x^3+3x^2-4x^2-6x+2x+3)}{(x^2+3x+2)^2} \\
&= \frac{(2x^3+4x^2-2x-4) - (2x^3-x^2-4x+3)}{(x^2+3x+2)^2} = \frac{5x^2+2x-7}{(x^2+3x+2)^2}
\end{aligned}$$

Aufgabe 5.47

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{\mathrm{e}^x \cdot x^2 - \mathrm{e}^x \cdot 2x}{x^4} = \frac{x\big(\mathrm{e}^x \cdot x - 2 \cdot \mathrm{e}^x\big)}{x^4} = \frac{\mathrm{e}^x \cdot x - 2 \cdot \mathrm{e}^x}{x^3}$$

Aufgabe 5.48

$$f(x) = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$f'(x) = \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

oder:

$$f'(x) = \cdots = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

Aufgabe 5.49

$$f(x) = \frac{\ln x}{x}$$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x \cdot 1}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

Aufgabe 5.50

$$f(x) = \frac{x \cdot \ln x}{\mathrm{e}^x}$$

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{\big(1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x}\big) \cdot \mathrm{e}^x - \big(x \cdot \ln x\big) \cdot \mathrm{e}^x}{\big(\mathrm{e}^x\big)^2} = \frac{(\ln x + 1)\mathrm{e}^x - x \cdot \ln x \cdot \mathrm{e}^x}{\big(\mathrm{e}^x\big)^2} \\
&= \frac{\mathrm{e}^x(\ln x + 1 - x \cdot \ln x)}{\big(\mathrm{e}^x\big)^2} = \frac{\ln x + 1 - x \cdot \ln x}{\mathrm{e}^x}
\end{aligned}$$

Aufgabe 5.51

$f(x) = (5x-3)^7$

$f'(x) = 7 \cdot (5x-3)^6 \cdot 5 = 35 \cdot (5x-3)^6$

Aufgabe 5.52

$f(x) = \mathrm{e}^{3x}$

$f'(x) = 3 \cdot \mathrm{e}^{3x}$

Aufgabe 5.53

$f(x) = \mathrm{e}^{-x}$

$f'(x) = -\mathrm{e}^{-x}$

Aufgabe 5.54

$f'(x) = \dfrac{4}{\cos^2(4x)} \ \big[= 4 + 4\tan^2(4x) \big]$

Aufgabe 5.55

$f(x) = \sqrt{7x-3}$

$f'(x) = \dfrac{7}{2\sqrt{7x-3}}$

Aufgabe 5.56

$f(x) = \sin 2x$

$f'(x) = 2 \cdot \cos(2x)$

Aufgabe 5.57

$f(x) = \cos(-x)$

$f'(x) = (-1) \cdot \big(-\sin(-x) \big) = \sin(-x) \overset{\text{Trig.}}{=} -\sin x$

Aufgabe 5.58

$f(x) = \cos(x^2)$

$f'(x) = 2x \cdot \big(-\sin(x^2) \big) = -2x \cdot \sin(x^2)$

Aufgabe 5.59

$f(x) = \sin(x^2 + 3x + 1)$

$f'(x) = (2x + 3)\cos(x^2 + 3x + 1)$

Aufgabe 5.60

$f(x) = (\sin x)^2$

$f'(x) = 2 \cdot \sin x \cdot \cos x = 2 \sin x \cdot \cos x \overset{\text{Trig.}}{=} \sin(2x)$

Aufgabe 5.61

$f(x) = 5x^2 - 3e^x + \ln x$

$f'(x) = 10x - 3e^x + \dfrac{1}{x}$

Aufgabe 5.62

$f(x) = \sin(x^2)$

$f'(x) = 2x \cdot \cos(x^2)$

Aufgabe 5.63

$f(x) = \sin^2 x$

$f'(x) = \cos x \cdot 2 \cdot \sin x = 2 \sin x \cos x$

Aufgabe 5.64

$f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x + 1}$

$f'(x) = \dfrac{2x(x + 1) - (x^2 + 1) \cdot 1}{(x + 1)^2} = \dfrac{x^2 + 2x - 1}{(x + 1)^2}$

Aufgabe 5.65

$f(x) = (x^4 + x) \cdot \ln x$

$$\begin{aligned} f'(x) &= (4x^3 + 1) \cdot \ln x + (x^4 + x) \cdot \frac{1}{x} \\ &= (4x^3 + 1) \cdot \ln x + x^3 + 1 \end{aligned}$$

Aufgabe 5.66

$f(x) = \sqrt{\ln x}$

$$f'(x) = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\ln x}} = \frac{1}{2x\sqrt{\ln x}}$$

Aufgabe 5.67

$f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$

$f'(x) = -2x \cdot \mathrm{e}^{-x^2}$

Aufgabe 5.68

$$f(x) = \frac{\ln x}{x^3}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{x^{-1} \cdot x^3 - \ln x \cdot 3x^2}{x^6} = \frac{x^2 - 3x^2 \cdot \ln x}{x^6} \\ &= \frac{x^2(1 - 3\ln x)}{x^6} = \frac{1 - 3\ln x}{x^4} \end{aligned}$$

Aufgabe 5.69

$$f(x) = \frac{1}{\cos x}$$

$$f'(x) = \frac{0 \cdot \cos x - 1 \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$$

Aufgabe 5.70

$f(x) = \sqrt{1 - 2x}$

$$f'(x) = \frac{-2}{2\sqrt{1 - 2x}} = \frac{-1}{\sqrt{1 - 2x}}$$

Aufgabe 5.71

$f(x) = x^4 \cdot \sin x$

$f'(x) = 4x^3 \cdot \sin x + x^4 \cdot \cos x$

Aufgabe 5.72

$f(x) = \tan(5x + \pi)$

$$f'(x) = \frac{5}{\cos^2(5x + \pi)} = \frac{5}{\cos^2(5x)}$$

oder

$$\begin{aligned} f'(x) &= 5 \cdot \left[1 + \tan^2(5x + \pi)\right] \\ &= 5 + 5\tan^2(5x + \pi) = 5 + 5\tan^2(5x) \end{aligned}$$

Die trigonometrischen Vereinfachungen folgen aus den Reduktionsformeln für $x + \pi$: (FTB S. 99)

$$\begin{aligned} \sin(x + \pi) &= -\sin(x) \\ \cos(x + \pi) &= -\cos(x) \\ \tan(x + \pi) &= \tan(x) \end{aligned}$$

Aufgabe 5.73

$$f(x) = \frac{2}{x}$$

$$f'(x) = -\frac{2}{x^2}$$

Aufgabe 5.74

$f(x) = \mathrm{e}^{(x^2)}$

$f'(x) = 2x \cdot \mathrm{e}^{(x^2)}$

Aufgabe 5.75

$f(x) = \left(\mathrm{e}^x\right)^2$

$f'(x) = \mathrm{e}^x \cdot 2\mathrm{e}^x = 2\left(\mathrm{e}^x\right)^2 = 2\mathrm{e}^{2x}$

Aufgabe 5.76

$$f(x) = \frac{x^2}{1 - x^2}$$

$$f'(x) = \frac{2x(1 - x^2) - x^2(-2x)}{(1 - x^2)^2} = \frac{2x}{(1 - x^2)^2}$$

Aufgabe 5.77

$f(x) = (x^3 - 7x^2 + 5)^8$

$$\begin{aligned} f'(x) &= (3x^2 - 14x) \cdot 8(x^3 - 7x^2 + 5)^7 \\ &= 8(3x^2 - 14x)(x^3 - 7x^2 + 5)^7 \end{aligned}$$

Aufgabe 5.78

$f(x) = x^{-2}$

$f'(x) = -2x^{-3}$
oder
$f'(x) = \frac{-2}{x^3}$

Aufgabe 5.79

$f'(x) = \mathrm{e}^x + x \cdot \mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x(1 + x)$

Aufgabe 5.80

$f(x) = \mathrm{e} \cdot x^2 - \frac{1}{\mathrm{e}^2 \cdot x}$

$f'(x) = 2 \cdot \mathrm{e} \cdot x + \frac{1}{\mathrm{e}^2 \cdot x^2}$

Aufgabe 5.81

$f(x) = \frac{x^3}{2\mathrm{e}^x}$

$f'(x) = \frac{6x^2 - 2x^3}{4\mathrm{e}^x} = \frac{3x^2 - x^3}{2\mathrm{e}^x}$

Aufgabe 5.82

$f(x) = \frac{1}{(\cos x)^2}$

$f'(x) = \frac{2 \sin x}{(\cos x)^3}$

Aufgabe 5.83

$f(x) = \sin(2x)$

$f'(x) = 2 \cos(2x)$

Aufgabe 5.84

$f(x) = \mathrm{e}^{x^2+1} \cdot \ln(x + 1)$

$f'(x) = 2x\mathrm{e}^{x^2+1} \ln(x + 1) + \mathrm{e}^{x^2+1} \cdot \frac{1}{x + 1}$

Aufgabe 5.85

$$f(x) = -14\sin x - 3x^2$$

$$f'(x) = -14\cos x - 6x$$

Aufgabe 5.86

$$f(x) = \frac{\sqrt{2}}{x} - \frac{x}{\pi}$$

$$f'(x) = \frac{-\sqrt{2}}{x^2} - \frac{1}{\pi}$$

Aufgabe 5.87

$$f(x) = \ln\frac{1-x^2}{1+x^2}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{-2x(1+x^2)-(1-x^2)2x}{(1+x^2)^2} \cdot \frac{1}{\frac{1-x^2}{1+x^2}} \\ &= \frac{-2x-2x^2-2x+2x^2}{(1+x^2)^2} \cdot \frac{1+x^2}{1-x^2} \\ &= \frac{-4x}{(1+x^2)(1-x^2)} = \frac{-4x}{1-x^4} = \frac{4x}{x^4-1} \end{aligned}$$

Aufgabe 5.88

$$f(x) = 2^{\sin x}$$

$$f'(x) = \cos x \cdot \ln 2 \cdot 2^{\sin x}$$

Aufgabe 5.89

$$f(x) = \sqrt{\frac{4x^2-5}{x^2+3x}}$$

$$f'(x) = \frac{12x^2+10x+15}{(x^2+3x)^2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{x^2+3x}{4x^2-5}}$$

Aufgabe 5.90

$$f(x) = (x-a) \cdot \mathrm{e}^{2-x/a}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 \cdot \mathrm{e}^{2-a^{-1}x} + (x-a)(-a^{-1})\mathrm{e}^{2-a^{-1}x} \\ &= 1 \cdot \mathrm{e}^{2-a^{-1}x} + (1-a^{-1}x)\mathrm{e}^{2-a^{-1}x} \\ &= (2-a^{-1}x)\mathrm{e}^{2-a^{-1}x} \end{aligned}$$

Aufgabe 5.91

$f(x) = x^2 - 2x + 1$

$f'(x) = 2x - 2$

$f''(x) = 2$

$f'''(x) = 0$

Aufgabe 5.92

$f(x) = x^3 + 3x^2 - \sqrt{2}\,x + 1$

$f'(x) = 3x^2 + 6x - \sqrt{2}$

$f''(x) = 6x + 6$

$f'''(x) = 6$

Aufgabe 5.93

$f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^3$

$f'(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2$

$f''(x) = 3x^2 - 3x$

$f'''(x) = 6x$

Aufgabe 5.94

$f(x) = \sin x;$

$f'(x) = \cos x$

$f''(x) = -\sin x$

$f'''(x) = -\cos x$

$f^{(4)}(x) = \sin x$

Aufgabe 5.95

$f(x) = \mathrm{e}^{-x}$
$f'(x) = -\mathrm{e}^{-x}$

$f''(x) = \mathrm{e}^{-x}$

$f'''(x) = -\mathrm{e}^{-x}$

$f^{(4)}(x) = \mathrm{e}^{-x}$

Aufgabe 5.96

$f(x) = x^3$

$f'(x) = 3x^2$

$f''(x) = 6x$

$f'''(x) = 6$

$f^{(4)}(x) = 0$

Aufgabe 6.1

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{falls } x < -5 \\ 4x+1 & \text{falls } -5 \le x < 4 \\ 2\sqrt{x} & \text{falls } 4 \le x \end{cases}$$

(a) $f(0) = 4 \cdot 0 + 1 = 1$

(b) $f(-10) = (-10)^2 = 100$

(c) $f(4) = 2\sqrt{4} = 4$

(d) $f(1) = 4 \cdot 1 + 1 = 5$

(e) $f(-5) = 4 \cdot (-5) + 1 = -19$

Aufgabe 6.2

Die Funktion $f(x) = 4x + 3$ ist an der Stelle $x_0 = 0$ stetig, da alle Polynomfunktionen stetig sind.

Aufgabe 6.3

$f(x) = \sqrt{x^2}$ ist an der Stelle $x_0 = 0$ stetig, denn

- $f(0) = \sqrt{0^2} = 0$
- $\lim\limits_{x \to 0} \sqrt{x^2} = \lim\limits_{x \to 0} |x| = 0$

Aufgabe 6.4

Die Funktion $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$ ist an der Stelle $x_0 = -1$ nicht stetig.

Grund: $f(-1) = \dfrac{1}{-1+1} = \dfrac{1}{0}$ ist nicht definiert.

Aufgabe 6.5

Ja, denn es handelt sich um eine Verkettung zweier stetiger Funktionen.

Aufgabe 6.6

Ja, denn

- $f(3) = 4 \cdot 3 - 5 = 7$
- $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^-} 4x - 5 = 7$
- $\lim\limits_{x \to 3+} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^+} (2x + 1) = 7$

Aufgabe 6.7

Ja, denn

- $f(1) = 2$
- $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1}(x+1) = 2$

Aufgabe 6.8

Nein, denn

- $f(0) = 0$
- $\lim\limits_{x\to 0^-} \mathrm{e}^{-1/x} = \mathrm{e}^{\infty} = \infty$

Aufgabe 6.9

f ist stetig auf dem ganzen Definitionsbereich ($\mathbb{R} \setminus \{0\}$) stetig.

Aufgabe 6.10

Die Funktion f ist nicht stetig an der Stelle $x = 3$

Aufgabe 6.11

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 2^-} f(x) &= \lim_{x\to 2^+} f(x) \\
\lim_{x\to 2^-} (2x^2+3x+1) &= \lim_{x\to 2^+} (x^3+ax-4) \\
8+6+1 &= 8+2a-4 \\
11 &= 2a \\
a &= 5.5
\end{aligned}$$

Aufgabe 6.12

Ist f an der Stelle $x = 0$ stetig?

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \mathrm{e}^x = 1$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} (x+1) = 1$

$f(0) = 1$ (ok)

Ist f an der Stelle $x = 0$ differenzierbar?

$x \leq 0$: $f'(x) = \mathrm{e}^x \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{x\to 0^-} f'(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \mathrm{e}^x = 1$

$x > 0$: $f'(x) = 1 \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{x \to 0^+} f'(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} 1 = 1 \quad$ (ok)

$\Rightarrow f$ an der Stelle $x = 0$ differenzierbar.

Aufgabe 6.13

Die Funktionswerte der Teilfunktionen müssen an der Stelle $x = 4$ übereinstimmen:

$$\begin{aligned} f(4) &= \lim_{x \to 4^-} f(x) \\ 2a + b &= 16 + 4b + a \\ a - 3b &= 16 \end{aligned}$$

Die Steigungen der Teilfunktionen müssen an der Stelle $x = 4$ übereinstimmen:

für $x < 4$ gilt: $f'(x) = 2x + b$

für $x \geq 4$ gilt: $f'(x) = \dfrac{a}{2\sqrt{x}}$

$$\begin{aligned} f'(4) &= \lim_{x \to 4^-} f'(x) \\ a/4 &= 8 + b \\ a &= 32 + 4b \\ a - 4b &= 32 \end{aligned}$$

Das Gleichungssystem $\left| \begin{matrix} a - 3b = 16 \\ a - 4b = 32 \end{matrix} \right|$ hat die Lösung $a = -32$, $b = -16$

7.1–7.9: Untersuche, ob die Funktion f auf dem Intervall I monton wachsend, monoton fallend oder nicht monoton ist.

Aufgabe 7.1

$f(x) = x^2$ ist in $I = (-\infty, 0]$ monoton fallend, da $f'(x) = 2x < 0$ für alle $x \in I$

Aufgabe 7.2

$f(x) = \sqrt{x}$ ist in $I = (0, \infty)$ monoton wachsend, da $f'(x) = 1/2\sqrt{x} > 0$ für alle $x \in I$

Aufgabe 7.3

$f(x) = 1/x$ ist in $I = (-\infty, 0)$ monoton fallend, da $f'(x) = -1/x^2$ für alle $x \in I$.

Aufgabe 7.4

$f(x) = x^3$ ist in $I = \mathbb{R}$ monoton wachsend, da $f'(x) = 3x^2 > 0$ für alle $x \in I$

Aufgabe 7.5

$f(x) = \sin x$ ist in $I = [\pi, 2\pi]$ nicht monoton, da $f'(x) = \cos x$ in I sowohl positive wie auch negative Werte annimmt.

Aufgabe 7.6

f ist monoton fallend in $I = \mathbb{R}$, da $f'(x) = -2 < 0$ für alle $x \in I$.

Aufgabe 7.7

f ist nicht monoton in $I = \mathbb{R}$, da $f'(x) = \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}$ positiv für $x > 0$ und negativ für $x < 0$.

Aufgabe 7.8

f ist monoton fallend in $I = [1, 3]$, da $f'(x) = x^2 - 4x - 5 = (x + 1)(x - 5) < 0$ für alle $x \in I$

Aufgabe 7.9

$f(x) = \ln x$ ist monoton wachsend in $I = (0, \infty)$, da $f'(x) = \dfrac{1}{x} > 0$ für alle $x \in I$

7.10–7.13: Bestimme die Intervalle, in denen die Funktion f monoton wachsend bzw. monton fallend ist.

Aufgabe 7.10

$f'(x) = x^2 + x - 6 = (x-2)(x+3)$

horizontale Tangente bei: $x_1 = 2$, $x_2 = -3$

Vorzeichentabelle:

	$-\infty < x < -3$	$-3 < x < 2$	$2 < x < \infty$
$x+3$	$-$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$+$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

Aufgabe 7.11

$f'(x) = 3x^2 - 12x + 12 = 3(x^2 - 4x + 4) = 3(x-2)^2$

horizontale Tangente bei: $x_1 = x_2 = 2$

Vorzeichentabelle:

	$-\infty < x < 2$	$2 < x < \infty$
$x-2$	$-$	$+$
$x-2$	$-$	$+$
$f'(x)$	$+$	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\nearrow$

Aufgabe 7.12

$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x^2 - 2x - 3) = 3(x+1)(x-3)$

horizontale Tangente bei: $x_1 = -1$, $x_2 = 3$

	$-\infty < x < -1$	$-1 < x < 3$	$3 < x < \infty$
$x+1$	$-$	$+$	$+$
$x-3$	$-$	$-$	$+$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

Aufgabe 7.13

$f'(x) = 1 - \sin x$

Stellen mit horizontaler Tangente: $x_k = k \cdot \pi$, $k \in \mathbb{Z}$

Wegen $-1 \leq \sin x < 1$ gilt $f'(x) = 1 - \sin x \geq 0 \; \forall x \in \mathbb{R}$.

f ist auf ganz $\mathbb{R}$ monoton wachsend.

Aufgabe 8.1

$f(x) = x^3$

$f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$

$\Rightarrow f(-x) = -f(x) \; \forall \; x \in D_f$

$\Rightarrow f$ ist ungerade

Aufgabe 8.2

$f(x) = -x^2$

$f(-x) = -(-x)^2 = -x^2 = f(x)$

$\Rightarrow f(-x) = f(x) \; \forall \; x \in D_f$

$\Rightarrow f$ ist gerade

Aufgabe 8.3

$f(x) = 1$

$f(-x) = 1 = f(x)$

$\Rightarrow f(-x) = f(x) \; \forall \; x \in D_f$

$\Rightarrow f$ ist gerade

Aufgabe 8.4

$f(x) = -7$

$f(-x) = -7 = f(x)$

$\Rightarrow f(-x) = f(x) \; \forall \; x \in D_f$

$\Rightarrow f$ ist gerade

Aufgabe 8.5

$f(x) = 0$

$f(-x) = 0 = f(x)$ und $f(-x) = 0 = -0 = -f(x)$

$\Rightarrow f(-x) = f(x) \; \forall \; x \in D_f$

$\quad f(-x) = -f(x) \; \forall \; x \in D_f$

$\Rightarrow f$ ist gerade *und* ungerade

Aufgabe 8.6

$f(x) = 3x^8$

$f(-x) = 3(-x)^8 = 3x^8 = f(x)$

$\Rightarrow f(-x) = f(x) \; \forall \; x \in D_f$

$\Rightarrow f$ ist gerade

Aufgabe 8.7

$f(x) = x^7 \cdot x^5$

$f(-x) = (-x)^7 \cdot (-x)^5 = (-x^7) \cdot (-x^5) = x^7 \cdot x^5 = f(x)$

oder schneller: $f(x) = x^7 \cdot x^5 = x^{12}$ und $f(-x) = (-x)^{12} = x^{12}$

$\Rightarrow f(-x) = f(x) \; \forall \; x \in D_f$

$\Rightarrow f$ ist gerade

gerade

Aufgabe 8.8

$f(x) = x^6 \cdot x^3 = x^9$

$f(-x) = (-x)^9 = -x^9 = -f(x)$

$\Rightarrow f(-x) = -f(x) \; \forall \; x \in D_f$

$\Rightarrow f$ ist ungerade

Aufgabe 8.9

$f(x) = \frac{1}{x^3}$

$f(-x) = \frac{1}{(-x)^3} = \frac{1}{-x^3} = -\frac{1}{x^3} = -f(x)$

$\Rightarrow f(-x) = -f(x) \; \forall \; x \in D_f$

$\Rightarrow f$ ist ungerade

Aufgabe 8.10

$f(x) = 7x^{-2}$

$f(-x) = 7(-x)^{-2} = 7x^{-2} = f(x)$

$\Rightarrow f(-x) = -f(x) \; \forall \; x \in D_f$

$\Rightarrow f$ ist gerade

Aufgabe 8.11

$f(x) = \left(x^{-3}\right)^5 = x^{-15}$

$f(-x) = (-x)^{-15} = -x^{-15} = -f(x)$

$\Rightarrow f(-x) = -f(x) \; \forall \; x \in D_f$

$\Rightarrow f$ ist ungerade

Aufgabe 8.12

$f(x) = \dfrac{2}{x^7}$

$f(-x) = \dfrac{2}{(-x)^7} = \dfrac{2}{-x^7} = -\dfrac{2}{x^7} = -f(x)$

$\Rightarrow f(-x) = -f(x) \ \forall \ x \in D_f$

$\Rightarrow f$ ist ungerade

ungerade

Aufgabe 8.13

$f(x) = -x^{-8}$

$f(-x) = -(-x)^{-8} = -x^{-8} = f(x)$

$\Rightarrow f(-x) = f(x) \ \forall \ x \in D_f$

$\Rightarrow f$ ist gerade

Aufgabe 8.14

$f(x) = x^4 \cdot x^{-4} = x^0 = 1$

$f(-x) = 1 = f(x)$

$\Rightarrow f(-x) = f(x) \ \forall \ x \in D_f$

$\Rightarrow f$ ist gerade

Aufgabe 8.15

$f(x) = x - 1$

$f(-x) = -x - 1$

Offenbar lässt sich der Term $f(-x)$ weder durch $f(x)$ noch durch $f(-x)$ *allgemein* (d. h. für alle x) darstellen. Das bedeutet aber, dass es (mindestens) ein Argument x geben muss, das weder die Gleichung $f(-x) = f(x)$ noch die Gleichung $f(-x) = -f(x)$ erfüllt. Eine solche Zahl ist schnell gefunden:

$f(1) = 1 - 1 = 0$

$f(-1) = -1 - 1 = -2$

(Das funktioniert übrigens auch mit jeder anderen Zahl ausser 0)

$\Rightarrow f(-x) \neq f(x)$ und $f(-x) \neq -f(x)$ für mindestens ein $x \in D_f$

$\Rightarrow f$ ist weder gerade noch ungerade

Aufgabe 8.16

$f(x) = 4x^3 + 1$

$f(-x) = 4(-x)^3 + 1 = -4x^3 + 1$

Offenbar lässt sich der Term $f(-x)$ weder durch $f(x)$ noch durch $f(-x)$ *allgemein* (d. h. für alle x) darstellen. Das bedeutet aber, dass es (mindestens) ein Argument x geben muss, das weder die Gleichung $f(-x) = f(x)$ noch die Gleichung $f(-x) = -f(x)$ erfüllt. Eine solche Zahl ist schnell gefunden:

$f(1) = 4 \cdot 1^3 - 1 = 3$

$f(-1) = 4 \cdot (-1)^3 - 1 = -5$

$\Rightarrow f(-x) \neq f(x)$ und $f(-x) \neq -f(x)$ für mindestens ein $x \in D_f$

$\Rightarrow f$ ist weder gerade noch ungerade

Aufgabe 8.17

$f(x) = 4x^8 + 3x^4 - 2x^2$

$f(-x) = 4(-x)^8 + 3(-x)^4 - 2(-x)^2 = 4x^8 + 3x^4 - 2x^2 = f(x)$

$\Rightarrow f(-x) = f(x)\ \forall\ x \in D_f$

$\Rightarrow f$ ist gerade

Aufgabe 8.18

$f(x) = x^9 - \frac{1}{2}x^7$

$f(-x) = (-x)^9 - \frac{1}{2}(-x)^7 = -x^9 + \frac{1}{2}x^7 = -\left(x^9 - \frac{1}{2}x^7\right) = -f(x)$

$\Rightarrow f(-x) = -f(x)\ \forall\ x \in D_f$

$\Rightarrow f$ ist ungerade

Aufgabe 8.19

$f(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$

Summen aus geraden und ungeraden Funktionen sind weder gerade noch ungerade. Gegenbeispiel:

$f(1) = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 5$

$f(-1) = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 = 1$

$\Rightarrow f(-x) \neq f(x)$ und $f(-x) \neq -f(x)$ für mindestens ein $x \in D_f$

$\Rightarrow f$ ist weder gerade noch ungerade

Aufgabe 8.20

$f(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}$

Summen aus geraden und ungeraden Funktionen sind weder gerade noch ungerade. Gegenbeispiel:

$f(1) = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{1} = 1 + 1 = 2$

$f(-1) = \frac{1}{(-1)^2} + \frac{1}{-1} = 1 - 1 = 0$

$\Rightarrow f(-x) \neq f(x)$ und $f(-x) \neq -f(x)$ für mindestens ein $x \in D_f$

$\Rightarrow f$ ist weder gerade noch ungerade

Aufgabe 8.21

$f(x) = x^4 - x^{-2}$

$f(-x) = (-x)^4 - (-x)^{-2} = x^4 - x^{-2} = f(x)$

$\Rightarrow f(-x) = f(x) \ \forall \ x \in D_f$

$\Rightarrow f$ ist gerade

Aufgabe 8.22

$f(x) = 3x^5 - 4x^3 + x - 3$

Summen aus geraden und ungeraden Funktionen sind weder gerade noch ungerade. Gegenbeispiel:

$f(2) = 3 \cdot 2^5 - 4 \cdot 2^3 + 2 - 3 = 96 - 32 + 2 - 3 = 63$

$f(-2) = 3 \cdot (-2)^5 - 4 \cdot (-1)^3 + (-1) - 3 = -96 + 32 - 2 - 3 = -69$

(etwas „gemein“: $x = 1$ funktioniert hier ausnahmsweise nicht)

$\Rightarrow f(-x) \neq f(x)$ und $f(-x) \neq -f(x)$ für mindestens ein $x \in D_f$

$\Rightarrow f$ ist weder gerade noch ungerade

Aufgabe 8.23

$f(x) = \sin(x)$

$f(-x) = \sin(-x) = -\sin(x) = -f(x)$

$\Rightarrow f(-x) = -f(x) \ \forall \ x \in D_f$

$\Rightarrow f$ ist ungerade

Aufgabe 8.24

$f(x) = \cos(x)$

$f(-x) = \cos(-x) = \cos(x) = f(x)$

$\Rightarrow f(-x) = f(x) \ \forall \ x \in D_f$

$\Rightarrow f$ ist gerade

Aufgabe 8.25

$f(x) = \tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$

$f(-x) = \tan(-x) = \dfrac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \dfrac{-\sin(x)}{\cos(x)} = -\dfrac{\sin(x)}{\cos(x)} = -\tan(x)$

$\Rightarrow f(-x) = -f(x) \ \forall \ x \in D_f$

$\Rightarrow f$ ist ungerade

Aufgabe 8.26

$f(x) = \sqrt{x}$

Die Wurzelfunktion hat keine Werte für negative Argumente.

$f(1) = \sqrt{1} = 1$

$f(-1) = \sqrt{-1}$ ist nicht definiert

$\Rightarrow f$ ist weder gerade noch ungerade

Aufgabe 8.27

$f(x) = \mathrm{e}^x$

$f(-x) = \mathrm{e}^{-x}$

Das sieht nicht nach einer Symmetrieeigenschaft aus. Gegenbeispiel:

$f(1) = \mathrm{e}^1 = \mathrm{e} \approx 2.718\ldots$

$f(-1) = \mathrm{e}^{-1} = 1/\mathrm{e} \approx 0.367\ldots$

$\Rightarrow f(-x) \neq f(x)$ und $f(-x) \neq -f(x)$ für mindestens ein $x \in D_f$

$\Rightarrow f$ ist weder gerade noch ungerade

Aufgabe 8.28

$f(x) = \ln(x)$

Der natürliche Logarithmus hat keine Werte für negative Argumente.

$f(1) = \ln(1) = 0$

$f(-1) = \ln(-1)$ ist nicht definiert

$\Rightarrow f$ ist weder gerade noch ungerade

Aufgabe 8.29

$f(x) = |x|$

$f(-x) = |-x| = |x| = f(x)$

$\Rightarrow f(-x) = f(x) \ \forall \ x \in D_f$

$\Rightarrow f$ ist gerade

Aufgabe 8.30

$f(x) = |x^3| + 1$

$f(-x) = |(-x)^3| + 1 = |-x^3| + 1 = |x^3| + 1 = f(x)$

$\Rightarrow f(-x) = f(x)\ \forall\ x \in D_f$

$\Rightarrow f$ ist gerade

Aufgabe 8.31

$f(x) = \sqrt{|x|}$

$f(-x) = \sqrt{|-x|} = \sqrt{|x|} = f(x)$

$\Rightarrow f(-x) = f(x)\ \forall\ x \in D_f$

$\Rightarrow f$ ist gerade

Aufgabe 8.32

$f(x) = |x^3| + \sin(x)$

$f(x) = |(-x)^3| + \sin(-x) = |x^3| - \sin(x)$

f ist Summe aus einer geraden und einer ungeraden Funktion.

$f(1) = |1^3| + \sin(1) = 1 + \sin(1) \approx 1.84$

$f(-1) = |(-1)^3| + \sin(-1) = 1 - \sin(1) \approx 0.158$

$\Rightarrow f(-x) \neq f(x)$ und $f(-x) \neq -f(x)$ für mindestens ein $x \in D_f$

$\Rightarrow f$ ist weder gerade noch ungerade

Aufgabe 8.33

$f(x) = \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}$

$f(-x) = \mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{-(-x)} = \mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x} = f(x)$

$\Rightarrow f(-x) = f(x)\ \forall\ x \in D_f$

$\Rightarrow f$ ist gerade

Aufgabe 8.34

$f(x) = \sin(x) \cdot \cos(x)$

$f(-x) = \sin(-x) \cdot \cos(-x) = -\sin(x) \cdot \cos(x) = -f(x)$

$\Rightarrow f(-x) = -f(x)\ \forall\ x \in D_f$

$\Rightarrow f$ ist ungerade

Aufgabe 8.35

$f(x) = x|x^3|$

$f(-x) = (-x) \cdot |(-x)^3| = -x \cdot |-x^3| = -x \cdot |x^3| = f(x)$

$\Rightarrow f(-x) = -f(x) \ \forall \ x \in D_f$

$\Rightarrow f$ ist ungerade

Aufgabe 8.36

$f(x) = x \cdot \sin(x)$

$f(-x) = (-x) \cdot \sin(-x) = -x \cdot (-\sin(x)) = x \cdot \sin(x) = f(x)$

$\Rightarrow f(-x) = f(x) \ \forall \ x \in D_f$

$\Rightarrow f$ ist gerade

Aufgabe 8.37

$f(x) = \sin^2 x \cdot \cos x = \sin(x)^2 \cdot \cos(x)$

$$\begin{aligned} f(-x) &= \sin(-x)^2 \cdot \cos(-x) = (-\sin(x))^2 \cdot \cos(x) \\ &= \sin(x)^2 \cdot \cos(x) = f(x) \end{aligned}$$

$\Rightarrow f(-x) = f(x) \ \forall \ x \in D_f$

$\Rightarrow f$ ist gerade

Aufgabe 8.38

$f(x) = \ln(|x|) + \cos(x) + x^6$

$f(-x) = \ln(|-x|) + \cos(-x) + (-x)^6 = \ln(|x|) + \cos(x) + x^6 = f(x)$

$\Rightarrow f(-x) = f(x) \ \forall \ x \in D_f$

$\Rightarrow f$ ist gerade

Aufgabe 8.39

$f(x) = \mathrm{e}^{x^2} - x$

$f(-x) = \mathrm{e}^{(-x)^2} - (-x) = \mathrm{e}^{x^2} + x$

f ist die Summe einer geraden und einer ungeraden Funktion.

$f(1) = \mathrm{e}^{1^2} - 1 = \mathrm{e} - 1 \approx 2.71828\ldots$

$f(-1) = \mathrm{e}^{(-1)^2} + 1 = \mathrm{e} + 1 \approx 3.71828\ldots$

$\Rightarrow f(-x) \neq f(x)$ und $f(-x) \neq -f(x)$ für mindestens ein $x \in D_f$

$\Rightarrow f$ ist weder gerade noch ungerade

Aufgabe 8.40

$f(x) = (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$

$f(-x) = (-x)^2 + 2(-x) + 1 = x^2 - 2x + 1$

f ist die Summe aus geraden und ungeraden Funktionen.

$f(1) = (1+1)^2 = 2^2 = 4$

$f(-1) = (-1+1)^2 = 0^2 = 0$

$\Rightarrow x \in D_f$ mit $f(-x) \neq f(x)$ und $f(-x) \neq -f(x)$ für mindestens ein $x \in D_f$

$\Rightarrow f$ ist weder gerade noch ungerade

Aufgabe 8.41

$f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$

$f(-x) = \sqrt{(-x)^2 + 1} = \sqrt{x^2 + 1} = f(x)$

$\Rightarrow f(-x) = f(x) \; \forall \; x \in D_f$

$\Rightarrow f$ ist gerade

Aufgabe 8.42

$f(x) = (x+1)(x+3)(x-4)$

Vermutung: f ist weder gerade noch ungerade

$f(1) = (1+1)(1+3)(1-4) = 2 \cdot 4 \cdot (-3) = -24$

$f(-1) = (-1+1)(-1+3)(-1-4) = 0 \cdot 2 \cdot (-5) = 0$

$\Rightarrow f(-x) \neq f(x)$ und $f(-x) \neq -f(x)$ für mindestens ein $x \in D_f$

$\Rightarrow f$ ist weder gerade noch ungerade

Aufgabe 8.43

$f(x) = |x^3 + x^2 + x|$

Vermutung: f ist weder gerade noch ungerade

$f(1) = |1^3 + 1^2 + 1| = |3| = 3$

$f(-1) = |(-1)^3 + (-1)^2 + 1| = |-1 + 1 + 1| = |1| = 1$

$\Rightarrow f(-x) \neq f(x)$ und $f(-x) \neq -f(x)$ für mindestens ein $x \in D_f$

$\Rightarrow f$ ist weder gerade noch ungerade

Aufgabe 8.44

$f(x) = \frac{x}{x^4 + x^2}$

$f(-x) = \frac{-x}{(-x)^4 + (-x)^2} = \frac{-x}{x^4 + x^2} = -\frac{x}{x^4 + x^2} = -f(x)$

$\Rightarrow f(-x) = -f(x) \ \forall \ x \in D_f$

$\Rightarrow f$ ist ungerade

Aufgabe 8.45

$f(x) = (x^2 + 1)^5$

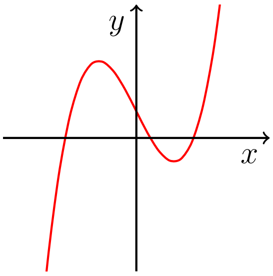
$f(-x) = ((-x)^2 + 1)^5 = (x^2 + 1)^5 = f(x)$

$\Rightarrow f(-x) = f(x) \ \forall \ x \in D_f$

$\Rightarrow f$ ist gerade

Aufgabe 9.1

$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x + 1$



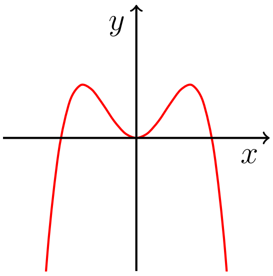
$\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{3}x^3 = -\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{3}x^3 = +\infty$

$\Rightarrow$ Ja

Aufgabe 9.2

$f(x) = \frac{1}{8}x^4 - x^2$



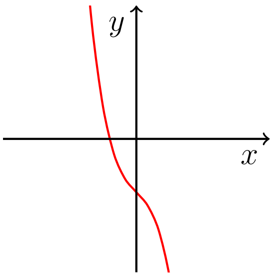
$\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{8}x^4 = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{8}x^4 = +\infty$

$\Rightarrow$ Nein

Aufgabe 9.3

$f(x) = -x^3 - x - 2$



$\lim\limits_{x \to -\infty} (-x^3) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} (-x^3) = -\infty$

$\Rightarrow$ Ja

Aufgabe 9.4

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$$

Aufgabe 9.5

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x^4 = +\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x^4 = +\infty$$

Aufgabe 9.6

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \left(-x^6\right) = -\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(-x^6\right) = -\infty$$

Aufgabe 9.7

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (-2x^3) = +\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (-2x^3) = -\infty$$

Aufgabe 9.8

$f(x) = (x-1)(2-x)(3-x)$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (x-1)(2-x)(3-x) = (+\infty)\cdot(-\infty)\cdot(-\infty) = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (x-1)(2-x)(3-x) = (-\infty)\cdot(+\infty)\cdot(+\infty) = -\infty$$

Aufgabe 9.9

Da der Grad des Zähler- und des Nennerpolynoms gleich 1 ist, hat die Funktion f eine horizontale Asymptote:

$$\lim_{|x|\to\infty} \frac{x+2}{x-1} = \lim_{|x|\to\infty} \frac{x}{x} = \lim_{|x|\to\infty} 1 = 1 \qquad \text{(horizontale Asymptote: } y = 1\text{)}$$

Aufgabe 9.10

Da der Grad des Zählerpolynoms grösser ist als der des Nennerpolynoms, muss eine Polynomdivision durchgeführt werden:

$$(x^2 + 2x + 3) : (x+2) = x + \frac{3}{x+2} \qquad \text{[ohne Lösungsweg]}$$

Die asymptotische Näherungsfunktion von $f(x)$ ist also $g(x) = x$

Aufgabe 9.11

Da der Grad des Zählerpolynoms kleiner ist, als der Grad des Nennerpolynoms, streben die Funktionswerte für $|x| \to \infty$ gegen Null

Horizonale Asymptote: $y = 0$

Aufgabe 9.12

Da der Grad des Zählerpolynoms grösser ist als der des Nennerpolynoms, muss eine Polynomdivision durchgeführt werden:

$(4x^2 - 4x + 5) : (2x - 1) = 2x - 1 + \dfrac{4}{2x - 1}$ [ohne Lösungsweg]

Die asymptotische Näherungsfunktion von $f(x)$ ist also $g(x) = 2x - 1$

Aufgabe 9.13

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

Aufgabe 9.14

$\lim\limits_{x \to -\infty} \ln\left(1 + \dfrac{x}{|x|}\right) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \ln\left(1 + \dfrac{x}{|x|}\right) = \ln 2$

Aufgabe 9.15

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(1 + |x|)}{1 + x^2} = 0$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\ln(1 + |x|)}{1 + x^2} = 0$

Aufgabe 9.16

$\lim\limits_{x \to -\infty} \left[\mathrm{e}^x \cdot \sin(x)\right] = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \left[\mathrm{e}^x \cdot \sin(x)\right]$ nicht definiert!

Aufgabe 10.1

(a) $3 - 7x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 3/7$

(b) $0 = x(x - \sqrt{3}) \Rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = \sqrt{3}$

(c) $D = 37;\ x_1 = \dfrac{3 + \sqrt{37}}{2},\ x_2 = \dfrac{3 - \sqrt{37}}{2}$

(d) $D = -4 \quad \Rightarrow \quad$ keine Nullstellen

(e)
$$\begin{aligned} x^4 - 3x^2 + 2 &= 0 \\ (x^2 - 1)(x^2 - 2) &= 0 \end{aligned}$$

$x_1 = 1,\ x_2 = -1,\ x_3 = \sqrt{2},\ x_4 = -\sqrt{2}$

(f) $x^3 + x^2 - 6x = x(x^2 + x - 6) = x(x - 2)(x + 3) = 0$

$x_1 = 0,\ x_2 = 2,\ x_3 = -3$

Aufgabe 10.2

(a) $x_1 = 0,\ x_2 = 4,\ x_3 = -5,\ x_4 = -\frac{1}{2},\ x_5 = \sqrt{2},\ x_6 = -\pi$

(b) Nullstellen des Zählers: $2,\ 1.5,\ -7$

Nullstellen des Nenners: $0,\ \frac{3}{2},\ 2$

Nullstellen von f: $x_1 = 2,\ x_2 = -7$

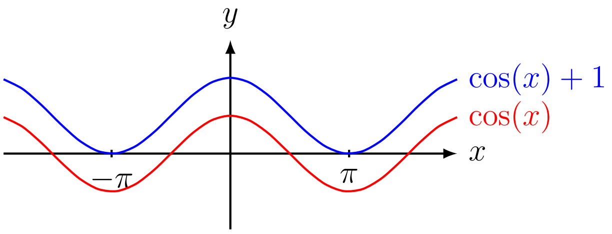
Aufgabe 10.3

(a) $\sin(2x) = 0$
$$\begin{aligned} 2x_k &= k \cdot \pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ x_k &= k \cdot \tfrac{1}{2}\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

(b) $\cos\left(\frac{1}{3}x + 1\right) = 0$
$$\begin{aligned} \tfrac{1}{3}x_k + 1 &= \tfrac{1}{2}\pi + k \cdot \pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ x_k &= \tfrac{3}{2}\pi + 3k \cdot \pi - 1 \quad (k \in \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

(c) $\tan(4 - x) = 0$
$$\begin{aligned} (4 - x_k) &= k \cdot \pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ -x_k &= k \cdot \pi - 4 \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ x_k &= k \cdot \pi + 4 \quad (k \in \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

Aufgabe 10.4



$$\begin{aligned}
\cos x + 1 &= 0 \\
\cos x &= -1 \\
\cos x &= \cos(\pi + k \cdot 2\pi) \quad (k \in \mathbb{Z}) \\
x_k &= \pi + k \cdot 2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})
\end{aligned}$$

Aufgabe 10.5

(a)
$$\begin{aligned}
\ln x - 1 &= 0 \\
\ln x &= 1 \\
x &= \mathrm{e}
\end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned}
\ln(x^2 - 5x + 5) &= 0 \\
x^2 - 5x + 5 &= 1 \\
x^2 - 5x + 4 &= 0 \\
(x-1)(x-4) &= 0 \\
x_1 &= 1 \\
x_2 &= 4
\end{aligned}$$

Aufgabe 10.6

(a)

x		-2	-1	2
1	1	-1	-2	0

Also ist $x = 1$ eine Nullstelle und $(x-1)$ ein Linearfaktor.

$$\begin{aligned}
(x-1)(x^2 - x - 2) &= 0 \\
(x-1)(x-2)(x+1) &= 0 \\
x_1 &= 1 \\
x_2 &= 2 \\
x_3 &= -1
\end{aligned}$$

(b)

x		-2	-5	6
1	1	-1	-6	0

Also ist $x = 1$ eine Nullstelle und $(x-1)$ ein Linearfaktor.

$$
\begin{aligned}
(x-1)(x^2-x-6) &= 0 \\
(x-1)(x+2)(x-3) &= 0 \\
x_1 &= 1 \\
x_2 &= -2 \\
x_3 &= 3
\end{aligned}
$$

Aufgabe 10.7

(a) $f(0) = 3$

(b) $f(0) = 16$

(c) $f(0) = -2/3$

(d) $f(0) = 2$

(e) $f(0) = 1$

(f) $f(0) = \ln 5$

Aufgabe 10.8

(a) $x_1 = -2$, $x_2 = \frac{1}{2}$

(b) $x = 1$

(c) Zähler: 1, 3; Nenner: 2, −1, 1; gesamt: $x = 3$

(d) $x_1 = x_2 = 1$, $x_3 = 3$, $x_4 = -2$

Bei mehrfachen Nullstellen, treten oft Rundungsfehler auf, die korrigiert werden müssen.

Aufgabe 10.9

(a) $f(x) = \mathrm{e}^{-x} - \frac{1}{2}x$; x_1, $x_2 = 1$

$$x_2 = x_1 - f(x_1)\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = 0.8833$$

$|f(x_2)| = 0.028 < 10^{-2}$ falsch

$$x_3 = x_2 - f(x_2)\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = 0.8516$$

$|f(x_3)| = 0.0009462 < 10^{-2}$ wahr

(b) $f(x) = \sin(x) - x^{-1}$; $x_1 = 1,\ x_2 = 2$ (Bogenmass!)

$$x_2 = x_1 - f(x_1)\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = 1.279$$

$f(x_2) = 0.1760 < 10^{-2}$ falsch

$$x_3 = x_2 - f(x_2)\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = 0.7352$$

$f(x_3) = 0.6894 < 10^{-2}$ falsch

$$x_4 = x_3 - f(x_3)\frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} = 1.169$$

$f(x_4) = 0.06441 < 10^{-2}$ falsch

$$x_5 = x_4 - f(x_4)\frac{f(x_4) - f(x_3)}{x_4 - x_3} = 1.132$$

$f(x_5) = 0.02128 < 10^{-2}$ falsch

$$x_6 = x_5 - f(x_5)\frac{f(x_5) - f(x_4)}{x_5 - x_4} = 1.113$$

$f(x_6) = 0.0014 < 10^{-2}$ wahr

(c) $f(x) = x^x - \sqrt{x}$; $x_1 = 1,\ x_2 = 2$

$$x_2 = x_1 - f(x_1)\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = 1.0$$

$f(x_2) = 0.0 < 10^{-2}$ wahr