

Differenzialrechnung

Übungen (I)

Aufgabe 1.1

Bestimme einige Glieder der Folge und untersuche, ob sie beschränkt, monoton wachsend, monoton fallend oder alternierend ist.

$$(a) \ a_n = \frac{n^2}{n+1}$$

$$(b) \ a_n = \frac{(-1)^n}{n}$$

$$(c) \ a_n = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n-1}$$

$$(d) \ a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^3$$

$$(e) \ a_n = \sqrt[n]{2}$$

$$(f) \ a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$$

$$(g) \ a_n = \frac{n^2}{2^n}$$

Aufgabe 1.1

(a) $\frac{1}{2}, \frac{4}{3}, \frac{9}{4}, \frac{16}{5}, \frac{25}{6}, \dots$

Aufgabe 1.1

(a) $\frac{1}{2}, \frac{4}{3}, \frac{9}{4}, \frac{16}{5}, \frac{25}{6}, \dots$

nicht beschränkt, monoton wachsend

Aufgabe 1.1

(a) $\frac{1}{2}, \frac{4}{3}, \frac{9}{4}, \frac{16}{5}, \frac{25}{6}, \dots$

nicht beschränkt, monoton wachsend

(b) $-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, \dots$

Aufgabe 1.1

(a) $\frac{1}{2}, \frac{4}{3}, \frac{9}{4}, \frac{16}{5}, \frac{25}{6}, \dots$

nicht beschränkt, monoton wachsend

(b) $-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, \dots$

beschränkt, nicht monoton

Aufgabe 1.1

(a) $\frac{1}{2}, \frac{4}{3}, \frac{9}{4}, \frac{16}{5}, \frac{25}{6}, \dots$

nicht beschränkt, monoton wachsend

(b) $-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, \dots$

beschränkt, nicht monoton

(c) $-\frac{2}{3}, -\frac{2}{15}, -\frac{2}{35}, -\frac{2}{63}, -\frac{2}{99}, \dots$

Aufgabe 1.1

(a) $\frac{1}{2}, \frac{4}{3}, \frac{9}{4}, \frac{16}{5}, \frac{25}{6}, \dots$

nicht beschränkt, monoton wachsend

(b) $-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, \dots$

beschränkt, nicht monoton

(c) $-\frac{2}{3}, -\frac{2}{15}, -\frac{2}{35}, -\frac{2}{63}, -\frac{2}{99}, \dots$

beschränkt, monoton wachsend

Aufgabe 1.1

(a) $\frac{1}{2}, \frac{4}{3}, \frac{9}{4}, \frac{16}{5}, \frac{25}{6}, \dots$

nicht beschränkt, monoton wachsend

(b) $-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, \dots$

beschränkt, nicht monoton

(c) $-\frac{2}{3}, -\frac{2}{15}, -\frac{2}{35}, -\frac{2}{63}, -\frac{2}{99}, \dots$

beschränkt, monoton wachsend

(d) $8, \frac{27}{8}, \frac{64}{27}, \frac{125}{64}, \frac{216}{125}, \dots$

Aufgabe 1.1

(a) $\frac{1}{2}, \frac{4}{3}, \frac{9}{4}, \frac{16}{5}, \frac{25}{6}, \dots$

nicht beschränkt, monoton wachsend

(b) $-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, \dots$

beschränkt, nicht monoton

(c) $-\frac{2}{3}, -\frac{2}{15}, -\frac{2}{35}, -\frac{2}{63}, -\frac{2}{99}, \dots$

beschränkt, monoton wachsend

(d) $8, \frac{27}{8}, \frac{64}{27}, \frac{125}{64}, \frac{216}{125}, \dots$

beschränkt, monoton fallend

(e) 2, 1.4142, 1.2599, 1.1892, 1.1487, ...

(e) 2, 1.4142, 1.2599, 1.1892, 1.1487, ...

beschränkt, monoton fallend

(e) 2, 1.4142, 1.2599, 1.1892, 1.1487, ...

beschränkt, monoton fallend

(f) 0.41421, 0.31784, 0.26795, 0.23607, 0.21342, ...

(e) 2, 1.4142, 1.2599, 1.1892, 1.1487, ...

beschränkt, monoton fallend

(f) 0.41421, 0.31784, 0.26795, 0.23607, 0.21342, ...

beschränkt, monoton fallend

(e) 2, 1.4142, 1.2599, 1.1892, 1.1487, ...

beschränkt, monoton fallend

(f) 0.41421, 0.31784, 0.26795, 0.23607, 0.21342, ...

beschränkt, monoton fallend

(g) $\frac{1}{2}$, 1, $\frac{9}{8}$, 1, $\frac{25}{32}$, ...

(e) 2, 1.4142, 1.2599, 1.1892, 1.1487, ...

beschränkt, monoton fallend

(f) 0.41421, 0.31784, 0.26795, 0.23607, 0.21342, ...

beschränkt, monoton fallend

(g) $\frac{1}{2}$, 1, $\frac{9}{8}$, 1, $\frac{25}{32}$, ...

beschränkt, nicht monoton

Aufgabe 1.2

Untersuche, ob die nachstehenden Folgen konvergieren oder divergieren. Falls sie konvergieren, ist der Grenzwert anzugeben.

Beachte: Winkel sind im Bogenmass angegeben.

(a) $a_n = (-1)^n$

(b) $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$

(c) $a_n = \sin n$

(d) $a_n = \frac{\cos n}{n}$

(e) $a_n = \frac{3n}{n+1} - \frac{n}{n+4}$

(f) $a_n = 0.8^n$

(g) $a_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n$

(h) $a_n = \frac{3^n}{n^3}$

(i) $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

(j) $a_n = \sqrt[n]{n}$

Aufgabe 1.2

(a) divergent

(b) konvergent; $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$

(c) divergent

(d) konvergent; $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos n}{n} = 0$

(e) konvergent; $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n}{n+1} - \frac{n}{n+4} \right) = 2$

(f) konvergent; $\lim_{n \rightarrow \infty} 0.8^n = 0$

(g) divergent

(h) divergent

(i) konvergent; $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = e$

(j) konvergent; $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$

Aufgabe 1.3

Bestimme den Grenzwert der Folgen (a_n) .

(a) $a_n = \frac{1}{n}$

(b) $a_n = \frac{1}{n^2} - 2$

(c) $a_n = \frac{1}{n(n+1)}$

(d) $a_n = \frac{3n^2 - 1}{4n^2 + 2}$

(e) $a_n = \sqrt{\frac{n}{4n+1}}$

(f) $a_n = e^{\frac{1}{n}}$

(g) $a_n = e^{-n}$

Aufgabe 1.3

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

$$(b) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} - 2 = -2$$

$$(c) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n(n+1)} = 0$$

$$(d) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 - 1}{4n^2 + 2} = \frac{3}{4}$$

$$(e) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{n}{4n+1}} = \frac{1}{2}$$

$$(f) \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{n}} = 1$$

$$(g) \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-n} = 0$$

Aufgabe 1.4

Untersuche, ob die Folgen konvergent sind. Gib in diesem Fall den Grenzwert an.

$$(a) \ a_n = \frac{1 - 1/n^2}{1 + 1/n^2}$$

$$(b) \ a_n = \frac{n + 1}{2n + 1}$$

$$(c) \ a_n = \frac{2 + 3n^3}{n^3 - 4}$$

$$(d) \ a_n = \frac{n^3 + n}{n^4 + n^2}$$

$$(e) \ a_n = \frac{2n^3 - 2}{n - 2}$$

$$(f) \ a_n = \frac{2n^3 - 3n + 1}{4n + 5n^3 + 2}$$

Aufgabe 1.4

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$

Aufgabe 1.4

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$

(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{2}$

Aufgabe 1.4

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$

(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{2}$

(c) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$

Aufgabe 1.4

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$

(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{2}$

(c) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$

(d) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

Aufgabe 1.4

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$

(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{2}$

(c) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$

(d) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

(e) divergent

Aufgabe 1.4

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$

(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{2}$

(c) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$

(d) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

(e) divergent

(f) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$

Aufgabe 1.5

Untersuche, ob die Folgen konvergent sind. Falls ja, gib den Grenzwert an.

(a) $a_n = \frac{\sqrt{n} + 1}{2\sqrt{n} + 3}$

(b) $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

(c) $a_n = \sqrt{n^2 + 1} - n + 1$

(d) $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n^2 + 1}$

Aufgabe 1.5

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{2}$

Aufgabe 1.5

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{2}$

(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

Aufgabe 1.5

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{2}$

(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

(c) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$

Aufgabe 1.5

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{2}$

(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

(c) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$

(d) divergent

Aufgabe 1.6

Widerlege die folgenden Behauptungen durch ein Gegenbeispiel:

- (a) Jede monotone Folge ist konvergent.
- (b) Jede beschränkte Folge ist divergent.
- (c) Jede divergente Folge ist unbeschränkt.
- (d) Ist a_n divergent, so ist $\frac{1}{a_n}$ konvergent.

Aufgabe 1.6

- (a) $a_n = n$ monoton aber nicht konvergent.
- (b) $a_n = \frac{1}{n}$ beschränkt aber nicht divergent.
- (c) $a_n = (-1)^n$ divergent aber nicht unbeschränkt.
- (d) $a_n = (-1)^n$ divergent aber $1/(-1)^n$ ist nicht konvergent.

Aufgabe 2.1

$$\lim_{x \rightarrow 2} (3x - 7)$$

Aufgabe 2.1

$$\lim_{x \rightarrow 2} (3x - 7) =$$

Aufgabe 2.1

$$\lim_{x \rightarrow 2} (3x - 7) = -1$$

Aufgabe 2.2

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \sin 3x$$

Aufgabe 2.2

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \sin 3x =$$

Aufgabe 2.2

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \sin 3x = 0$$

Aufgabe 2.3

$$\lim_{x \rightarrow 0} (3x^2 - 4x + 1)$$

Aufgabe 2.3

$$\lim_{x \rightarrow 0} (3x^2 - 4x + 1) =$$

Aufgabe 2.3

$$\lim_{x \rightarrow 0} (3x^2 - 4x + 1) = 1$$

Aufgabe 2.4

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x}$$

Aufgabe 2.4

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} =$$

Aufgabe 2.4

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} = 0$$

Aufgabe 2.5

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 - 6x}{x - 3}$$

Aufgabe 2.5

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 - 6x}{x - 3} =$$

Aufgabe 2.5

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 - 6x}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x(x - 3)}{x - 3} =$$

Aufgabe 2.5

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 - 6x}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x(x - 3)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} 2x =$$

Aufgabe 2.5

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 - 6x}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x(x - 3)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} 2x = 6$$

Aufgabe 2.6

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+2)^3}{(x+2)}$$

Aufgabe 2.6

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+2)^3}{(x+2)} =$$

Aufgabe 2.6

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+2)^3}{(x+2)} = \lim_{x \rightarrow -2} (x+2)^2 =$$

Aufgabe 2.6

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+2)^3}{(x+2)} = \lim_{x \rightarrow -2} (x+2)^2 = 0$$

Aufgabe 2.7

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{x - 4}$$

Aufgabe 2.7

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{x - 4} =$$

Aufgabe 2.7

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x - 4)(x + 4)}{x - 4} =$$

Aufgabe 2.7

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x - 4)(x + 4)}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow 4} (x + 4) =$$

Aufgabe 2.7

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x - 4)(x + 4)}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow 4} (x + 4) = 8$$

Aufgabe 2.8

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{2}{3}} \frac{9x^2 - 4}{3x + 2}$$

Aufgabe 2.8

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{2}{3}} \frac{9x^2 - 4}{3x + 2} =$$

Aufgabe 2.8

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{2}{3}} \frac{9x^2 - 4}{3x + 2} = \lim_{x \rightarrow -\frac{2}{3}} \frac{(3x - 2)(3x + 2)}{3x + 2} =$$

Aufgabe 2.8

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{2}{3}} \frac{9x^2 - 4}{3x + 2} = \lim_{x \rightarrow -\frac{2}{3}} \frac{(3x - 2)(3x + 2)}{3x + 2} = \lim_{x \rightarrow -\frac{2}{3}} (3x - 2) =$$

Aufgabe 2.8

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{2}{3}} \frac{9x^2 - 4}{3x + 2} = \lim_{x \rightarrow -\frac{2}{3}} \frac{(3x - 2)(3x + 2)}{3x + 2} = \lim_{x \rightarrow -\frac{2}{3}} (3x - 2) = -4$$

Aufgabe 2.9

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^4 - a^4}{x - a}$$

Aufgabe 2.9

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^4 - a^4}{x - a} =$$

Aufgabe 2.9

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^4 - a^4}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x^2 + a^2)(x^2 - a^2)}{x - a}$$
$$=$$

Aufgabe 2.9

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^4 - a^4}{x - a} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x^2 + a^2)(x^2 - a^2)}{x - a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x^2 + a^2)(x - a)(x + a)}{x - a} \\ &= \end{aligned}$$

Aufgabe 2.9

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^4 - a^4}{x - a} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x^2 + a^2)(x^2 - a^2)}{x - a} \\&= \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x^2 + a^2)(x - a)(x + a)}{x - a} \\&= \lim_{x \rightarrow a} (x^2 + a^2)(x + a) =\end{aligned}$$

Aufgabe 2.9

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^4 - a^4}{x - a} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x^2 + a^2)(x^2 - a^2)}{x - a} \\&= \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x^2 + a^2)(x - a)(x + a)}{x - a} \\&= \lim_{x \rightarrow a} (x^2 + a^2)(x + a) = 4a^3\end{aligned}$$

Aufgabe 2.10

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{x-2}$$

Aufgabe 2.10

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{x-2} =$$

Aufgabe 2.10

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{x-2} = \infty$$

Aufgabe 2.11

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 4x + 4}{x^2 - 4}$$

Aufgabe 2.11

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 4x + 4}{x^2 - 4} =$$

Aufgabe 2.11

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 4x + 4}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+2)^2}{(x-2)(x+2)}$$
$$=$$

Aufgabe 2.11

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 4x + 4}{x^2 - 4} &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+2)^2}{(x-2)(x+2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+2}{x-2} \\ &= \end{aligned}$$

Aufgabe 2.11

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 4x + 4}{x^2 - 4} &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+2)^2}{(x-2)(x+2)} \\&= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+2}{x-2} \\&= \frac{0}{-4} \\&= \end{aligned}$$

Aufgabe 2.11

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 4x + 4}{x^2 - 4} &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+2)^2}{(x-2)(x+2)} \\&= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+2}{x-2} \\&= \frac{0}{-4} \\&= 0\end{aligned}$$

Aufgabe 2.12

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 5x^2 + 2x + 8}{x^3 - 7x + 6}$$

Aufgabe 2.12

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 5x^2 + 2x + 8}{x^3 - 7x + 6} = \dots$$

Aufgabe 2.12

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 5x^2 + 2x + 8}{x^3 - 7x + 6} = \dots$$

Setzt man $x = 2$ in Zähler und Nenner ein, erhält man $0/0$. Also ist $(x - 2)$ ein Linearfaktor von Zähler und Nenner.

Aufgabe 2.12

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 5x^2 + 2x + 8}{x^3 - 7x + 6} = \dots$$

Setzt man $x = 2$ in Zähler und Nenner ein, erhält man $0/0$. Also ist $(x - 2)$ ein Linearfaktor von Zähler und Nenner.

Polynomdivision $(x^3 - 5x^2 + 2x + 8) : (x - 2)$ mit Horner-Schema:

$$\begin{array}{r|rrrr} & & -5 & 2 & 8 \\ 2 & 1 & -3 & -4 & 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow (x^3 - 5x^2 + 2x + 8) : (x - 2) = x^2 - 3x - 4$$

Polynomdivision $(x^3 - 7x + 6) : (x - 2)$ mit Horner-Schema

$$\begin{array}{r|rrrr} & & 0 & -7 & 6 \\ 2 & 1 & 2 & -3 & 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow (x^3 - 7x + 6) : (x - 2) = x^2 + 2x - 3$$

Aufgabe 2.12

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 5x^2 + 2x + 8}{x^3 - 7x + 6} = \dots$$

Setzt man $x = 2$ in Zähler und Nenner ein, erhält man $0/0$. Also ist $(x - 2)$ ein Linearfaktor von Zähler und Nenner.

Polynomdivision $(x^3 - 5x^2 + 2x + 8) : (x - 2)$ mit Horner-Schema:

$$\begin{array}{r|rrrr} & & -5 & 2 & 8 \\ 2 & 1 & -3 & -4 & 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow (x^3 - 5x^2 + 2x + 8) : (x - 2) = x^2 - 3x - 4$$

Polynomdivision $(x^3 - 7x + 6) : (x - 2)$ mit Horner-Schema

$$\begin{array}{r|rrrr} & & 0 & -7 & 6 \\ 2 & 1 & 2 & -3 & 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow (x^3 - 7x + 6) : (x - 2) = x^2 + 2x - 3$$

$\dots =$

Aufgabe 2.12

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 5x^2 + 2x + 8}{x^3 - 7x + 6} = \dots$$

Setzt man $x = 2$ in Zähler und Nenner ein, erhält man $0/0$. Also ist $(x - 2)$ ein Linearfaktor von Zähler und Nenner.

Polynomdivision $(x^3 - 5x^2 + 2x + 8) : (x - 2)$ mit Horner-Schema:

$$\begin{array}{r|rrrr} & & -5 & 2 & 8 \\ 2 & 1 & -3 & -4 & 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow (x^3 - 5x^2 + 2x + 8) : (x - 2) = x^2 - 3x - 4$$

Polynomdivision $(x^3 - 7x + 6) : (x - 2)$ mit Horner-Schema

$$\begin{array}{r|rrrr} & & 0 & -7 & 6 \\ 2 & 1 & 2 & -3 & 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow (x^3 - 7x + 6) : (x - 2) = x^2 + 2x - 3$$

$$\dots = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x^2 - 3x - 4)}{(x - 2)(x^2 + 2x - 3)} =$$

Aufgabe 2.12

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 5x^2 + 2x + 8}{x^3 - 7x + 6} = \dots$$

Setzt man $x = 2$ in Zähler und Nenner ein, erhält man $0/0$. Also ist $(x - 2)$ ein Linearfaktor von Zähler und Nenner.

Polynomdivision $(x^3 - 5x^2 + 2x + 8) : (x - 2)$ mit Horner-Schema:

$$\begin{array}{r|rrrr} & & -5 & 2 & 8 \\ 2 & 1 & -3 & -4 & 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow (x^3 - 5x^2 + 2x + 8) : (x - 2) = x^2 - 3x - 4$$

Polynomdivision $(x^3 - 7x + 6) : (x - 2)$ mit Horner-Schema

$$\begin{array}{r|rrrr} & & 0 & -7 & 6 \\ 2 & 1 & 2 & -3 & 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow (x^3 - 7x + 6) : (x - 2) = x^2 + 2x - 3$$

$$\dots = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x^2 - 3x - 4)}{(x - 2)(x^2 + 2x - 3)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x - 4}{x^2 + 2x - 3} =$$

Aufgabe 2.12

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 5x^2 + 2x + 8}{x^3 - 7x + 6} = \dots$$

Setzt man $x = 2$ in Zähler und Nenner ein, erhält man $0/0$. Also ist $(x - 2)$ ein Linearfaktor von Zähler und Nenner.

Polynomdivision $(x^3 - 5x^2 + 2x + 8) : (x - 2)$ mit Horner-Schema:

$$\begin{array}{r|rrrr} & & -5 & 2 & 8 \\ 2 & 1 & -3 & -4 & 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow (x^3 - 5x^2 + 2x + 8) : (x - 2) = x^2 - 3x - 4$$

Polynomdivision $(x^3 - 7x + 6) : (x - 2)$ mit Horner-Schema

$$\begin{array}{r|rrrr} & & 0 & -7 & 6 \\ 2 & 1 & 2 & -3 & 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow (x^3 - 7x + 6) : (x - 2) = x^2 + 2x - 3$$

$$\dots = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x^2 - 3x - 4)}{(x - 2)(x^2 + 2x - 3)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x - 4}{x^2 + 2x - 3} = -\frac{6}{5}$$

Aufgabe 2.13

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{1-\sqrt{x}}$$

Aufgabe 2.13

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{1-\sqrt{x}} =$$

Aufgabe 2.13

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{1-\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}{1-\sqrt{x}} =$$

Aufgabe 2.13

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{1-\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}{1-\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 1} (1+\sqrt{x}) =$$

Aufgabe 2.13

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{1-\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}{1-\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 1} (1+\sqrt{x}) = 2$$

Aufgabe 2.14

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x}$$

Aufgabe 2.14

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} =$$

Aufgabe 2.14

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = \infty$$

Aufgabe 2.15

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{1}{x-3}$$

Aufgabe 2.15

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{1}{x-3} =$$

Aufgabe 2.15

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{1}{x-3} = -\infty$$

Aufgabe 2.16

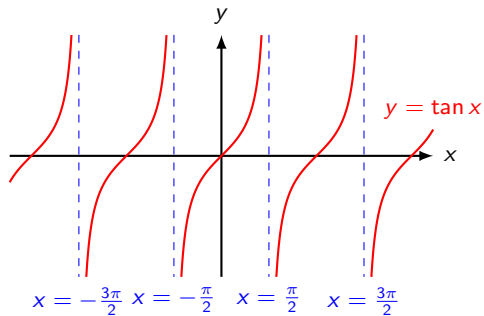
$$\lim_{x \rightarrow \pi^+} \tan \frac{x}{2}$$

Aufgabe 2.16

$$\lim_{x \rightarrow \pi^+} \tan \frac{x}{2} =$$

Aufgabe 2.16

$$\lim_{x \rightarrow \pi^+} \tan \frac{x}{2} = -\infty$$



Aufgabe 2.17

$$\lim_{x \rightarrow \pi^-} \tan \frac{x}{2}$$

Aufgabe 2.17

$$\lim_{x \rightarrow \pi^-} \tan \frac{x}{2} =$$

Aufgabe 2.17

$$\lim_{x \rightarrow \pi^-} \tan \frac{x}{2} = \infty \text{ (siehe Graph)}$$

Aufgabe 2.18

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-\frac{1}{x}}$$

Aufgabe 2.18

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-\frac{1}{x}} = \dots$$

Aufgabe 2.18

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-\frac{1}{x}} = \dots$$

Aus $x \rightarrow 0^+$ folgt $-\frac{1}{x} \rightarrow -\infty$.

Aufgabe 2.18

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-\frac{1}{x}} = \dots$$

Aus $x \rightarrow 0^+$ folgt $-\frac{1}{x} \rightarrow -\infty$.

Mit der Substitution $a = -\frac{1}{x}$ lässt sich der obige Grenzwert etwas vereinfachen:

Aufgabe 2.18

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-\frac{1}{x}} = \dots$$

Aus $x \rightarrow 0^+$ folgt $-\frac{1}{x} \rightarrow -\infty$.

Mit der Substitution $a = -\frac{1}{x}$ lässt sich der obige Grenzwert etwas vereinfachen:

$$\dots = \lim_{a \rightarrow -\infty} e^a =$$

Aufgabe 2.18

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-\frac{1}{x}} = \dots$$

Aus $x \rightarrow 0^+$ folgt $-\frac{1}{x} \rightarrow -\infty$.

Mit der Substitution $a = -\frac{1}{x}$ lässt sich der obige Grenzwert etwas vereinfachen:

$$\dots = \lim_{a \rightarrow -\infty} e^a = 0$$

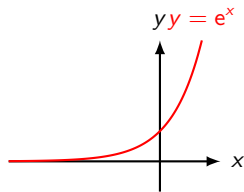
Aufgabe 2.18

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-\frac{1}{x}} = \dots$$

Aus $x \rightarrow 0^+$ folgt $-\frac{1}{x} \rightarrow -\infty$.

Mit der Substitution $a = -\frac{1}{x}$ lässt sich der obige Grenzwert etwas vereinfachen:

$$\dots = \lim_{a \rightarrow -\infty} e^a = 0$$



Aufgabe 2.19

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} e^{-\frac{1}{x}}$$

Aufgabe 2.19

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} e^{-\frac{1}{x}} = \dots$$

Aufgabe 2.19

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} e^{-\frac{1}{x}} = \dots$$

Aus $x \rightarrow 0^-$ folgt $-\frac{1}{x} \rightarrow +\infty$.

Aufgabe 2.19

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} e^{-\frac{1}{x}} = \dots$$

Aus $x \rightarrow 0^-$ folgt $-\frac{1}{x} \rightarrow +\infty$.

Mit der Substitution $a = -\frac{1}{x}$ lässt sich der obige Grenzwert etwas vereinfachen:

Aufgabe 2.19

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} e^{-\frac{1}{x}} = \dots$$

Aus $x \rightarrow 0^-$ folgt $-\frac{1}{x} \rightarrow +\infty$.

Mit der Substitution $a = -\frac{1}{x}$ lässt sich der obige Grenzwert etwas vereinfachen:

$$\dots = \lim_{a \rightarrow +\infty} e^a =$$

Aufgabe 2.19

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} e^{-\frac{1}{x}} = \dots$$

Aus $x \rightarrow 0^-$ folgt $-\frac{1}{x} \rightarrow +\infty$.

Mit der Substitution $a = -\frac{1}{x}$ lässt sich der obige Grenzwert etwas vereinfachen:

$$\dots = \lim_{a \rightarrow +\infty} e^a = \infty$$

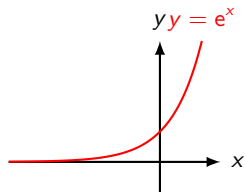
Aufgabe 2.19

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} e^{-\frac{1}{x}} = \dots$$

Aus $x \rightarrow 0^-$ folgt $-\frac{1}{x} \rightarrow +\infty$.

Mit der Substitution $a = -\frac{1}{x}$ lässt sich der obige Grenzwert etwas vereinfachen:

$$\dots = \lim_{a \rightarrow +\infty} e^a = \infty$$



Aufgabe 2.20

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$$

Aufgabe 2.20

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} =$$

Aufgabe 2.20

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Aufgabe 2.21

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{|x|}$$

Aufgabe 2.21

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{|x|} =$$

Aufgabe 2.21

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{|x|} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} =$$

Aufgabe 2.21

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{|x|} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 =$$

Aufgabe 2.21

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{|x|} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 = 1$$

Aufgabe 2.21

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{|x|} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 = 1$$

Der Betrag darf weggelassen werden, da die Folge sich von der positiven Seite der Null nähert.

Aufgabe 2.22

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{|x|}$$

Aufgabe 2.22

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{|x|} =$$

Aufgabe 2.22

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{|x|} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{-x} =$$

Aufgabe 2.22

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{|x|} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{-x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} -1 =$$

Aufgabe 2.22

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{|x|} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{-x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} -1 = -1$$

Aufgabe 2.22

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{|x|} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{-x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} -1 = -1$$

Der Betrag darf weggelassen werden, wenn man dafür einen Vorzeichenwechsel durchführt, denn die Folge besteht nur aus negativen Werten.

Aufgabe 2.23

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}}$$

Aufgabe 2.23

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}} =$$

Aufgabe 2.23

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x - 0}{x - \frac{\pi}{2}} =$$

Aufgabe 2.23

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}} &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x - 0}{x - \frac{\pi}{2}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x - \cos \frac{\pi}{2}}{x - \frac{\pi}{2}} \\ &= \end{aligned}$$

Aufgabe 2.23

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}} &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x - 0}{x - \frac{\pi}{2}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x - \cos \frac{\pi}{2}}{x - \frac{\pi}{2}} \\&= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{-2 \sin \left(\left[x - \frac{\pi}{2} \right] / 2 \right) \sin \left(\left[x + \frac{\pi}{2} \right] / 2 \right)}{x - \frac{\pi}{2}} \\&= \end{aligned}$$

Aufgabe 2.23

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}} &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x - 0}{x - \frac{\pi}{2}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x - \cos \frac{\pi}{2}}{x - \frac{\pi}{2}} \\&= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{-2 \sin \left(\left[x - \frac{\pi}{2} \right] / 2 \right) \sin \left(\left[x + \frac{\pi}{2} \right] / 2 \right)}{x - \frac{\pi}{2}} \\&= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{-\sin \left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \sin \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right)}{\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}}\end{aligned}$$

Aufgabe 2.23

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}} &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x - 0}{x - \frac{\pi}{2}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x - \cos \frac{\pi}{2}}{x - \frac{\pi}{2}} \\&= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{-2 \sin \left(\left[x - \frac{\pi}{2} \right] / 2 \right) \sin \left(\left[x + \frac{\pi}{2} \right] / 2 \right)}{x - \frac{\pi}{2}} \\&= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{-\sin \left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \sin \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right)}{\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}}\end{aligned}$$

Substitution: $\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4} = a \quad (\Leftrightarrow x = 2a + \frac{\pi}{2})$

Aufgabe 2.23

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}} &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x - 0}{x - \frac{\pi}{2}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x - \cos \frac{\pi}{2}}{x - \frac{\pi}{2}} \\&= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{-2 \sin \left(\left[x - \frac{\pi}{2} \right] / 2 \right) \sin \left(\left[x + \frac{\pi}{2} \right] / 2 \right)}{x - \frac{\pi}{2}} \\&= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{-\sin \left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \sin \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right)}{\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}}\end{aligned}$$

Substitution: $\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4} = a \quad (\Leftrightarrow x = 2a + \frac{\pi}{2})$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4} \right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{a \rightarrow 0} a = 0$$

Aufgabe 2.23

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}} &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x - 0}{x - \frac{\pi}{2}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x - \cos \frac{\pi}{2}}{x - \frac{\pi}{2}} \\&= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{-2 \sin\left(\left[x - \frac{\pi}{2}\right]/2\right) \sin\left(\left[x + \frac{\pi}{2}\right]/2\right)}{x - \frac{\pi}{2}} \\&= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{-\sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)}{\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}}\end{aligned}$$

Substitution: $\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4} = a \quad (\Leftrightarrow x = 2a + \frac{\pi}{2})$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{a \rightarrow 0} a = 0$$

$$\begin{aligned}\lim_{a \rightarrow 0} \frac{-\sin(a) \sin\left(\frac{a+\pi/2}{2} + \frac{\pi}{4}\right)}{a} &= \lim_{a \rightarrow 0} \left[\frac{-\sin(a)}{a} \cdot \sin\left(\frac{a}{2} + \frac{\pi}{2}\right) \right] \\&= -1 \cdot \sin \frac{\pi}{2} = -1 \cdot 1 = -1\end{aligned}$$

Aufgabe 2.24

$$\lim_{x \rightarrow 0} e^{-1/x^2}$$

Aufgabe 2.24

$$\lim_{x \rightarrow 0} e^{-1/x^2} =$$

Aufgabe 2.24

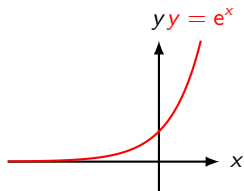
$$\lim_{x \rightarrow 0} e^{-1/x^2} = e^{-\infty} =$$

Aufgabe 2.24

$$\lim_{x \rightarrow 0} e^{-1/x^2} = e^{-\infty} = 0$$

Aufgabe 2.24

$$\lim_{x \rightarrow 0} e^{-1/x^2} = e^{-\infty} = 0$$



Aufgabe 2.25

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x}$$

Aufgabe 2.25

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} =$$

Aufgabe 2.25

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$$

Aufgabe 2.26

$$\lim_{x \rightarrow \infty} = 2^x$$

Aufgabe 2.26

$$\lim_{x \rightarrow \infty} 2^x =$$

Aufgabe 2.26

$$\lim_{x \rightarrow \infty} 2^x = \infty$$

Aufgabe 2.27

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 2^x$$

Aufgabe 2.27

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 2^x =$$

Aufgabe 2.27

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 2^x = 0$$

Aufgabe 2.28

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3+x}{x}$$

Aufgabe 2.28

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3+x}{x} =$$

Aufgabe 2.28

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3+x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3/x + 1}{1} =$$

Aufgabe 2.28

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3+x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3/x + 1}{1} = \frac{0+1}{1} =$$

Aufgabe 2.28

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3+x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3/x + 1}{1} = \frac{0+1}{1} = 1$$

Aufgabe 2.29

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^3 + 2x + 1}$$

Aufgabe 2.29

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^3 + 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1/x}{1 + 2/x^2 + 1/x^2} = \frac{0}{1 + 0 + 0} =$$

Aufgabe 2.29

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^3 + 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1/x}{1 + 2/x^2 + 1/x^2} = \frac{0}{1 + 0 + 0} = 0$$

Aufgabe 2.30

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x + 3}{5x - 9}$$

Aufgabe 2.30

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x + 3}{5x - 9} =$$

Aufgabe 2.30

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x + 3}{5x - 9} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4 + 3/x}{5 - 9/x} =$$

Aufgabe 2.30

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x + 3}{5x - 9} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4 + 3/x}{5 - 9/x} = \frac{4}{5}$$

Aufgabe 2.31

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 4x + 2}{2x^2 + 1}$$

Aufgabe 2.31

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 4x + 2}{2x^2 + 1} =$$

Aufgabe 2.31

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 4x + 2}{2x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + 4/x + 2/x^2}{2 + 1/x^2} =$$

Aufgabe 2.31

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 4x + 2}{2x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + 4/x + 2/x^2}{2 + 1/x^2} = \frac{1}{2}$$

Aufgabe 2.32

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 2}{x^2}$$

Aufgabe 2.32

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 2}{x^2} =$$

Aufgabe 2.32

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + 2/x^2}{1} = \infty$$

Aufgabe 2.33

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x} + 1}{x + 1}$$

Aufgabe 2.33

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x} + 1}{x + 1} =$$

Aufgabe 2.33

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x} + 1}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1/\sqrt{x} + 1/x}{1 + 1/x} =$$

Aufgabe 2.33

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x} + 1}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1/\sqrt{x} + 1/x}{1 + 1/x} = 0$$

Aufgabe 2.34

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + x + x^2}{x^2}$$

Aufgabe 2.34

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + x + x^2}{x^2} =$$

Aufgabe 2.34

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + x + x^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1/x^2 + 1/x + 1}{1} =$$

Aufgabe 2.34

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + x + x^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1/x^2 + 1/x + 1}{1} = 1$$

Aufgabe 2.35

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 + x - x^2}{2x^2 + 3}$$

Aufgabe 2.35

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 + x - x^2}{2x^2 + 3} =$$

Aufgabe 2.35

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 + x - x^2}{2x^2 + 3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2/x^2 + 1/x - 1}{2 + 3/x^2} =$$

Aufgabe 2.35

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 + x - x^2}{2x^2 + 3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2/x^2 + 1/x - 1}{2 + 3/x^2} = \frac{0 + 0 - 1}{2 + 0} =$$

Aufgabe 2.35

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 + x - x^2}{2x^2 + 3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2/x^2 + 1/x - 1}{2 + 3/x^2} = \frac{0 + 0 - 1}{2 + 0} = -\frac{1}{2}$$

Aufgabe 2.36

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{2x}$$

Aufgabe 2.36

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{2x} =$$

Aufgabe 2.36

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}/x}{2} =$$

Aufgabe 2.36

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}/x}{2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1 + 1/x^2}}{2}$$

=

Aufgabe 2.36

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{2x} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}/x}{2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1 + 1/x^2}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{1 + 0}}{2} =\end{aligned}$$

Aufgabe 2.36

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{2x} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}/x}{2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1 + 1/x^2}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{1 + 0}}{2} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Aufgabe 2.37

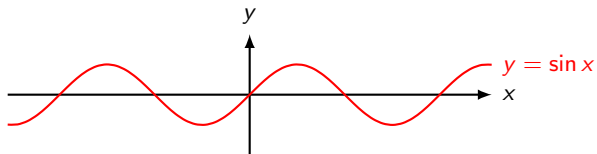
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sin x$$

Aufgabe 2.37

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sin x$ existiert nicht

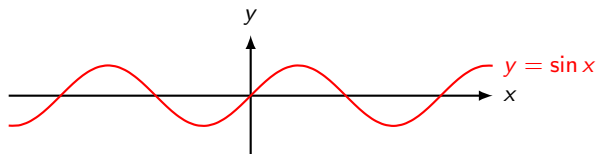
Aufgabe 2.37

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sin x$ existiert nicht



Aufgabe 2.37

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sin x$ existiert nicht



Die Werte der Sinusfunktion oszillieren auch „im Unendlichen“ ständig und haben daher keinen Grenzwert.

Aufgabe 2.38

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x}$$

Aufgabe 2.38

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} =$$

Aufgabe 2.38

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 0$$

Aufgabe 2.38

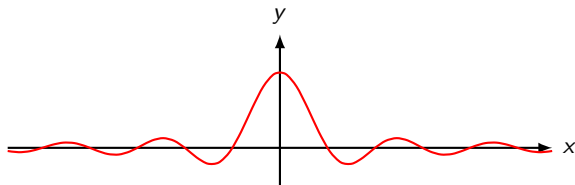
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 0$$

Da die Werte im Zähler zwischen -1 und $+1$ beschränkt sind, der Nenner aber immer grösser wird, strebt der Wert des Quotienten gegen Null.

Aufgabe 2.38

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 0$$

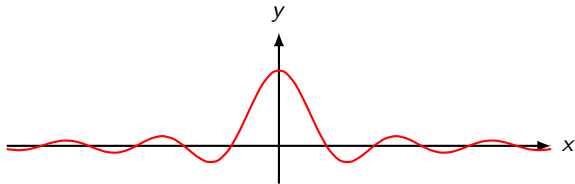
Da die Werte im Zähler zwischen -1 und $+1$ beschränkt sind, der Nenner aber immer grösser wird, strebt der Wert des Quotienten gegen Null.



Aufgabe 2.38

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 0$$

Da die Werte im Zähler zwischen -1 und $+1$ beschränkt sind, der Nenner aber immer grösser wird, strebt der Wert des Quotienten gegen Null.



Die Werte der Sinusfunktion oszillieren auch „im Unendlichen“ ständig und haben daher keinen Grenzwert.

Aufgabe 2.39

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{|x|}$$

Aufgabe 2.39

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{|x|} =$$

Aufgabe 2.39

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{|x|} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{-x} =$$

Aufgabe 2.39

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{|x|} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{-x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} -1 =$$

Aufgabe 2.39

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{|x|} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{-x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} -1 = -1$$

Aufgabe 2.39

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{|x|} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{-x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} -1 = -1$$

Das Auflösen des Betrags ist möglich, da die Werte der Folge $x \rightarrow -\infty$ ab einem bestimmten Folgenglied x_N immer negativ sein müssen.

Aufgabe 2.40

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^8}{2^x}$$

Aufgabe 2.40

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^8}{2^x} =$$

Aufgabe 2.40

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^8}{2^x} = 0$$

Hier muss man wissen, dass eine Exponentialfunktion (hier 2^x) mit zunehmendem x schneller wächst als jede Potenzfunktion (hier x^8).

Aufgabe 2.41

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^x}{x^5}$$

Aufgabe 2.41

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^x}{x^5} =$$

Aufgabe 2.41

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^x}{x^5} = \infty$$

Hier muss man wissen, dass eine Exponentialfunktion (hier 2^x) mit zunehmendem x schneller wächst als jede Potenzfunktion (hier x^5).

Aufgabe 2.42

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

Aufgabe 2.42

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x =$$

Aufgabe 2.42

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

Dieser Grenzwert sollte bekannt sein.

(PAM-Formelsammlung S. 52).

Aufgabe 2.43

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[x]{100}$$

Aufgabe 2.43

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[x]{100} =$$

Aufgabe 2.43

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[x]{100} = 1$$

Aufgabe 3.1

Werte die Funktion an der gegebenen Stelle aus und vereinfache den Wert so weit wie möglich.

(a) $f(x) = x^2 - 4x + 5; \quad x = 2 + h$

Aufgabe 3.1

Werte die Funktion an der gegebenen Stelle aus und vereinfache den Wert so weit wie möglich.

(a) $f(x) = x^2 - 4x + 5; \quad x = 2 + h$

(b) $f(x) = \frac{x+2}{x-3}; \quad x = 3 + h$

Aufgabe 3.1

Werte die Funktion an der gegebenen Stelle aus und vereinfache den Wert so weit wie möglich.

(a) $f(x) = x^2 - 4x + 5; \quad x = 2 + h$

(b) $f(x) = \frac{x+2}{x-3}; \quad x = 3 + h$

(c) $f(x) = (x-4)^3; \quad x = 6 + h$

Aufgabe 3.1

(a) $f(2 + h)$

Aufgabe 3.1

(a) $f(2+h) = (2+h)^2 - 4(2+h) + 5$

Aufgabe 3.1

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad f(2+h) &= (2+h)^2 - 4(2+h) + 5 \\ &= 4 + 4h + h^2 - 8 - 4h + 5 \end{aligned}$$

Aufgabe 3.1

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad f(2+h) &= (2+h)^2 - 4(2+h) + 5 \\ &= 4 + 4h + h^2 - 8 - 4h + 5 \\ &= h^2 + 1 \end{aligned}$$

Aufgabe 3.1

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad f(2+h) &= (2+h)^2 - 4(2+h) + 5 \\ &= 4 + 4h + h^2 - 8 - 4h + 5 \\ &= h^2 + 1 \end{aligned}$$

$$\text{(b)} \quad f(3+h)$$

Aufgabe 3.1

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad f(2+h) &= (2+h)^2 - 4(2+h) + 5 \\ &= 4 + 4h + h^2 - 8 - 4h + 5 \\ &= h^2 + 1 \end{aligned}$$

$$\text{(b)} \quad f(3+h) = \frac{(3+h)+2}{(3+h)-3}$$

Aufgabe 3.1

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad f(2+h) &= (2+h)^2 - 4(2+h) + 5 \\ &= 4 + 4h + h^2 - 8 - 4h + 5 \\ &= h^2 + 1 \end{aligned}$$

$$\text{(b)} \quad f(3+h) = \frac{(3+h)+2}{(3+h)-3} = \frac{h+5}{h}$$

Aufgabe 3.1

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad f(2+h) &= (2+h)^2 - 4(2+h) + 5 \\ &= 4 + 4h + h^2 - 8 - 4h + 5 \\ &= h^2 + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(b)} \quad f(3+h) &= \frac{(3+h)+2}{(3+h)-3} = \frac{h+5}{h} \\ &= 1 + 5/h \end{aligned}$$

Aufgabe 3.1

$$\begin{aligned}\text{(a)} \quad f(2+h) &= (2+h)^2 - 4(2+h) + 5 \\ &= 4 + 4h + h^2 - 8 - 4h + 5 \\ &= h^2 + 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{(b)} \quad f(3+h) &= \frac{(3+h)+2}{(3+h)-3} = \frac{h+5}{h} \\ &= 1 + 5/h\end{aligned}$$

$$\text{(c)} \quad f(6+h)$$

Aufgabe 3.1

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad f(2+h) &= (2+h)^2 - 4(2+h) + 5 \\ &= 4 + 4h + h^2 - 8 - 4h + 5 \\ &= h^2 + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(b)} \quad f(3+h) &= \frac{(3+h)+2}{(3+h)-3} = \frac{h+5}{h} \\ &= 1 + 5/h \end{aligned}$$

$$\text{(c)} \quad f(6+h) = (6+h-4)^3$$

Aufgabe 3.1

$$\begin{aligned}\text{(a)} \quad f(2+h) &= (2+h)^2 - 4(2+h) + 5 \\ &= 4 + 4h + h^2 - 8 - 4h + 5 \\ &= h^2 + 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{(b)} \quad f(3+h) &= \frac{(3+h)+2}{(3+h)-3} = \frac{h+5}{h} \\ &= 1 + 5/h\end{aligned}$$

$$\text{(c)} \quad f(6+h) = (6+h-4)^3 = (h+2)^3$$

Aufgabe 3.1

$$\begin{aligned}\text{(a)} \quad f(2+h) &= (2+h)^2 - 4(2+h) + 5 \\ &= 4 + 4h + h^2 - 8 - 4h + 5 \\ &= h^2 + 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{(b)} \quad f(3+h) &= \frac{(3+h)+2}{(3+h)-3} = \frac{h+5}{h} \\ &= 1 + 5/h\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{(c)} \quad f(6+h) &= (6+h-4)^3 = (h+2)^3 \\ &= h^3 + 3 \cdot 2^1 \cdot h^2 + 3 \cdot 2^2 \cdot h^1 + 2^3\end{aligned}$$

Aufgabe 3.1

$$\begin{aligned}\text{(a)} \quad f(2+h) &= (2+h)^2 - 4(2+h) + 5 \\ &= 4 + 4h + h^2 - 8 - 4h + 5 \\ &= h^2 + 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{(b)} \quad f(3+h) &= \frac{(3+h)+2}{(3+h)-3} = \frac{h+5}{h} \\ &= 1 + 5/h\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{(c)} \quad f(6+h) &= (6+h-4)^3 = (h+2)^3 \\ &= h^3 + 3 \cdot 2^1 \cdot h^2 + 3 \cdot 2^2 \cdot h^1 + 2^3 \\ &= h^3 + 6h^2 + 12h + 8\end{aligned}$$

Aufgabe 3.2

Bestimme die Ableitung von $f(x) = x^2$ an der Stelle $x_0 = -3$.

Aufgabe 3.2

$$f(x) = x^2; x_0 = -3$$

Aufgabe 3.2

$$f(x) = x^2; x_0 = -3$$

$$f'(-3) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-3 + h) - f(-3)}{h}$$

Aufgabe 3.2

$$f(x) = x^2; x_0 = -3$$

$$f'(-3) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-3 + h) - f(-3)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(-3 + h)^2 - 3^2}{h}$$

Aufgabe 3.2

$$f(x) = x^2; x_0 = -3$$

$$\begin{aligned} f'(-3) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-3+h) - f(-3)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(-3+h)^2 - 3^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(-3+h)^2 - 9}{h} \end{aligned}$$

Aufgabe 3.2

$$f(x) = x^2; x_0 = -3$$

$$\begin{aligned} f'(-3) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-3+h) - f(-3)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(-3+h)^2 - 3^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(-3+h)^2 - 9}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{9 - 6h + h^2 - 9}{h} \end{aligned}$$

Aufgabe 3.2

$$f(x) = x^2; x_0 = -3$$

$$\begin{aligned} f'(-3) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-3+h) - f(-3)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(-3+h)^2 - 3^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(-3+h)^2 - 9}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{9 - 6h + h^2 - 9}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-6h + h^2}{h} \end{aligned}$$

Aufgabe 3.2

$$f(x) = x^2; x_0 = -3$$

$$\begin{aligned} f'(-3) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-3+h) - f(-3)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(-3+h)^2 - 3^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(-3+h)^2 - 9}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{9 - 6h + h^2 - 9}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-6h + h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(-6 + h)}{h} \end{aligned}$$

Aufgabe 3.2

$$f(x) = x^2; x_0 = -3$$

$$\begin{aligned} f'(-3) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-3+h) - f(-3)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(-3+h)^2 - 3^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(-3+h)^2 - 9}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{9 - 6h + h^2 - 9}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-6h + h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(-6+h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (-6+h) \end{aligned}$$

Aufgabe 3.2

$$f(x) = x^2; x_0 = -3$$

$$\begin{aligned} f'(-3) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-3+h) - f(-3)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(-3+h)^2 - 3^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(-3+h)^2 - 9}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{9 - 6h + h^2 - 9}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-6h + h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(-6+h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (-6+h) = -6 \end{aligned}$$

Aufgabe 3.3

Bestimme die Ableitung von $f(x) = 3x - 4$ an der Stelle $x_0 = 2$.

Aufgabe 3.3

$$f(x) = 3x - 4; x_0 = 2$$

Aufgabe 3.3

$$f(x) = 3x - 4; x_0 = 2$$

$$f'(2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h}$$

Aufgabe 3.3

$$f(x) = 3x - 4; x_0 = 2$$

$$f'(2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3(2+h) - 4 - 2}{h}$$

Aufgabe 3.3

$$f(x) = 3x - 4; x_0 = 2$$

$$\begin{aligned} f'(2) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3(2+h) - 4 - 2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{6 + 3h - 6}{h} \end{aligned}$$

Aufgabe 3.3

$$f(x) = 3x - 4; x_0 = 2$$

$$\begin{aligned} f'(2) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3(2+h) - 4 - 2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{6 + 3h - 6}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3h}{h} \end{aligned}$$

Aufgabe 3.3

$$f(x) = 3x - 4; x_0 = 2$$

$$\begin{aligned} f'(2) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3(2+h) - 4 - 2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{6 + 3h - 6}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 3 \end{aligned}$$

Aufgabe 3.3

$$f(x) = 3x - 4; x_0 = 2$$

$$\begin{aligned} f'(2) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3(2+h) - 4 - 2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{6 + 3h - 6}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 3 = 3 \end{aligned}$$

Aufgabe 3.4

Bestimme die Ableitung von $f(x) = x^3$ an der Stelle $x_0 = 2$.

Aufgabe 3.4

$$f(x) = x^3; x_0 = 2$$

Aufgabe 3.4

$$f(x) = x^3; x_0 = 2$$

$$f'(2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h}$$

Aufgabe 3.4

$$f(x) = x^3; x_0 = 2$$

$$f'(2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2+h)^3 - 2^3}{h}$$

Aufgabe 3.4

$$f(x) = x^3; x_0 = 2$$

$$\begin{aligned} f'(2) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2+h)^3 - 2^3}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{8 + 3 \cdot 2^2 \cdot h + 3 \cdot 2 \cdot h^2 + h^3 - 8}{h} \end{aligned}$$

Aufgabe 3.4

$$f(x) = x^3; x_0 = 2$$

$$\begin{aligned} f'(2) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2+h)^3 - 2^3}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{8 + 3 \cdot 2^2 \cdot h + 3 \cdot 2 \cdot h^2 + h^3 - 8}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(12 + 6h + h^2)}{h} \end{aligned}$$

Aufgabe 3.4

$$f(x) = x^3; x_0 = 2$$

$$\begin{aligned} f'(2) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2+h)^3 - 2^3}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{8 + 3 \cdot 2^2 \cdot h + 3 \cdot 2 \cdot h^2 + h^3 - 8}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(12 + 6h + h^2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (12 + 6h + h^2) \end{aligned}$$

Aufgabe 3.4

$$f(x) = x^3; x_0 = 2$$

$$\begin{aligned} f'(2) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2+h)^3 - 2^3}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{8 + 3 \cdot 2^2 \cdot h + 3 \cdot 2 \cdot h^2 + h^3 - 8}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(12 + 6h + h^2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (12 + 6h + h^2) = 12 \end{aligned}$$

Aufgabe 3.5

Bestimme die Ableitung von $f(x) = \frac{1}{x}$ an der Stelle $x_0 = 4$.

Aufgabe 3.5

$$f(x) = \frac{1}{x}; x_0 = 4$$

Aufgabe 3.5

$$f(x) = \frac{1}{x}; x_0 = 4$$

$$f'(4) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(4+h) - f(4)}{h}$$

Aufgabe 3.5

$$f(x) = \frac{1}{x}; x_0 = 4$$

$$f'(4) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(4+h) - f(4)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[\frac{1}{4+h} - \frac{1}{4} \right]$$

Aufgabe 3.5

$$f(x) = \frac{1}{x}; x_0 = 4$$

$$f'(4) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(4+h) - f(4)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[\frac{1}{4+h} - \frac{1}{4} \right]$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[\frac{4}{4(4+h)} - \frac{(4+h)}{4(4+h)} \right]$$

Aufgabe 3.5

$$f(x) = \frac{1}{x}; x_0 = 4$$

$$f'(4) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(4+h) - f(4)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[\frac{1}{4+h} - \frac{1}{4} \right]$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[\frac{4}{4(4+h)} - \frac{(4+h)}{4(4+h)} \right] = \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{1}{h} \cdot \frac{4 - (4+h)}{4(4+h)} \right]$$

Aufgabe 3.5

$$f(x) = \frac{1}{x}; x_0 = 4$$

$$f'(4) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(4+h) - f(4)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[\frac{1}{4+h} - \frac{1}{4} \right]$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[\frac{4}{4(4+h)} - \frac{(4+h)}{4(4+h)} \right] = \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{1}{h} \cdot \frac{4 - (4+h)}{4(4+h)} \right]$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{1}{h} \cdot \frac{-h}{4(4+h)} \right]$$

Aufgabe 3.5

$$f(x) = \frac{1}{x}; x_0 = 4$$

$$f'(4) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(4+h) - f(4)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[\frac{1}{4+h} - \frac{1}{4} \right]$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[\frac{4}{4(4+h)} - \frac{(4+h)}{4(4+h)} \right] = \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{1}{h} \cdot \frac{4 - (4+h)}{4(4+h)} \right]$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{1}{h} \cdot \frac{-h}{4(4+h)} \right] = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1}{4(4+h)}$$

Aufgabe 3.5

$$f(x) = \frac{1}{x}; x_0 = 4$$

$$f'(4) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(4+h) - f(4)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[\frac{1}{4+h} - \frac{1}{4} \right]$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[\frac{4}{4(4+h)} - \frac{(4+h)}{4(4+h)} \right] = \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{1}{h} \cdot \frac{4 - (4+h)}{4(4+h)} \right]$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{1}{h} \cdot \frac{-h}{4(4+h)} \right] = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1}{4(4+h)} = -\frac{1}{16}$$

Aufgabe 3.6

Bestimme die Ableitung von $f(x) = \frac{1}{x+1}$ an der Stelle $x_0 = 1$.

Aufgabe 3.6

$$f(x) = \frac{1}{x+1}; x_0 = 1$$

Aufgabe 3.6

$$f(x) = \frac{1}{x+1}; x_0 = 1$$

$$f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$$

Aufgabe 3.6

$$f(x) = \frac{1}{x+1}; x_0 = 1$$

$$f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[\frac{1}{(1+h)+1} - \frac{1}{1+1} \right]$$

Aufgabe 3.6

$$f(x) = \frac{1}{x+1}; x_0 = 1$$

$$\begin{aligned} f'(1) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[\frac{1}{(1+h)+1} - \frac{1}{1+1} \right] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[\frac{1}{2+h} - \frac{1}{2} \right] \end{aligned}$$

Aufgabe 3.6

$$f(x) = \frac{1}{x+1}; x_0 = 1$$

$$\begin{aligned} f'(1) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[\frac{1}{(1+h)+1} - \frac{1}{1+1} \right] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[\frac{1}{2+h} - \frac{1}{2} \right] = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[\frac{2 - (2+h)}{2(2+h)} \right] \end{aligned}$$

Aufgabe 3.6

$$f(x) = \frac{1}{x+1}; x_0 = 1$$

$$f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[\frac{1}{(1+h)+1} - \frac{1}{1+1} \right]$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[\frac{1}{2+h} - \frac{1}{2} \right] = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[\frac{2 - (2+h)}{2(2+h)} \right]$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[\frac{-h}{2(2+h)} \right]$$

Aufgabe 3.6

$$f(x) = \frac{1}{x+1}; x_0 = 1$$

$$f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[\frac{1}{(1+h)+1} - \frac{1}{1+1} \right]$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[\frac{1}{2+h} - \frac{1}{2} \right] = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[\frac{2 - (2+h)}{2(2+h)} \right]$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[\frac{-h}{2(2+h)} \right] = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1}{2(2+h)}$$

Aufgabe 3.6

$$f(x) = \frac{1}{x+1}; x_0 = 1$$

$$f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[\frac{1}{(1+h)+1} - \frac{1}{1+1} \right]$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[\frac{1}{2+h} - \frac{1}{2} \right] = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[\frac{2 - (2+h)}{2(2+h)} \right]$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[\frac{-h}{2(2+h)} \right] = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1}{2(2+h)} = -\frac{1}{4}$$

Aufgabe 3.7

Bestimme die Ableitung von $f(x) = \frac{1}{x^2}$ an der Stelle $x_0 = 2$.

Aufgabe 3.7

$$f(x) = \frac{1}{x^2}; x_0 = 2$$

Aufgabe 3.7

$$f(x) = \frac{1}{x^2}; x_0 = 2$$

$$f'(2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h}$$

Aufgabe 3.7

$$f(x) = \frac{1}{x^2}; x_0 = 2$$

$$f'(2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[\frac{1}{(2+h)^2} - \frac{1}{4} \right]$$

Aufgabe 3.7

$$f(x) = \frac{1}{x^2}; x_0 = 2$$

$$\begin{aligned} f'(2) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[\frac{1}{(2+h)^2} - \frac{1}{4} \right] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[\frac{4 - (2+h)^2}{4(2+h)^2} \right] \end{aligned}$$

Aufgabe 3.7

$$f(x) = \frac{1}{x^2}; x_0 = 2$$

$$\begin{aligned} f'(2) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[\frac{1}{(2+h)^2} - \frac{1}{4} \right] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[\frac{4 - (2+h)^2}{4(2+h)^2} \right] = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[\frac{4 - (4 + 4h + h^2)}{4(2+h)^2} \right] \end{aligned}$$

Aufgabe 3.7

$$f(x) = \frac{1}{x^2}; x_0 = 2$$

$$\begin{aligned} f'(2) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[\frac{1}{(2+h)^2} - \frac{1}{4} \right] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[\frac{4 - (2+h)^2}{4(2+h)^2} \right] = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[\frac{4 - (4 + 4h + h^2)}{4(2+h)^2} \right] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[\frac{-4h - h^2}{4(2+h)^2} \right] \end{aligned}$$

Aufgabe 3.7

$$f(x) = \frac{1}{x^2}; x_0 = 2$$

$$\begin{aligned} f'(2) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[\frac{1}{(2+h)^2} - \frac{1}{4} \right] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[\frac{4 - (2+h)^2}{4(2+h)^2} \right] = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[\frac{4 - (4 + 4h + h^2)}{4(2+h)^2} \right] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[\frac{-4h - h^2}{4(2+h)^2} \right] = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-4 - h}{4(2+h)^2} \end{aligned}$$

Aufgabe 3.7

$$f(x) = \frac{1}{x^2}; x_0 = 2$$

$$\begin{aligned} f'(2) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[\frac{1}{(2+h)^2} - \frac{1}{4} \right] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[\frac{4 - (2+h)^2}{4(2+h)^2} \right] = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[\frac{4 - (4 + 4h + h^2)}{4(2+h)^2} \right] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[\frac{-4h - h^2}{4(2+h)^2} \right] = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-4 - h}{4(2+h)^2} = -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

Aufgabe 3.8

Bestimme die Ableitung von $f(x) = \sqrt{x}$ an der Stelle $x_0 = 4$.

Aufgabe 3.8

$$f(x) = \sqrt{x}; x_0 = 4$$

Aufgabe 3.8

$$f(x) = \sqrt{x}; x_0 = 4$$

$$f'(4) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(4+h) - f(4)}{h}$$

Aufgabe 3.8

$$f(x) = \sqrt{x}; x_0 = 4$$

$$f'(4) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(4+h) - f(4)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4+h} - \sqrt{4}}{h}$$

Aufgabe 3.8

$$f(x) = \sqrt{x}; x_0 = 4$$

$$\begin{aligned} f'(4) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(4+h) - f(4)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4+h} - \sqrt{4}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{4+h} - \sqrt{4})(\sqrt{4+h} + \sqrt{4})}{h(\sqrt{4+h} + \sqrt{4})} \end{aligned}$$

Aufgabe 3.8

$$f(x) = \sqrt{x}; x_0 = 4$$

$$f'(4) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(4+h) - f(4)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4+h} - \sqrt{4}}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{4+h} - \sqrt{4})(\sqrt{4+h} + \sqrt{4})}{h(\sqrt{4+h} + \sqrt{4})}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(4+h) - 4}{h(\sqrt{4+h} + \sqrt{4})}$$

Aufgabe 3.8

$$f(x) = \sqrt{x}; x_0 = 4$$

$$f'(4) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(4+h) - f(4)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4+h} - \sqrt{4}}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{4+h} - \sqrt{4})(\sqrt{4+h} + \sqrt{4})}{h(\sqrt{4+h} + \sqrt{4})}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(4+h) - 4}{h(\sqrt{4+h} + \sqrt{4})}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h(\sqrt{4+h} + \sqrt{4})}$$

Aufgabe 3.8

$$f(x) = \sqrt{x}; x_0 = 4$$

$$\begin{aligned} f'(4) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(4+h) - f(4)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4+h} - \sqrt{4}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{4+h} - \sqrt{4})(\sqrt{4+h} + \sqrt{4})}{h(\sqrt{4+h} + \sqrt{4})} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(4+h) - 4}{h(\sqrt{4+h} + \sqrt{4})} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h(\sqrt{4+h} + \sqrt{4})} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{4+h} + \sqrt{4}} \end{aligned}$$

Aufgabe 3.8

$$f(x) = \sqrt{x}; x_0 = 4$$

$$f'(4) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(4+h) - f(4)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4+h} - \sqrt{4}}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{4+h} - \sqrt{4})(\sqrt{4+h} + \sqrt{4})}{h(\sqrt{4+h} + \sqrt{4})}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(4+h) - 4}{h(\sqrt{4+h} + \sqrt{4})}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h(\sqrt{4+h} + \sqrt{4})} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{4+h} + \sqrt{4}} = \frac{1}{4}$$

Aufgabe 3.9

Bestimme die Ableitung von $f(x) = \sqrt{2x}$ an der Stelle $x_0 = 3$.

Aufgabe 3.9

$$f(x) = \sqrt{2x}; x_0 = 3$$

Aufgabe 3.9

$$f(x) = \sqrt{2x}; x_0 = 3$$

$$f'(3) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h}$$

Aufgabe 3.9

$$f(x) = \sqrt{2x}; x_0 = 3$$

$$f'(3) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2(3+h)} - \sqrt{2 \cdot 3}}{h}$$

Aufgabe 3.9

$$f(x) = \sqrt{2x}; x_0 = 3$$

$$\begin{aligned} f'(3) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2(3+h)} - \sqrt{2 \cdot 3}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2h+6} - \sqrt{6}}{h} \end{aligned}$$

Aufgabe 3.9

$$f(x) = \sqrt{2x}; x_0 = 3$$

$$f'(3) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2(3+h)} - \sqrt{2 \cdot 3}}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2h+6} - \sqrt{6}}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} (\sqrt{2h+6} - \sqrt{6})$$

Aufgabe 3.9

$$f(x) = \sqrt{2x}; x_0 = 3$$

$$f'(3) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2(3+h)} - \sqrt{2 \cdot 3}}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2h+6} - \sqrt{6}}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{2h+6} - \sqrt{6})(\sqrt{2h+6} + \sqrt{6})}{h(\sqrt{2h+6} + \sqrt{6})}$$

Aufgabe 3.9

$$f(x) = \sqrt{2x}; x_0 = 3$$

$$f'(3) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2(3+h)} - \sqrt{2 \cdot 3}}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2h+6} - \sqrt{6}}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{2h+6} - \sqrt{6})(\sqrt{2h+6} + \sqrt{6})}{h(\sqrt{2h+6} + \sqrt{6})}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2h+6) - 6}{h(\sqrt{2h+6} + \sqrt{6})}$$

Aufgabe 3.9

$$f(x) = \sqrt{2x}; x_0 = 3$$

$$f'(3) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2(3+h)} - \sqrt{2 \cdot 3}}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2h+6} - \sqrt{6}}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{2h+6} - \sqrt{6})(\sqrt{2h+6} + \sqrt{6})}{h(\sqrt{2h+6} + \sqrt{6})}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2h+6) - 6}{h(\sqrt{2h+6} + \sqrt{6})} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2h}{h(\sqrt{2h+6} + \sqrt{6})}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2}{\sqrt{2h+6} + \sqrt{6}}$$

Aufgabe 3.9

$$f(x) = \sqrt{2x}; x_0 = 3$$

$$f'(3) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2(3+h)} - \sqrt{2 \cdot 3}}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2h+6} - \sqrt{6}}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{2h+6} - \sqrt{6})(\sqrt{2h+6} + \sqrt{6})}{h(\sqrt{2h+6} + \sqrt{6})}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2h+6) - 6}{h(\sqrt{2h+6} + \sqrt{6})} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2h}{h(\sqrt{2h+6} + \sqrt{6})}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2}{\sqrt{2h+6} + \sqrt{6}} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2}{2\sqrt{6}}$$

Aufgabe 3.9

$$f(x) = \sqrt{2x}; x_0 = 3$$

$$f'(3) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2(3+h)} - \sqrt{2 \cdot 3}}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2h+6} - \sqrt{6}}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{2h+6} - \sqrt{6})(\sqrt{2h+6} + \sqrt{6})}{h(\sqrt{2h+6} + \sqrt{6})}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2h+6) - 6}{h(\sqrt{2h+6} + \sqrt{6})} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2h}{h(\sqrt{2h+6} + \sqrt{6})}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2}{\sqrt{2h+6} + \sqrt{6}} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2}{2\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

Aufgabe 3.10

Bestimme die Ableitung von $f(x) = \sqrt{x+3}$ an der Stelle $x_0 = -2$.

Aufgabe 3.10

$$f(x) = \sqrt{x+3}; x_0 = -2$$

Aufgabe 3.10

$$f(x) = \sqrt{x+3}; x_0 = -2$$

$$f'(-2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h}$$

Aufgabe 3.10

$$f(x) = \sqrt{x+3}; x_0 = -2$$

$$\begin{aligned} f'(-2) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{-2+h+3} - \sqrt{-2+3}}{h} \end{aligned}$$

Aufgabe 3.10

$$f(x) = \sqrt{x+3}; x_0 = -2$$

$$\begin{aligned} f'(-2) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{-2+h+3} - \sqrt{-2+3}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{h+1} - 1}{h} \end{aligned}$$

Aufgabe 3.10

$$f(x) = \sqrt{x+3}; x_0 = -2$$

$$f'(-2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{-2+h+3} - \sqrt{-2+3}}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{h+1} - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{h+1} - 1)(\sqrt{h+1} + 1)}{h(\sqrt{h+1} + 1)}$$

Aufgabe 3.10

$$f(x) = \sqrt{x+3}; x_0 = -2$$

$$f'(-2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{-2+h+3} - \sqrt{-2+3}}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{h+1} - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{h+1} - 1)(\sqrt{h+1} + 1)}{h(\sqrt{h+1} + 1)}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(h+1) - 1}{h(\sqrt{h+1} + 1)}$$

Aufgabe 3.10

$$f(x) = \sqrt{x+3}; x_0 = -2$$

$$f'(-2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{-2+h+3} - \sqrt{-2+3}}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{h+1} - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{h+1} - 1)(\sqrt{h+1} + 1)}{h(\sqrt{h+1} + 1)}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(h+1) - 1}{h(\sqrt{h+1} + 1)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h(\sqrt{h+1} + 1)}$$

Aufgabe 3.10

$$f(x) = \sqrt{x+3}; x_0 = -2$$

$$f'(-2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{-2+h+3} - \sqrt{-2+3}}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{h+1} - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{h+1} - 1)(\sqrt{h+1} + 1)}{h(\sqrt{h+1} + 1)}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(h+1) - 1}{h(\sqrt{h+1} + 1)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h(\sqrt{h+1} + 1)}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{h+1} + 1}$$

Aufgabe 3.10

$$f(x) = \sqrt{x+3}; x_0 = -2$$

$$f'(-2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{-2+h+3} - \sqrt{-2+3}}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{h+1} - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{h+1} - 1)(\sqrt{h+1} + 1)}{h(\sqrt{h+1} + 1)}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(h+1) - 1}{h(\sqrt{h+1} + 1)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h(\sqrt{h+1} + 1)}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{h+1} + 1} = \frac{1}{2}$$

Aufgabe 3.11

Bestimme die Gleichung der Tangente an den Graphen der Funktion $f(x) = x^2 + 1$ an der Stelle $x_0 = -2$.

Aufgabe 3.11

$$f(x) = x^2 + 1; x_0 = -2$$

Aufgabe 3.11

$$f(x) = x^2 + 1; x_0 = -2$$

$$f'(-2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-2 + h) - f(-2)}{h}$$

Aufgabe 3.11

$$f(x) = x^2 + 1; x_0 = -2$$

$$f'(-2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-2 + h) - f(-2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(-2 + h)^2 + 1 - (4 + 1)}{h}$$

Aufgabe 3.11

$$f(x) = x^2 + 1; x_0 = -2$$

$$\begin{aligned} f'(-2) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(-2+h)^2 + 1 - (4+1)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4 - 4h + h^2 - 4}{h} \end{aligned}$$

Aufgabe 3.11

$$f(x) = x^2 + 1; x_0 = -2$$

$$\begin{aligned} f'(-2) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(-2+h)^2 + 1 - (4+1)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4 - 4h + h^2 - 4}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(h-4)}{h} \end{aligned}$$

Aufgabe 3.11

$$f(x) = x^2 + 1; x_0 = -2$$

$$\begin{aligned} f'(-2) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(-2+h)^2 + 1 - (4+1)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4 - 4h + h^2 - 4}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(h-4)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (h-4) \end{aligned}$$

Aufgabe 3.11

$$f(x) = x^2 + 1; x_0 = -2$$

$$\begin{aligned} f'(-2) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(-2+h)^2 + 1 - (4+1)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4 - 4h + h^2 - 4}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(h-4)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (h-4) = -4 \end{aligned}$$

Aufgabe 3.11

$$f(x) = x^2 + 1; x_0 = -2$$

$$\begin{aligned} f'(-2) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(-2+h)^2 + 1 - (4+1)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4 - 4h + h^2 - 4}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(h-4)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (h-4) = -4 \end{aligned}$$

$$y = m_t x + q$$

$$d5 = -4 \cdot (-2) + q$$

$$q = -3 \quad \Rightarrow \quad t: y = -4x - 3$$

Aufgabe 3.12

Bestimme die Gleichung der Normalen des Graphen der Funktion $f(x) = \sqrt{x-3}$ an der Stelle $x = 4$.

Aufgabe 3.12

$$f(x) = \sqrt{x-3}; x = 4$$

Aufgabe 3.12

$$f(x) = \sqrt{x - 3}; x = 4$$

$$f'(4) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(4 + h) - f(4)}{h}$$

Aufgabe 3.12

$$f(x) = \sqrt{x-3}; x = 4$$

$$f'(4) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(4+h) - f(4)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4+h-3} - 1}{h}$$

Aufgabe 3.12

$$f(x) = \sqrt{x-3}; x = 4$$

$$\begin{aligned} f'(4) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(4+h) - f(4)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4+h-3} - 1}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+h} - 1}{h} \end{aligned}$$

Aufgabe 3.12

$$f(x) = \sqrt{x-3}; x = 4$$

$$f'(4) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(4+h) - f(4)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4+h-3} - 1}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+h} - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+h} - 1)(\sqrt{1+h} + 1)}{h(\sqrt{1+h} + 1)}$$

Aufgabe 3.12

$$f(x) = \sqrt{x-3}; x = 4$$

$$\begin{aligned} f'(4) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(4+h) - f(4)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4+h-3} - 1}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+h} - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+h} - 1)(\sqrt{1+h} + 1)}{h(\sqrt{1+h} + 1)} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1+h-1}{h(\sqrt{1+h} + 1)} \end{aligned}$$

Aufgabe 3.12

$$f(x) = \sqrt{x-3}; x = 4$$

$$\begin{aligned} f'(4) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(4+h) - f(4)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4+h-3} - 1}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+h} - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+h} - 1)(\sqrt{1+h} + 1)}{h(\sqrt{1+h} + 1)} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1+h-1}{h(\sqrt{1+h} + 1)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h(\sqrt{h+1} + 1)} \end{aligned}$$

Aufgabe 3.12

$$f(x) = \sqrt{x-3}; x = 4$$

$$\begin{aligned} f'(4) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(4+h) - f(4)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4+h-3} - 1}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+h} - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+h} - 1)(\sqrt{1+h} + 1)}{h(\sqrt{1+h} + 1)} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1+h-1}{h(\sqrt{1+h} + 1)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h(\sqrt{h+1} + 1)} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{h+1} + 1} \end{aligned}$$

Aufgabe 3.12

$$f(x) = \sqrt{x-3}; x = 4$$

$$\begin{aligned} f'(4) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(4+h) - f(4)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4+h-3} - 1}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+h} - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+h} - 1)(\sqrt{1+h} + 1)}{h(\sqrt{1+h} + 1)} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1+h-1}{h(\sqrt{1+h} + 1)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h(\sqrt{h+1} + 1)} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{h+1} + 1} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Aufgabe 3.12

$$f(x) = \sqrt{x-3}; x = 4$$

$$\begin{aligned} f'(4) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(4+h) - f(4)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4+h-3} - 1}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+h} - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+h} - 1)(\sqrt{1+h} + 1)}{h(\sqrt{1+h} + 1)} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1+h-1}{h(\sqrt{1+h} + 1)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h(\sqrt{h+1} + 1)} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{h+1} + 1} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$y = m_n x + q$$

$$1 = -2 \cdot 4 + q$$

$$q = 9 \quad \Rightarrow$$

Aufgabe 3.12

$$f(x) = \sqrt{x-3}; x = 4$$

$$\begin{aligned} f'(4) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(4+h) - f(4)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4+h-3} - 1}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+h} - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+h} - 1)(\sqrt{1+h} + 1)}{h(\sqrt{1+h} + 1)} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1+h-1}{h(\sqrt{1+h} + 1)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h(\sqrt{h+1} + 1)} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{h+1} + 1} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$y = m_n x + q$$

$$1 = -2 \cdot 4 + q$$

$$q = 9 \quad \Rightarrow \quad n: y = -2x + 9$$

Aufgabe 3.13

Bestimme die Gleichung der Tangente an den Graphen der Funktion $f(x) = \frac{1}{2x-1}$ an der Stelle $x = 1$.

Aufgabe 3.13

$$f(x) = \frac{1}{2x-1}; x = 1$$

Aufgabe 3.13

$$f(x) = \frac{1}{2x-1}; x = 1$$

$$f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[\frac{1}{2(1+h)-1} - 1 \right]$$

Aufgabe 3.13

$$f(x) = \frac{1}{2x-1}; x = 1$$

$$\begin{aligned} f'(1) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[\frac{1}{2(1+h)-1} - 1 \right] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[\frac{1}{1+2h} - 1 \right] = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[\frac{1 - (1+2h)}{1+2h} \right] \end{aligned}$$

Aufgabe 3.13

$$f(x) = \frac{1}{2x-1}; x = 1$$

$$f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[\frac{1}{2(1+h)-1} - 1 \right]$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[\frac{1}{1+2h} - 1 \right] = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[\frac{1 - (1+2h)}{1+2h} \right]$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[\frac{-2h}{1+2h} \right] = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2}{1+2h} = -2$$

Aufgabe 3.13

$$f(x) = \frac{1}{2x-1}; x = 1$$

$$f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[\frac{1}{2(1+h)-1} - 1 \right]$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[\frac{1}{1+2h} - 1 \right] = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[\frac{1 - (1+2h)}{1+2h} \right]$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[\frac{-2h}{1+2h} \right] = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2}{1+2h} = -2$$

$$y = m_t x + q$$

$$1 = -2 \cdot 1 + q$$

$$q = 3 \quad \Rightarrow \quad t: y = -2x + 3$$

Aufgabe 3.14

Bestimme die Gleichung der Normalen des Graphen von $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x$ an der Stelle $x_0 = 1$.

Aufgabe 3.14

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x; x_0 = 1$$

Aufgabe 3.14

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x; x_0 = 1$$

$$f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}(1+h)^2 - (1+h) + \frac{1}{2}}{h}$$

Aufgabe 3.14

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x; \quad x_0 = 1$$

$$\begin{aligned} f'(1) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}(1+h)^2 - (1+h) + \frac{1}{2}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2} + h + \frac{1}{2}h^2 - 1 - h + \frac{1}{2}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}h^2}{h} \end{aligned}$$

Aufgabe 3.14

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x; \quad x_0 = 1$$

$$f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}(1+h)^2 - (1+h) + \frac{1}{2}}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2} + h + \frac{1}{2}h^2 - 1 - h + \frac{1}{2}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}h^2}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{2}h = 0$$

Aufgabe 3.14

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x; \quad x_0 = 1$$

$$\begin{aligned} f'(1) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}(1+h)^2 - (1+h) + \frac{1}{2}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2} + h + \frac{1}{2}h^2 - 1 - h + \frac{1}{2}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}h^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{2}h = 0 \end{aligned}$$

Da die Tangente parallel zur x -Achse ist (Steigung: 0), muss die Normale senkrecht zur x -Achse verlaufen. Da $P(1, 0.5) \in G_f$, gilt:
 $n: x = 1$.

Aufgabe 3.15

Bestimme die Gleichung der Tangente an den Graphen der Funktion $f(x) = \frac{x-1}{x}$ an der Stelle $x = 2$.

Aufgabe 3.15

$$f(x) = \frac{x-1}{x} = 1 - \frac{1}{x}; x_0 = 2$$

Aufgabe 3.15

$$f(x) = \frac{x-1}{x} = 1 - \frac{1}{x}; x_0 = 2$$

$$f'(2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [f(2+h) - f(2)] = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[1 - \frac{1}{2+h} - \frac{1}{2} \right]$$

Aufgabe 3.15

$$f(x) = \frac{x-1}{x} = 1 - \frac{1}{x}; x_0 = 2$$

$$f'(2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [f(2+h) - f(2)] = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[1 - \frac{1}{2+h} - \frac{1}{2} \right]$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2+h} \right] = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[\frac{2+h-2}{2(2+h)} \right]$$

Aufgabe 3.15

$$f(x) = \frac{x-1}{x} = 1 - \frac{1}{x}; x_0 = 2$$

$$f'(2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [f(2+h) - f(2)] = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[1 - \frac{1}{2+h} - \frac{1}{2} \right]$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2+h} \right] = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[\frac{2+h-2}{2(2+h)} \right]$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{2(2+h)} = \frac{1}{4}$$

Aufgabe 3.15

$$f(x) = \frac{x-1}{x} = 1 - \frac{1}{x}; x_0 = 2$$

$$f'(2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [f(2+h) - f(2)] = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[1 - \frac{1}{2+h} - \frac{1}{2} \right]$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2+h} \right] = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[\frac{2+h-2}{2(2+h)} \right]$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{2(2+h)} = \frac{1}{4}$$

$$y = m_t x + q$$

Aufgabe 3.15

$$f(x) = \frac{x-1}{x} = 1 - \frac{1}{x}; x_0 = 2$$

$$f'(2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [f(2+h) - f(2)] = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[1 - \frac{1}{2+h} - \frac{1}{2} \right]$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2+h} \right] = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[\frac{2+h-2}{2(2+h)} \right]$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{2(2+h)} = \frac{1}{4}$$

$$y = m_t x + q$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{4} \cdot 2 + q$$

Aufgabe 3.15

$$f(x) = \frac{x-1}{x} = 1 - \frac{1}{x}; x_0 = 2$$

$$f'(2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [f(2+h) - f(2)] = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[1 - \frac{1}{2+h} - \frac{1}{2} \right]$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2+h} \right] = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[\frac{2+h-2}{2(2+h)} \right]$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{2(2+h)} = \frac{1}{4}$$

$$y = m_t x + q$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{4} \cdot 2 + q$$

$$q = 0 \quad \Rightarrow \quad t: y = \frac{1}{4}x$$

Aufgabe 3.16

Bestimme die Gleichung der Tangente an den Graphen der Funktion $f(x) = \sin x$ an der Stelle $x = \pi/4$.

Aufgabe 3.16

$$f(x) = \sin(x); x = \frac{\pi}{4}$$

Aufgabe 3.16

$$f(x) = \sin(x); x = \frac{\pi}{4}$$

[trigonometrische Funktionen + Grenzwerte: Bogenmass]

Aufgabe 3.16

$$f(x) = \sin(x); x = \frac{\pi}{4}$$

[trigonometrische Funktionen + Grenzwerte: Bogenmass]

$$f' \left(\frac{\pi}{4} \right) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f \left(\frac{\pi}{4} + h \right) - f \left(\frac{\pi}{4} \right)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin \left(\frac{\pi}{4} + h \right) - \sin \frac{\pi}{4}}{h}$$

Aufgabe 3.16

$$f(x) = \sin(x); x = \frac{\pi}{4}$$

[trigonometrische Funktionen + Grenzwerte: Bogenmass]

$$\begin{aligned} f' \left(\frac{\pi}{4} \right) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f \left(\frac{\pi}{4} + h \right) - f \left(\frac{\pi}{4} \right)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin \left(\frac{\pi}{4} + h \right) - \sin \frac{\pi}{4}}{h} \\ &\stackrel{\text{s. 99}}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\pi}{4} \cos h + \cos \frac{\pi}{4} \sin h - \sin \frac{\pi}{4}}{h} \end{aligned}$$

Aufgabe 3.16

$$f(x) = \sin(x); x = \frac{\pi}{4}$$

[trigonometrische Funktionen + Grenzwerte: Bogenmass]

$$\begin{aligned} f' \left(\frac{\pi}{4} \right) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f \left(\frac{\pi}{4} + h \right) - f \left(\frac{\pi}{4} \right)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin \left(\frac{\pi}{4} + h \right) - \sin \frac{\pi}{4}}{h} \\ &\stackrel{\text{s. 99}}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\pi}{4} \cos h + \cos \frac{\pi}{4} \sin h - \sin \frac{\pi}{4}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\pi}{4} (\cos h - 1) + \cos \frac{\pi}{4} \sin h}{h} \end{aligned}$$

Aufgabe 3.16

$$f(x) = \sin(x); x = \frac{\pi}{4}$$

[trigonometrische Funktionen + Grenzwerte: Bogenmass]

$$\begin{aligned} f' \left(\frac{\pi}{4} \right) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f \left(\frac{\pi}{4} + h \right) - f \left(\frac{\pi}{4} \right)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin \left(\frac{\pi}{4} + h \right) - \sin \frac{\pi}{4}}{h} \\ &\stackrel{\text{s. 99}}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\pi}{4} \cos h + \cos \frac{\pi}{4} \sin h - \sin \frac{\pi}{4}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\pi}{4} (\cos h - 1) + \cos \frac{\pi}{4} \sin h}{h} \\ &= \sin \frac{\pi}{4} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h} + \cos \frac{\pi}{4} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} \end{aligned}$$

Aufgabe 3.16

$$f(x) = \sin(x); x = \frac{\pi}{4}$$

[trigonometrische Funktionen + Grenzwerte: Bogenmass]

$$f' \left(\frac{\pi}{4} \right) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f \left(\frac{\pi}{4} + h \right) - f \left(\frac{\pi}{4} \right)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin \left(\frac{\pi}{4} + h \right) - \sin \frac{\pi}{4}}{h}$$

$$\stackrel{\text{s. 99}}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\pi}{4} \cos h + \cos \frac{\pi}{4} \sin h - \sin \frac{\pi}{4}}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\pi}{4} (\cos h - 1) + \cos \frac{\pi}{4} \sin h}{h}$$

$$= \sin \frac{\pi}{4} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h} + \cos \frac{\pi}{4} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h}$$

$$\stackrel{*}{=} \sin \frac{\pi}{4} \cdot 0 + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$*: \frac{\cos h - 1}{h} = \frac{\cos h - \cos 0}{h} \stackrel{\text{S. 99}}{=} -\frac{2}{h} \sin \frac{h+0}{2} \sin \frac{h-0}{2}$$

$$\begin{aligned}
 *: \frac{\cos h - 1}{h} &= \frac{\cos h - \cos 0}{h} \stackrel{\text{S. 99}}{=} -\frac{2}{h} \sin \frac{h+0}{2} \sin \frac{h-0}{2} \\
 &= -\frac{2}{h} \left(\sin \frac{h}{2} \right)^2 \quad \text{substituiere } h' = \frac{h}{2} \Leftrightarrow h = 2h'
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 *: \frac{\cos h - 1}{h} &= \frac{\cos h - \cos 0}{h} \stackrel{\text{S. 99}}{=} -\frac{2}{h} \sin \frac{h+0}{2} \sin \frac{h-0}{2} \\
 &= -\frac{2}{h} \left(\sin \frac{h}{2} \right)^2 \quad \text{substituiere } h' = \frac{h}{2} \Leftrightarrow h = 2h' \\
 &= -\frac{2}{2h'} \cdot (\sin h')^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 *: \frac{\cos h - 1}{h} &= \frac{\cos h - \cos 0}{h} \stackrel{\text{S. 99}}{=} -\frac{2}{h} \sin \frac{h+0}{2} \sin \frac{h-0}{2} \\
 &= -\frac{2}{h} \left(\sin \frac{h}{2} \right)^2 \quad \text{substituiere } h' = \frac{h}{2} \Leftrightarrow h = 2h' \\
 &= -\frac{2}{2h'} \cdot (\sin h')^2 \\
 &= -\sin h' \cdot \frac{\sin h'}{h'} \rightarrow 0 \cdot 1 \quad \text{für } h' \rightarrow 0 \Leftrightarrow h \rightarrow 0
 \end{aligned}$$

$$y = m_t x + q$$

$$y = m_t x + q$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\pi}{4} + q$$

$$y = m_t x + q$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\pi}{4} + q$$

$$q = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}(4 - \pi)}{8}$$

$$y = m_t x + q$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\pi}{4} + q$$

$$q = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}(4 - \pi)}{8}$$

$$t: y = \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}(4 - \pi)}{8}$$

Aufgabe 3.17

Bestimme die Gleichung der Tangente an den Graphen der Funktion $f(x) = e^x$ an der Stelle $x = 1$.

Aufgabe 3.17

$$f(x) = e^x; x = 1$$

Aufgabe 3.17

$$f(x) = e^x; x = 1$$

$$f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$$

Aufgabe 3.17

$$f(x) = e^x; x = 1$$

$$f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{1+h} - e^1}{h}$$

Aufgabe 3.17

$$f(x) = e^x; x = 1$$

$$\begin{aligned} f'(1) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{1+h} - e^1}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^1 e^h - e^1}{h} \end{aligned}$$

Aufgabe 3.17

$$f(x) = e^x; x = 1$$

$$\begin{aligned} f'(1) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{1+h} - e^1}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^1 e^h - e^1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^1 (e^h - 1)}{h} \end{aligned}$$

Aufgabe 3.17

$$f(x) = e^x; x = 1$$

$$\begin{aligned} f'(1) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{1+h} - e^1}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^1 e^h - e^1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^1 (e^h - 1)}{h} \\ &= e \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = \dots \end{aligned}$$

Aufgabe 3.17

$$f(x) = e^x; x = 1$$

$$\begin{aligned} f'(1) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{1+h} - e^1}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^1 e^h - e^1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^1 (e^h - 1)}{h} \\ &= e \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = \dots \end{aligned}$$

$e^x \stackrel{\text{Def.}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ ist hier unpraktisch.

Aufgabe 3.17

$$f(x) = e^x; x = 1$$

$$\begin{aligned} f'(1) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{1+h} - e^1}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^1 e^h - e^1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^1 (e^h - 1)}{h} \\ &= e \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = \dots \end{aligned}$$

$e^x \stackrel{\text{Def.}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ ist hier unpraktisch.

$$\begin{aligned} \text{Alternative: } e^x &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k = \frac{1}{0!} x^0 + \frac{1}{1!} x^1 + \frac{1}{2!} x^2 + \frac{1}{3!} x^3 + \dots \\ &= 1 + x + \frac{1}{2!} x^2 + \frac{1}{3!} x^3 + \dots \quad (\text{Nachweis: später}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \dots &= e \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} \\
 &= e \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[\left(1 + h + \frac{1}{2!}h^2 + \frac{1}{3!}h^3 + \dots \right) - 1 \right] \\
 &= e \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[h + \frac{1}{2!}h^2 + \frac{1}{3!}h^3 + \dots \right] \\
 &= e \lim_{h \rightarrow 0} \left[1 + \frac{1}{2!}h + \frac{1}{3!}h^2 + \dots \right] \\
 &= e \cdot 1 = e
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \dots &= e \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} \\
 &= e \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[\left(1 + h + \frac{1}{2!}h^2 + \frac{1}{3!}h^3 + \dots \right) - 1 \right] \\
 &= e \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[h + \frac{1}{2!}h^2 + \frac{1}{3!}h^3 + \dots \right] \\
 &= e \lim_{h \rightarrow 0} \left[1 + \frac{1}{2!}h + \frac{1}{3!}h^2 + \dots \right] \\
 &= e \cdot 1 = e
 \end{aligned}$$

$$y = mx + q$$

$$e^1 = e \cdot 1 + q$$

$$q = 0$$

$$\begin{aligned}
 \dots &= e \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} \\
 &= e \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[\left(1 + h + \frac{1}{2!}h^2 + \frac{1}{3!}h^3 + \dots \right) - 1 \right] \\
 &= e \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[h + \frac{1}{2!}h^2 + \frac{1}{3!}h^3 + \dots \right] \\
 &= e \lim_{h \rightarrow 0} \left[1 + \frac{1}{2!}h + \frac{1}{3!}h^2 + \dots \right] \\
 &= e \cdot 1 = e
 \end{aligned}$$

$$y = mx + q$$

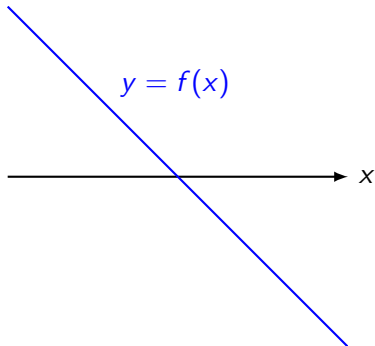
$$e^1 = e \cdot 1 + q$$

$$q = 0$$

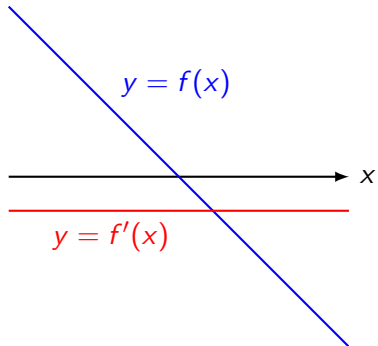
$$t: y = e \cdot x$$

Differenziere graphisch.

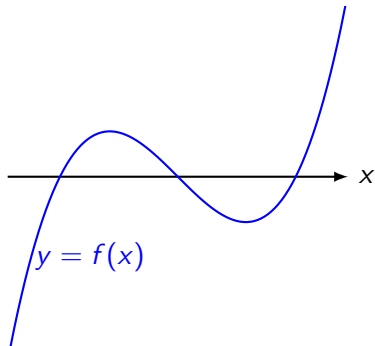
Aufgabe 3.18



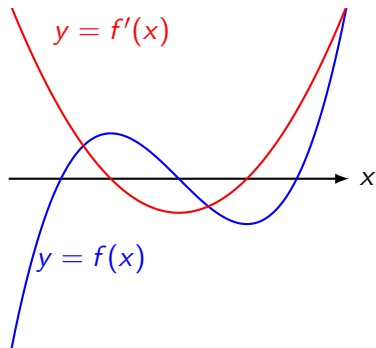
Aufgabe 3.18



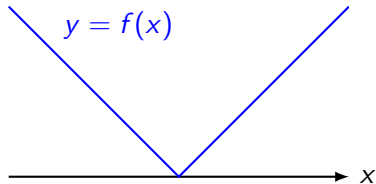
Aufgabe 3.19



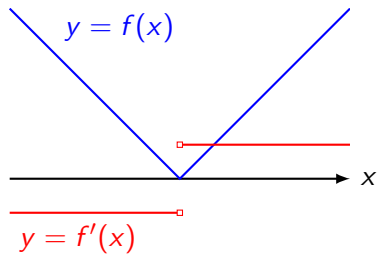
Aufgabe 3.19



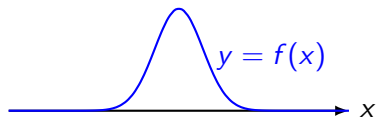
Aufgabe 3.20



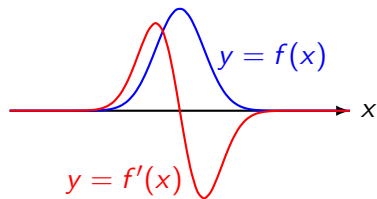
Aufgabe 3.20



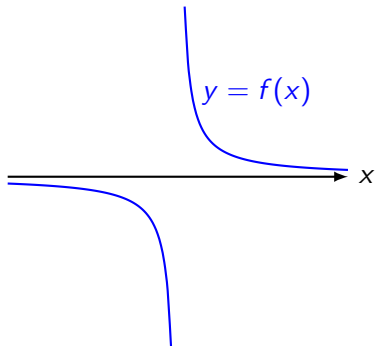
Aufgabe 3.21



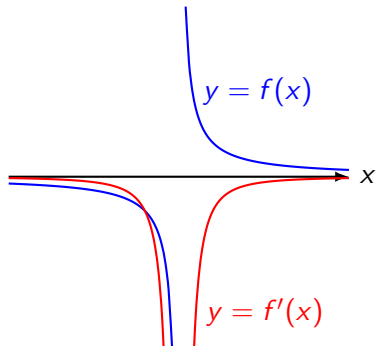
Aufgabe 3.21



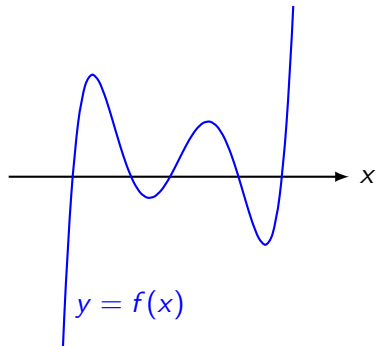
Aufgabe 3.22



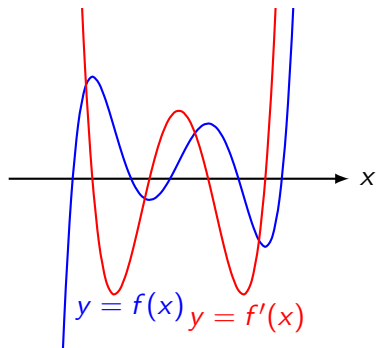
Aufgabe 3.22



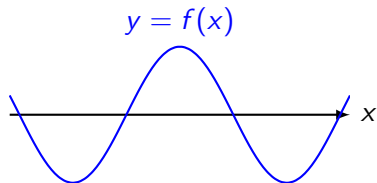
Aufgabe 3.23



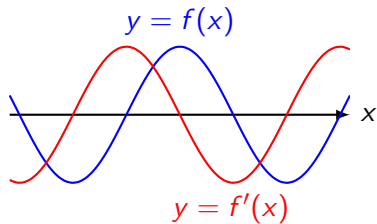
Aufgabe 3.23



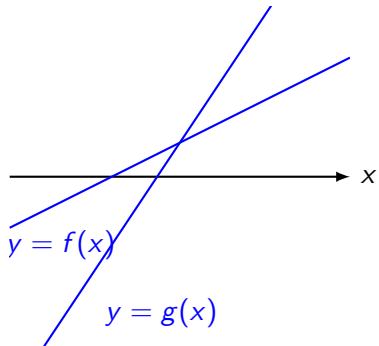
Aufgabe 3.23



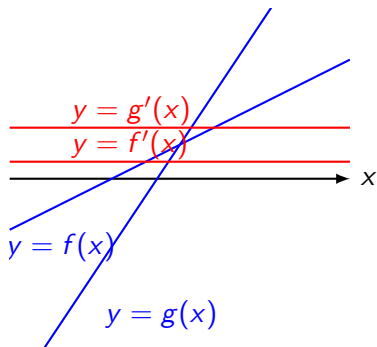
Aufgabe 3.23



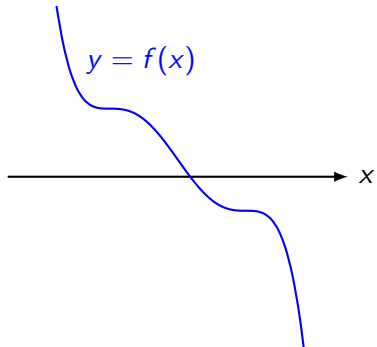
Aufgabe 3.24



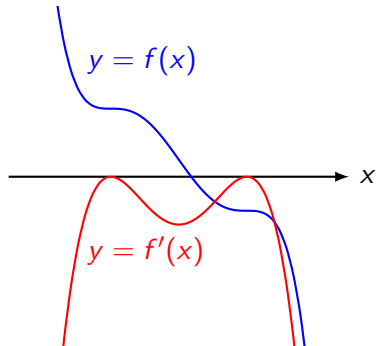
Aufgabe 3.24



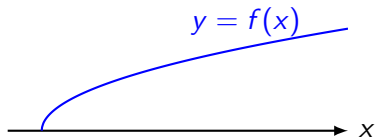
Aufgabe 3.25



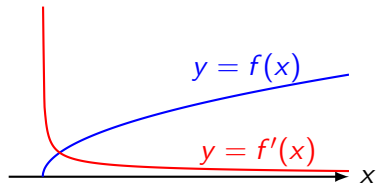
Aufgabe 3.25



Aufgabe 3.26



Aufgabe 3.26



Aufgabe 4.1

Beweise: $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h} = 0$

Aufgabe 4.1

Beweise: $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h} = 0$

Hinweis: Verwende die trigonometrische Beziehung $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, um den obigen Grenzwert in eine Form zu bringen, in der der bekannte Grenzwert

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} = 1$$

auftritt.

Aufgabe 4.1

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - \sin^2 h} - 1}{h}$$

Aufgabe 4.1

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - \sin^2 h} - 1}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1 - \sin^2 h} - 1)(\sqrt{1 - \sin^2 h} + 1)}{h(\sqrt{1 - \sin^2 h} + 1)}\end{aligned}$$

Aufgabe 4.1

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - \sin^2 h} - 1}{h} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1 - \sin^2 h} - 1)(\sqrt{1 - \sin^2 h} + 1)}{h(\sqrt{1 - \sin^2 h} + 1)} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1 - \sin^2 h) - 1}{h(\sqrt{1 - \sin^2 h} + 1)}\end{aligned}$$

Aufgabe 4.1

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - \sin^2 h} - 1}{h} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1 - \sin^2 h} - 1)(\sqrt{1 - \sin^2 h} + 1)}{h(\sqrt{1 - \sin^2 h} + 1)} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1 - \sin^2 h) - 1}{h(\sqrt{1 - \sin^2 h} + 1)} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-\sin^2 h}{h(\sqrt{1 - \sin^2 h} + 1)}\end{aligned}$$

Aufgabe 4.1

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - \sin^2 h} - 1}{h} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1 - \sin^2 h} - 1)(\sqrt{1 - \sin^2 h} + 1)}{h(\sqrt{1 - \sin^2 h} + 1)} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1 - \sin^2 h) - 1}{h(\sqrt{1 - \sin^2 h} + 1)} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-\sin^2 h}{h(\sqrt{1 - \sin^2 h} + 1)} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-\sin h}{\sqrt{1 - \sin^2 h} + 1}\end{aligned}$$

Aufgabe 4.1

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - \sin^2 h} - 1}{h} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1 - \sin^2 h} - 1)(\sqrt{1 - \sin^2 h} + 1)}{h(\sqrt{1 - \sin^2 h} + 1)} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1 - \sin^2 h) - 1}{h(\sqrt{1 - \sin^2 h} + 1)} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-\sin^2 h}{h(\sqrt{1 - \sin^2 h} + 1)} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-\sin h}{\sqrt{1 - \sin^2 h} + 1} \\&= 1 \cdot \frac{0}{2}\end{aligned}$$

Aufgabe 4.1

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - \sin^2 h} - 1}{h} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1 - \sin^2 h} - 1)(\sqrt{1 - \sin^2 h} + 1)}{h(\sqrt{1 - \sin^2 h} + 1)} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1 - \sin^2 h) - 1}{h(\sqrt{1 - \sin^2 h} + 1)} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-\sin^2 h}{h(\sqrt{1 - \sin^2 h} + 1)} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-\sin h}{\sqrt{1 - \sin^2 h} + 1} \\&= 1 \cdot \frac{0}{2} = 0\end{aligned}$$



Aufgabe 4.2

Beweise: $[\cos x]' = -\sin x$

Aufgabe 4.2

Beweise: $[\cos x]' = -\sin x$

Hinweis: Der Beweis verläuft analog zu dem von $[\sin x]' = \cos x$.

Aufgabe 4.2

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Aufgabe 4.2

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h}$$

Aufgabe 4.2

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos x \cdot \cos h - \sin x \cdot \sin h - \cos x}{h} \quad (\text{FBT S. 99}) \end{aligned}$$

Aufgabe 4.2

$$\begin{aligned}f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos x \cdot \cos h - \sin x \cdot \sin h - \cos x}{h} \quad (\text{FBT S. 99}) \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos x(\cos h - 1)}{h} - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin x \cdot \sin h}{h}\end{aligned}$$

Aufgabe 4.2

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos x \cdot \cos h - \sin x \cdot \sin h - \cos x}{h} \quad (\text{FBT S. 99}) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos x(\cos h - 1)}{h} - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin x \cdot \sin h}{h} \quad (\text{FBT S. 61}) \end{aligned}$$

Aufgabe 4.2

$$\begin{aligned}f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos x \cdot \cos h - \sin x \cdot \sin h - \cos x}{h} \quad (\text{FBT S. 99}) \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos x(\cos h - 1)}{h} - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin x \cdot \sin h}{h} \quad (\text{FBT S. 61}) \\&= \cos x \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h} - \sin x \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} \quad (\text{FBT S. 61})\end{aligned}$$

Aufgabe 4.2

$$\begin{aligned}f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos x \cdot \cos h - \sin x \cdot \sin h - \cos x}{h} \quad (\text{FBT S. 99}) \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos x(\cos h - 1)}{h} - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin x \cdot \sin h}{h} \quad (\text{FBT S. 61}) \\&= \cos x \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h} - \sin x \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} \quad (\text{FBT S. 61}) \\&= \cos x \cdot 0 - \sin x \cdot 1\end{aligned}$$

Aufgabe 4.2

$$\begin{aligned}f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos x \cdot \cos h - \sin x \cdot \sin h - \cos x}{h} \quad (\text{FBT S. 99}) \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos x(\cos h - 1)}{h} - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin x \cdot \sin h}{h} \quad (\text{FBT S. 61}) \\&= \cos x \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h} - \sin x \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} \quad (\text{FBT S. 61}) \\&= \cos x \cdot 0 - \sin x \cdot 1 = -\sin x \quad (\text{FTB S. 62})\end{aligned}$$



Aufgabe 4.3

Bestimme die Ableitung von $f(x) = \ln x$ an der Stelle $x = 5$.

Aufgabe 4.3

$$f'(x) = 1/x \quad \Rightarrow \quad f'(5) = \frac{1}{5}$$

Aufgabe 4.4

Bestimme die Ableitung von $f(x) = x^5$ an der Stelle $x = -2$.

Aufgabe 4.4

$$f'(x) = 5x^4 \quad \Rightarrow \quad f'(-2) = 5 \cdot (-2)^4 = 5 \cdot 16 = 80$$

Aufgabe 4.5

Bestimme die Ableitung von $f(x) = \cos x$ an der Stelle $x = \pi/2$.

Aufgabe 4.5

$$f'(x) = -\sin x \quad \Rightarrow \quad f'(\pi/2) = -\sin(\pi/2) = -1$$

Aufgabe 4.6

Bestimme die Gleichung der Tangente an den Graphen der Funktion $f(x) = e^x$ an der Stelle $x = 0$.

Aufgabe 4.6

$$f'(x) = e^x \quad \Rightarrow \quad f'(0) = e^0 = 1 = m_t$$

Aufgabe 4.6

$$f'(x) = e^x \quad \Rightarrow \quad f'(0) = e^0 = 1 = m_t$$

$$t: y = mx + q$$

Aufgabe 4.6

$$f'(x) = e^x \quad \Rightarrow \quad f'(0) = e^0 = 1 = m_t$$

$$t: y = mx + q$$

$$1 = 1 \cdot 0 + q$$

Aufgabe 4.6

$$f'(x) = e^x \quad \Rightarrow \quad f'(0) = e^0 = 1 = m_t$$

$$t: y = mx + q$$

$$1 = 1 \cdot 0 + q$$

$$q = 1$$

Aufgabe 4.6

$$f'(x) = e^x \quad \Rightarrow \quad f'(0) = e^0 = 1 = m_t$$

$$t: y = mx + q$$

$$1 = 1 \cdot 0 + q$$

$$q = 1$$

$$t: y = x + 1$$

Aufgabe 4.7

Bestimme die Gleichung der Normalen an den Graphen der Funktion $f(x) = x^3$ an der Stelle $x = \frac{2}{3}$.

Aufgabe 4.7

$$f'(x) = 3x^2 \quad \Rightarrow \quad f'\left(\frac{2}{3}\right) = 3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 3 \cdot \frac{4}{9} = \frac{4}{3} = m_t$$

Aufgabe 4.7

$$f'(x) = 3x^2 \quad \Rightarrow \quad f'\left(\frac{2}{3}\right) = 3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 3 \cdot \frac{4}{9} = \frac{4}{3} = m_t$$

$$m_n = -1/m_t = -\frac{3}{4}$$

Aufgabe 4.7

$$f'(x) = 3x^2 \quad \Rightarrow \quad f'\left(\frac{2}{3}\right) = 3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 3 \cdot \frac{4}{9} = \frac{4}{3} = m_t$$

$$m_n = -1/m_t = -\frac{3}{4}$$

$$n: y = mx + q$$

Aufgabe 4.7

$$f'(x) = 3x^2 \quad \Rightarrow \quad f'\left(\frac{2}{3}\right) = 3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 3 \cdot \frac{4}{9} = \frac{4}{3} = m_t$$

$$m_n = -1/m_t = -\frac{3}{4}$$

$$n: y = mx + q$$

$$\frac{8}{27} = -\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} + q$$

Aufgabe 4.7

$$f'(x) = 3x^2 \quad \Rightarrow \quad f'\left(\frac{2}{3}\right) = 3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 3 \cdot \frac{4}{9} = \frac{4}{3} = m_t$$

$$m_n = -1/m_t = -\frac{3}{4}$$

$$n: y = mx + q$$

$$\frac{8}{27} = -\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} + q$$

$$\frac{8}{27} = -\frac{1}{2} + q$$

Aufgabe 4.7

$$f'(x) = 3x^2 \quad \Rightarrow \quad f'\left(\frac{2}{3}\right) = 3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 3 \cdot \frac{4}{9} = \frac{4}{3} = m_t$$

$$m_n = -1/m_t = -\frac{3}{4}$$

$$n: y = mx + q$$

$$\frac{8}{27} = -\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} + q$$

$$\frac{8}{27} = -\frac{1}{2} + q$$

$$q = \frac{43}{54}$$

Aufgabe 4.7

$$f'(x) = 3x^2 \quad \Rightarrow \quad f'\left(\frac{2}{3}\right) = 3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 3 \cdot \frac{4}{9} = \frac{4}{3} = m_t$$

$$m_n = -1/m_t = -\frac{3}{4}$$

$$n: y = mx + q$$

$$\frac{8}{27} = -\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} + q$$

$$\frac{8}{27} = -\frac{1}{2} + q$$

$$q = \frac{43}{54}$$

$$n: y = -\frac{3}{4}x + \frac{43}{54}$$

Aufgabe 4.8

Die Tangente an den Graphen der Funktion $f(x) = \sqrt{x}$ bei $x = 1$ begrenzt zusammen mit den Koordinatenachsen im I. Quadranten eine Dreiecksfläche. Welchen Inhalt hat diese Fläche?

Aufgabe 4.8

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow$$

Aufgabe 4.8

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \Rightarrow \quad m = f'(1) = \frac{1}{2}$$

Aufgabe 4.8

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \Rightarrow \quad m = f'(1) = \frac{1}{2}$$

$$y = m \cdot x + q$$

Aufgabe 4.8

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \Rightarrow \quad m = f'(1) = \frac{1}{2}$$

$$y = m \cdot x + q$$

$$1 = \frac{1}{2} \cdot 1 + q$$

Aufgabe 4.8

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \Rightarrow \quad m = f'(1) = \frac{1}{2}$$

$$y = m \cdot x + q$$

$$1 = \frac{1}{2} \cdot 1 + q \quad \Rightarrow$$

Aufgabe 4.8

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \Rightarrow \quad m = f'(1) = \frac{1}{2}$$

$$y = m \cdot x + q$$

$$1 = \frac{1}{2} \cdot 1 + q \quad \Rightarrow \quad q = \frac{1}{2}$$

Aufgabe 4.8

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \Rightarrow \quad m = f'(1) = \frac{1}{2}$$

$$y = m \cdot x + q$$

$$1 = \frac{1}{2} \cdot 1 + q \quad \Rightarrow \quad q = \frac{1}{2}$$

$$t: y = \frac{1}{2} \cdot x + \frac{1}{2}$$

Aufgabe 4.8

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \Rightarrow \quad m = f'(1) = \frac{1}{2}$$

$$y = m \cdot x + q$$

$$1 = \frac{1}{2} \cdot 1 + q \quad \Rightarrow \quad q = \frac{1}{2}$$

$$t: y = \frac{1}{2} \cdot x + \frac{1}{2}$$

Ordinatenabschnitt von t : $q = \frac{1}{2}$

Aufgabe 4.8

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \Rightarrow \quad m = f'(1) = \frac{1}{2}$$

$$y = m \cdot x + q$$

$$1 = \frac{1}{2} \cdot 1 + q \quad \Rightarrow \quad q = \frac{1}{2}$$

$$t: y = \frac{1}{2} \cdot x + \frac{1}{2}$$

Ordinatenabschnitt von t : $q = \frac{1}{2}$

$$\text{Nullstelle von } t: \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} = 0 \quad \Rightarrow$$

Aufgabe 4.8

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \Rightarrow \quad m = f'(1) = \frac{1}{2}$$

$$y = m \cdot x + q$$

$$1 = \frac{1}{2} \cdot 1 + q \quad \Rightarrow \quad q = \frac{1}{2}$$

$$t: y = \frac{1}{2} \cdot x + \frac{1}{2}$$

Ordinatenabschnitt von t : $q = \frac{1}{2}$

$$\text{Nullstelle von } t: \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -1$$

Aufgabe 4.8

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \Rightarrow \quad m = f'(1) = \frac{1}{2}$$

$$y = m \cdot x + q$$

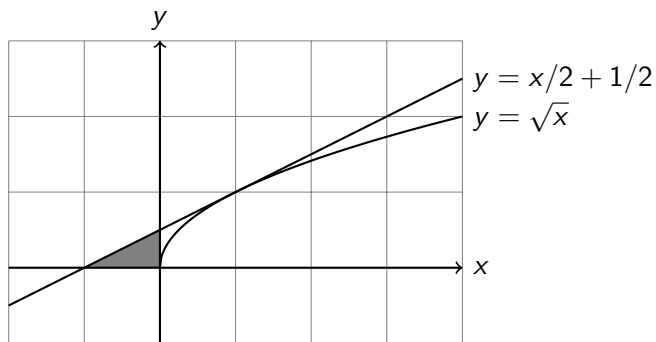
$$1 = \frac{1}{2} \cdot 1 + q \quad \Rightarrow \quad q = \frac{1}{2}$$

$$t: y = \frac{1}{2} \cdot x + \frac{1}{2}$$

Ordinatenabschnitt von t : $q = \frac{1}{2}$

$$\text{Nullstelle von } t: \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -1$$

$$\text{Flächeninhalt: } A = \frac{1}{2} \cdot |-1| \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$



Aufgabe 4.9

An welchen Stellen hat der Graph der Funktion $f(x) = 1/x$ die Steigung $m = -1.44$?

Aufgabe 4.9

$$f'(x) = -1/x^2 = -1.44$$

Aufgabe 4.9

$$f'(x) = -1/x^2 = -1.44$$

$$x^2 = 1/1.44$$

Aufgabe 4.9

$$f'(x) = -1/x^2 = -1.44$$

$$x^2 = 1/1.44$$

$$x = \pm 1/1.2 = \pm 1/(6/5) = \pm 5/6$$

Aufgabe 4.10

Eine Funktion f ist an der Stelle $x_0 \dots$

- ▶ monoton wachsend, wenn $f'(x_0) > 0$,
- ▶ monoton fallend, wenn $f'(x_0) < 0$.

Ist f an der Stelle x_0 monoton wachsend oder monoton fallend?

- (a) $f(x) = x^4$; $x_0 = -3$
- (b) $f(x) = x^7$; $x_0 = -100$
- (c) $f(x) = \ln x$; $x_0 = 0.7$
- (d) $f(x) = 1/x$; $x_0 = 4$
- (e) $f(x) = 1/x$; $x_0 = -4$

Aufgabe 4.10

(a) $f(x) = x^4 \Rightarrow f'(x) = 4x^3$

Aufgabe 4.10

(a) $f(x) = x^4 \Rightarrow f'(x) = 4x^3$

$$f'(-3) = 4 \cdot (-3)^3 < 0 \Rightarrow \text{monoton fallend}$$

Aufgabe 4.10

(a) $f(x) = x^4 \Rightarrow f'(x) = 4x^3$

$$f'(-3) = 4 \cdot (-3)^3 < 0 \Rightarrow \text{monoton fallend}$$

(b) $f(x) = x^7 \Rightarrow f'(x) = 7x^6$

Aufgabe 4.10

(a) $f(x) = x^4 \Rightarrow f'(x) = 4x^3$

$$f'(-3) = 4 \cdot (-3)^3 < 0 \Rightarrow \text{monoton fallend}$$

(b) $f(x) = x^7 \Rightarrow f'(x) = 7x^6$

$$f'(-100) = 7 \cdot (-100)^6 > 0 \Rightarrow \text{monoton wachsend}$$

Aufgabe 4.10

(a) $f(x) = x^4 \Rightarrow f'(x) = 4x^3$

$$f'(-3) = 4 \cdot (-3)^3 < 0 \Rightarrow \text{monoton fallend}$$

(b) $f(x) = x^7 \Rightarrow f'(x) = 7x^6$

$$f'(-100) = 7 \cdot (-100)^6 > 0 \Rightarrow \text{monoton wachsend}$$

(c) $f(x) = \ln x \Rightarrow f'(x) = 1/x$

Aufgabe 4.10

(a) $f(x) = x^4 \Rightarrow f'(x) = 4x^3$

$$f'(-3) = 4 \cdot (-3)^3 < 0 \Rightarrow \text{monoton fallend}$$

(b) $f(x) = x^7 \Rightarrow f'(x) = 7x^6$

$$f'(-100) = 7 \cdot (-100)^6 > 0 \Rightarrow \text{monoton wachsend}$$

(c) $f(x) = \ln x \Rightarrow f'(x) = 1/x$

$$\Rightarrow f'(0.7) = 1/0.7 > 0 \Rightarrow \text{monoton wachsend}$$

Aufgabe 4.10

(a) $f(x) = x^4 \Rightarrow f'(x) = 4x^3$

$$f'(-3) = 4 \cdot (-3)^3 < 0 \Rightarrow \text{monoton fallend}$$

(b) $f(x) = x^7 \Rightarrow f'(x) = 7x^6$

$$f'(-100) = 7 \cdot (-100)^6 > 0 \Rightarrow \text{monoton wachsend}$$

(c) $f(x) = \ln x \Rightarrow f'(x) = 1/x$

$$\Rightarrow f'(0.7) = 1/0.7 > 0 \Rightarrow \text{monoton wachsend}$$

(d) $f(x) = 1/x \Rightarrow f'(x) = -1/x^2$

Aufgabe 4.10

(a) $f(x) = x^4 \Rightarrow f'(x) = 4x^3$

$$f'(-3) = 4 \cdot (-3)^3 < 0 \Rightarrow \text{monoton fallend}$$

(b) $f(x) = x^7 \Rightarrow f'(x) = 7x^6$

$$f'(-100) = 7 \cdot (-100)^6 > 0 \Rightarrow \text{monoton wachsend}$$

(c) $f(x) = \ln x \Rightarrow f'(x) = 1/x$

$$\Rightarrow f'(0.7) = 1/0.7 > 0 \Rightarrow \text{monoton wachsend}$$

(d) $f(x) = 1/x \Rightarrow f'(x) = -1/x^2$

$$\Rightarrow f'(4) = -1/16 < 0 \Rightarrow \text{monoton fallend}$$

Aufgabe 4.10

(a) $f(x) = x^4 \Rightarrow f'(x) = 4x^3$

$$f'(-3) = 4 \cdot (-3)^3 < 0 \Rightarrow \text{monoton fallend}$$

(b) $f(x) = x^7 \Rightarrow f'(x) = 7x^6$

$$f'(-100) = 7 \cdot (-100)^6 > 0 \Rightarrow \text{monoton wachsend}$$

(c) $f(x) = \ln x \Rightarrow f'(x) = 1/x$

$$\Rightarrow f'(0.7) = 1/0.7 > 0 \Rightarrow \text{monoton wachsend}$$

(d) $f(x) = 1/x \Rightarrow f'(x) = -1/x^2$

$$\Rightarrow f'(4) = -1/16 < 0 \Rightarrow \text{monoton fallend}$$

(e) $f(x) = 1/x \Rightarrow f'(x) = -1/x^2$

Aufgabe 4.10

(a) $f(x) = x^4 \Rightarrow f'(x) = 4x^3$

$$f'(-3) = 4 \cdot (-3)^3 < 0 \Rightarrow \text{monoton fallend}$$

(b) $f(x) = x^7 \Rightarrow f'(x) = 7x^6$

$$f'(-100) = 7 \cdot (-100)^6 > 0 \Rightarrow \text{monoton wachsend}$$

(c) $f(x) = \ln x \Rightarrow f'(x) = 1/x$

$$\Rightarrow f'(0.7) = 1/0.7 > 0 \Rightarrow \text{monoton wachsend}$$

(d) $f(x) = 1/x \Rightarrow f'(x) = -1/x^2$

$$\Rightarrow f'(4) = -1/16 < 0 \Rightarrow \text{monoton fallend}$$

(e) $f(x) = 1/x \Rightarrow f'(x) = -1/x^2$

$$f'(-4) = -1/(-4)^2 < 0 \Rightarrow \text{monoton fallend}$$

Aufgabe 4.11

Bestimme die zweite Ableitung $f''(x)$ der gegebenen Funktion.

(a) $f(x) = e^x$

(b) $f(x) = \sin x$

(c) $f(x) = \ln x$

(d) $f(x) = x$

Aufgabe 4.11

$$(a) \quad f(x) = e^x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = e^x \quad \Rightarrow \quad f''(x) = e^x$$

Aufgabe 4.11

$$(a) \quad f(x) = e^x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = e^x \quad \Rightarrow \quad f''(x) = e^x$$

$$(b) \quad f(x) = \sin x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \cos x \quad \Rightarrow \quad f''(x) = -\sin x$$

Aufgabe 4.11

$$(a) \quad f(x) = e^x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = e^x \quad \Rightarrow \quad f''(x) = e^x$$

$$(b) \quad f(x) = \sin x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \cos x \quad \Rightarrow \quad f''(x) = -\sin x$$

$$(c) \quad f(x) = \ln x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 1/x \quad \Rightarrow \quad f''(x) = -1/x^2$$

Aufgabe 4.11

$$(a) \quad f(x) = e^x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = e^x \quad \Rightarrow \quad f''(x) = e^x$$

$$(b) \quad f(x) = \sin x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \cos x \quad \Rightarrow \quad f''(x) = -\sin x$$

$$(c) \quad f(x) = \ln x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 1/x \quad \Rightarrow \quad f''(x) = -1/x^2$$

$$(e) \quad f(x) = x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 1 \quad \Rightarrow \quad f''(x) = 0$$

Aufgabe 4.12

An welcher Stelle ist der Graph von $f(x) = x^2$ parallel zur Geraden $g: y = 3x + 5$?

Aufgabe 4.12

Die Steigungen von Tangente und Gerade müssen an der gesuchten Stelle übereinstimmen.

$$f'(x) = 3$$

$$2x = 3$$

$$x = 3/2$$

Aufgabe 4.13

Bestimme die Steigung der Tangente an den Graphen von f an der Stelle x_0 in Grad.

(a) $f(x) = x^4$; $x_0 = 0.5$

(b) $f(x) = 1/x$; $x_0 = -1$

(c) $f(x) = e^x$; $x_0 = -2$

(d) $f(x) = \ln x$; $x_0 = \sqrt{3}$

(e) $f(x) = \cos x$; $x_0 = \frac{\pi}{6}$

Aufgabe 4.13

$$(a) \quad f(x) = x^4 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 4x^3$$

Aufgabe 4.13

$$(a) \quad f(x) = x^4 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 4x^3$$

$$\varphi = \arctan(4 \cdot 0.5^3) = 26.57^\circ$$

Aufgabe 4.13

(a) $f(x) = x^4 \Rightarrow f'(x) = 4x^3$

$$\varphi = \arctan(4 \cdot 0.5^3) = 26.57^\circ$$

(b) $f(x) = 1/x \Rightarrow f'(x) = -1/x^2$

Aufgabe 4.13

$$(a) \quad f(x) = x^4 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 4x^3$$

$$\varphi = \arctan(4 \cdot 0.5^3) = 26.57^\circ$$

$$(b) \quad f(x) = 1/x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = -1/x^2$$

$$\varphi = \arctan(-1/(-1)^2) = -45^\circ$$

Aufgabe 4.13

(a) $f(x) = x^4 \Rightarrow f'(x) = 4x^3$

$$\varphi = \arctan(4 \cdot 0.5^3) = 26.57^\circ$$

(b) $f(x) = 1/x \Rightarrow f'(x) = -1/x^2$

$$\varphi = \arctan(-1/(-1)^2) = -45^\circ$$

(c) $f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x$

Aufgabe 4.13

(a) $f(x) = x^4 \Rightarrow f'(x) = 4x^3$

$$\varphi = \arctan(4 \cdot 0.5^3) = 26.57^\circ$$

(b) $f(x) = 1/x \Rightarrow f'(x) = -1/x^2$

$$\varphi = \arctan(-1/(-1)^2) = -45^\circ$$

(c) $f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x$

$$\varphi = \arctan(e^{-2}) = 7.71^\circ$$

Aufgabe 4.13

$$(a) \quad f(x) = x^4 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 4x^3$$

$$\varphi = \arctan(4 \cdot 0.5^3) = 26.57^\circ$$

$$(b) \quad f(x) = 1/x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = -1/x^2$$

$$\varphi = \arctan(-1/(-1)^2) = -45^\circ$$

$$(c) \quad f(x) = e^x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = e^x$$

$$\varphi = \arctan(e^{-2}) = 7.71^\circ$$

$$(d) \quad f(x) = \ln x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 1/x$$

Aufgabe 4.13

(a) $f(x) = x^4 \Rightarrow f'(x) = 4x^3$

$$\varphi = \arctan(4 \cdot 0.5^3) = 26.57^\circ$$

(b) $f(x) = 1/x \Rightarrow f'(x) = -1/x^2$

$$\varphi = \arctan(-1/(-1)^2) = -45^\circ$$

(c) $f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x$

$$\varphi = \arctan(e^{-2}) = 7.71^\circ$$

(d) $f(x) = \ln x \Rightarrow f'(x) = 1/x$

$$\varphi = \arctan(1/\sqrt{3}) = 30^\circ$$

Aufgabe 4.13

(a) $f(x) = x^4 \Rightarrow f'(x) = 4x^3$

$$\varphi = \arctan(4 \cdot 0.5^3) = 26.57^\circ$$

(b) $f(x) = 1/x \Rightarrow f'(x) = -1/x^2$

$$\varphi = \arctan(-1/(-1)^2) = -45^\circ$$

(c) $f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x$

$$\varphi = \arctan(e^{-2}) = 7.71^\circ$$

(d) $f(x) = \ln x \Rightarrow f'(x) = 1/x$

$$\varphi = \arctan(1/\sqrt{3}) = 30^\circ$$

(e) $f(x) = \cos x \Rightarrow f'(x) = -\sin x$

Aufgabe 4.13

(a) $f(x) = x^4 \Rightarrow f'(x) = 4x^3$

$$\varphi = \arctan(4 \cdot 0.5^3) = 26.57^\circ$$

(b) $f(x) = 1/x \Rightarrow f'(x) = -1/x^2$

$$\varphi = \arctan(-1/(-1)^2) = -45^\circ$$

(c) $f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x$

$$\varphi = \arctan(e^{-2}) = 7.71^\circ$$

(d) $f(x) = \ln x \Rightarrow f'(x) = 1/x$

$$\varphi = \arctan(1/\sqrt{3}) = 30^\circ$$

(e) $f(x) = \cos x \Rightarrow f'(x) = -\sin x$

$$\varphi = \arctan(-\sin \frac{\pi}{6}) = -26.57^\circ$$

Aufgabe 5.1

$$f(x) = x^2 + x^3; f'(x) = ?$$

Aufgabe 5.1

$$f'(x) = 2x + 3x^2$$

Aufgabe 5.2

$$f(x) = \sin x + \cos x; f'(x) = ?$$

Aufgabe 5.2

$$f'(x) = \cos x - \sin x$$

Aufgabe 5.3

$$f(x) = \tan x + x; f'(x) = ?$$

Aufgabe 5.3

$$f'(x) = 2 + \tan^2 x$$

Aufgabe 5.4

$$f(t) = 3 + \ln t; f'(x) = ?$$

Aufgabe 5.4

$$f'(t) = \frac{1}{t}$$

Aufgabe 5.5

$$f(x) = x^2 + \frac{1}{x^2}; f'(x) = ?$$

Aufgabe 5.5

$$f'(x) = 2x - \frac{2}{x^3}$$

Aufgabe 5.6

$$f(x) = 3^x + x^3; f'(x) = ?$$

Aufgabe 5.6

$$f'(x) = \ln 3 \cdot 3^x + 3x^2$$

Aufgabe 5.7

$$a(z) = 1 + z + z^2 + z^3; \quad f'(x) = ?$$

Aufgabe 5.7

$$a'(z) = 1 + 2z + 3z^2$$

Aufgabe 5.8

$$f(x) = \log_{10} x + \sqrt{x}; \quad f'(x) = ?$$

Aufgabe 5.8

$$f'(x) = \frac{1}{\ln 10} \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Aufgabe 5.9

$$f(x) = 4 + x; f'(x) = ?$$

Aufgabe 5.9

$$f'(x) = 1$$

Aufgabe 5.10

$$f(x) = x^{-4} + x^{-6}; f'(x) = ?$$

Aufgabe 5.10

$$f'(x) = -4x^{-5} - 6x^{-7}$$

Aufgabe 5.11

$$f(x) = 3x^2; f'(x) = ?$$

Aufgabe 5.11

$$f'(x) = 6x$$

Aufgabe 5.12

$$f(x) = 5 e^x; f'(x) = ?$$

Aufgabe 5.12

$$f'(x) = 5e^x$$

Aufgabe 5.13

$$f(x) = -4 \sin x; f'(x) = ?$$

Aufgabe 5.13

$$f'(x) = -4 \cos x$$

Aufgabe 5.14

$$g(x) = \pi \ln x; f'(x) = ?$$

Aufgabe 5.14

$$g'(x) = \pi \frac{1}{x}$$

Aufgabe 5.15

$$f(x) = -\cos x; f'(x) = ?$$

Aufgabe 5.15

$$f'(x) = \sin x$$

Aufgabe 5.16

$$f(x) = 7; f'(x) = ?$$

Aufgabe 5.16

$$f'(x) = 0$$

Aufgabe 5.17

$$f(t) = \frac{5}{t}; f'(t) = ?$$

Aufgabe 5.17

$$f'(t) = -\frac{5}{t^2}$$

Aufgabe 5.18

$$f(x) = 4\sqrt{x}; f'(x) = ?$$

Aufgabe 5.18

$$f'(x) = \frac{2}{\sqrt{x}}$$

Aufgabe 5.19

$$f(x) = \frac{1}{\ln 2} \cdot 2^x; f'(x) = ?$$

Aufgabe 5.19

$$f'(x) = 2^x$$

Aufgabe 5.20

$$h(s) = 3 s^{-5}; f'(s) = ?$$

Aufgabe 5.20

$$h'(s) = -15 s^{-6}$$

Aufgabe 5.21

$$f(x) = 2x^2 + 3x - 5; f'(x) = ?$$

Aufgabe 5.21

$$f'(x) = 4x + 3$$

Aufgabe 5.22

$$f(x) = x^3 - 7x^2 + 9; f'(x) = ?$$

Aufgabe 5.22

$$f'(x) = 3x^2 - 14x$$

Aufgabe 5.23

$$f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2 + 6x - 2; f'(x) = ?$$

Aufgabe 5.23

$$f'(x) = x^3 - x^2 + 5x + 6$$

Aufgabe 5.24

$$f(x) = \frac{2}{3}x^5 + \frac{4}{3}x^4 + \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{5}x^2 + \frac{1}{2}x - 3; f'(x) = ?$$

Aufgabe 5.24

$$f'(x) = \frac{10}{3}x^4 + \frac{16}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{2}{5}x + \frac{1}{2}$$

Aufgabe 5.25

$$f(x) = \sqrt{2} x^3 - \pi x^2 + e x; f'(x) = ?$$

Aufgabe 5.25

$$f'(x) = 3\sqrt{2}x^2 - 2\pi x + e$$

Aufgabe 5.26

$$g(x) = 0.1 x^5 - 0.25 x^3 - 0.3 x; f'(x) = ?$$

Aufgabe 5.26

$$g'(x) = 0.5x^4 - 0.75x^2 - 0.3$$

Aufgabe 5.27

$$f(x) = 2 \cdot (7x^2 + 3x - 8); f'(x) = ?$$

Aufgabe 5.27

$$f'(x) = 28x + 6$$

Aufgabe 5.28

$$f(t) = (t - 1)(t + 1); f'(t) = ?$$

Aufgabe 5.28

$$f(t) = t^2 - 1 \Rightarrow f'(t) = 2t$$

Aufgabe 5.29

$$h(x) = (x + 2)^2; f'(x) = ?$$

Aufgabe 5.29

$$h(x) = x^2 + 4x + 4 \Rightarrow h'(x) = 2x + 4$$

Aufgabe 5.30

$$f(x) = 3(x + 1)(x - 2); f'(x) = ?$$

Aufgabe 5.30

$$f(x) = 3(x^2 - x - 2) = 3x^2 - 3x - 6 \Rightarrow f'(x) = 6x - 3$$

Aufgabe 5.31

$$f(t) = (3t^2 + t) \cdot (1 - t^2); f'(t) = ?$$

Aufgabe 5.31

$$\begin{aligned}f'(t) &= (6t + 1)(1 - t^2) + (3t^2 + t)(-2t) \\ &= \dots = -12t^3 - 3t^2 + 6t + 1\end{aligned}$$

Aufgabe 5.32

$$f(x) = (1 + 3x + x^2) \cdot (x^3 + 4x - 3); \quad f'(x) = ?$$

Aufgabe 5.32

$$\begin{aligned}f'(x) &= (3 + 2x)(x^3 + 4x - 3) + (1 + 3x + x^2)(3x^2 + 4) \\&= \dots = 5x^4 + 12x^3 + 15x^2 + 18x - 5\end{aligned}$$

Aufgabe 5.33

$$g(x) = x \cdot \cos x; \quad f'(x) = ?$$

Aufgabe 5.33

$$g'(x) = \cos x - x \cdot \sin x$$

Aufgabe 5.34

$$f(t) = (t^2 - 1) \cdot \sin t; \quad f'(t) = ?$$

Aufgabe 5.34

$$f'(t) = 2t \cdot \sin t + (t^2 - 1) \cdot \cos t$$

Aufgabe 5.35

$$f(x) = \sin x \cdot \cos x; f'(x) = ?$$

Aufgabe 5.35

$$f'(x) = \cos x \cdot \cos x + \sin x \cdot (-\sin x) = \cos^2 x - \sin^2 x \stackrel{\text{Trig.}}{=} \cos(2x)$$

Aufgabe 5.36

$$h(t) = \cos^2 t; \quad h'(t) = ?$$

Aufgabe 5.36

$$h'(t) = (-\sin t) \cdot \cos t + \cos t \cdot (-\sin t) = -2 \sin t \cdot \cos t \stackrel{\text{Trig.}}{=} -2 \sin(2t)$$

Aufgabe 5.37

$$f(x) = x \cdot \ln x; f'(x) = ?$$

Aufgabe 5.37

$$f'(x) = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1$$

Aufgabe 5.38

$$f(x) = \sqrt{x} \cdot \sin x; f'(x) = ?$$

Aufgabe 5.38

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \sin x + \sqrt{x} \cdot \cos x$$

Aufgabe 5.39

$$h(x) = x^2 \cdot e^x; f'(x) = ?$$

Aufgabe 5.39

$$h'(x) = 2x \cdot e^x + x^2 \cdot e^x$$

Aufgabe 5.40

$$f(x) = \tan x \cdot \cos x; f'(x) = ?$$

Aufgabe 5.40

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} \cdot \cos x + \tan x \cdot (-\sin x) = \frac{1}{\cos x} - \tan x \cdot \sin x$$

Aufgabe 5.41

$$f(x) = \frac{x+1}{x-1} ; f'(x) = ?$$

Aufgabe 5.41

$$f'(x) = \frac{1 \cdot (x-1) - (x+1) \cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{-2}{(x-1)^2}$$

Aufgabe 5.42

$$f(x) = \frac{3x}{x+1} ; f'(x) = ?$$

Aufgabe 5.42

$$f'(x) = \frac{3 \cdot (x+1) - 3x \cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{3x+3-3x}{(x+1)^2} = \frac{3}{(x+1)^2}$$

Aufgabe 5.43

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 1} ; f'(x) = ?$$

Aufgabe 5.43

Hier ist es möglich und vorteilhaft, vor dem Ableiten die Funktion zu vereinfachen:

$$f(x) = \frac{(x-1)(x+1)}{x+1} = x-1 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 1$$

Aufgabe 5.44

$$f(x) = \frac{x^3 + 2x^2 - 4}{x} ; f'(x) = ?$$

Aufgabe 5.44

Hier ist es möglich und vorteilhaft, vor dem Ableiten die Funktion zu vereinfachen:

$$f(x) = \frac{x^3 + 2x^2 - 4}{x} = x^2 + 2x - \frac{4}{x} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 2x + 2 + \frac{4}{x^2}$$

Zur Erinnerung: $\left[\frac{1}{x}\right]' = [x^{-1}]' = (-1) \cdot x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$

Aufgabe 5.45

$$f(x) = \frac{x^4 + 3x^2 + 2}{x + 5} ; f'(x) = ?$$

Aufgabe 5.45

$$f'(x) = \frac{(4x^3 + 6x)(x + 5) - x^4 + 3x^2 + 2}{(x + 5)^2} = \dots =$$
$$\frac{3x^4 + 20x^3 + 3x^2 + 30x - 2}{(x + 5)^2}$$

Aufgabe 5.46

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 3x + 2}; \quad f'(x) = ?$$

Aufgabe 5.46

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{(2x-2)(x^2+3x+2) - (x^2-2x+1)(2x+3)}{(x^2+3x+2)^2} \\&= \frac{[2x^3 + 6x^2 + 4x - 2x^2 - 6x - 4] - [2x^3 + 3x^2 - 4x^2 - 6x + 2x + 3]}{(x^2+3x+2)^2} \\&= \frac{[2x^3 + 4x^2 - 2x - 4] - [2x^3 - x^2 - 4x + 3]}{(x^2+3x+2)^2} = \\&= \frac{5x^2 + 2x - 7}{(x^2+3x+2)^2}\end{aligned}$$

Aufgabe 5.47

$$f(x) = \frac{e^x}{x^2}; f'(x) = ?$$

Aufgabe 5.47

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{e^x \cdot x^2 - e^x \cdot 2x}{x^4} = \frac{x(e^x \cdot x - 2 \cdot e^x)}{x^4} \\ &= \frac{e^x \cdot x - 2 \cdot e^x}{x^3} \end{aligned}$$

Aufgabe 5.48

$$f(x) = \frac{\sin x}{\cos x} ; f'(x) = ?$$

Aufgabe 5.48

$$f'(x) = \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\text{oder: } f'(x) = \dots = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

Aufgabe 5.49

$$f(x) = \frac{\ln x}{x} ; f'(x) = ?$$

Aufgabe 5.49

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x \cdot 1}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

Aufgabe 5.50

$$f(x) = \frac{x \cdot \ln x}{e^x} ; f'(x) = ?$$

Aufgabe 5.50

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x}) \cdot e^x - (x \cdot \ln x) \cdot e^x}{(e^x)^2} = \\ &= \frac{(\ln x + 1)e^x - x \cdot \ln x \cdot e^x}{(e^x)^2} \\ &= \frac{e^x(\ln x + 1 - x \cdot \ln x)}{(e^x)^2} = \frac{\ln x + 1 - x \cdot \ln x}{e^x} \end{aligned}$$

Aufgabe 5.51

$$f(x) = (5x - 3)^7; f'(x) = ?$$

Aufgabe 5.51

$$f'(x) = 7 \cdot (5x - 3)^6 \cdot 5 = 35 \cdot (5x - 3)^6$$

Aufgabe 5.52

$$f(x) = e^{3x}; f'(x) = ?$$

Aufgabe 5.52

$$f'(x) = 3 \cdot e^{3x}$$

Aufgabe 5.53

$$f(x) = e^{-x}; f'(x) = ?$$

Aufgabe 5.53

$$f'(x) = -e^{-x}$$

Aufgabe 5.54

$$f(x) = \tan(4x); f'(x) = ?$$

Aufgabe 5.54

$$f'(x) = \frac{4}{\cos^2(4x)} \quad [= 4 + 4 \tan^2(4x)]$$

Aufgabe 5.55

$$f(x) = \sqrt{7x - 3}; f'(x) = ?$$

Aufgabe 5.55

$$f'(x) = \frac{7}{2\sqrt{7x-3}}$$

Aufgabe 5.56

$$f(x) = \sin 2x; f'(x) = ?$$

Aufgabe 5.56

$$f'(x) = 2 \cdot \cos(2x)$$

Aufgabe 5.57

$$f(x) = \cos(-x); f'(x) = ?$$

Aufgabe 5.57

$$f'(x) = (-1) \cdot (-\sin(-x)) = \sin(-x) \stackrel{\text{Trig.}}{=} -\sin x$$

Aufgabe 5.58

$$f(x) = \cos(x^2); f'(x) = ?$$

Aufgabe 5.58

$$f'(x) = 2x \cdot (-\sin(x^2)) = -2x \cdot \sin(x^2)$$

Aufgabe 5.59

$$f(x) = \sin(x^2 + 3x + 1); f'(x) = ?$$

Aufgabe 5.59

$$f'(x) = (2x + 3) \cos(x^2 + 3x + 1)$$

Aufgabe 5.60

$$f(x) = (\sin x)^2; f'(x) = ?$$

Aufgabe 5.60

$$f'(x) = 2 \cdot \sin x \cdot \cos x = 2 \sin x \cdot \cos x \stackrel{\text{Trig.}}{=} \sin(2x)$$

Aufgabe 5.61

$$f(x) = 5x^2 - 3e^x + \ln x; f'(x) = ?$$

Aufgabe 5.61

$$f'(x) = 10x - 3e^x + \frac{1}{x}$$

Aufgabe 5.62

$$f(x) = \sin(x^2); f'(x) = ?$$

Aufgabe 5.62

$$f'(x) = 2x \cdot \cos(x^2)$$

Aufgabe 5.63

$$f(x) = \sin^2 x; f'(x) = ?$$

Aufgabe 5.63

$$f'(x) = \cos x \cdot 2 \cdot \sin x = 2 \sin x \cos x$$

Aufgabe 5.64

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x + 1}; f'(x) = ?$$

Aufgabe 5.64

$$f'(x) = \frac{2x(x+1) - (x^2+1) \cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{x^2+2x-1}{(x+1)^2}$$

Aufgabe 5.65

$$f(x) = (x^4 + x) \cdot \ln x; \quad f'(x) = ?$$

Aufgabe 5.65

$$f'(x) = (4x^3 + 1) \cdot \ln x + (x^4 + x) \cdot \frac{1}{x}$$

Aufgabe 5.65

$$\begin{aligned}f'(x) &= (4x^3 + 1) \cdot \ln x + (x^4 + x) \cdot \frac{1}{x} \\&= (4x^3 + 1) \cdot \ln x + x^3 + 1\end{aligned}$$

Aufgabe 5.66

$$f(x) = \sqrt{\ln x}; \quad f'(x) = ?$$

Aufgabe 5.66

$$f'(x) = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\ln x}} = \frac{1}{2x\sqrt{\ln x}}$$

Aufgabe 5.67

$$f(x) = e^{-x^2}; f'(x) = ?$$

Aufgabe 5.67

$$f'(x) = -2x \cdot e^{-x^2}$$

Aufgabe 5.68

$$f(x) = \frac{\ln x}{x^3}; f'(x) = ?$$

Aufgabe 5.68

$$f'(x) = \frac{x^{-1} \cdot x^3 - \ln x \cdot 3x^2}{x^6}$$

Aufgabe 5.68

$$f'(x) = \frac{x^{-1} \cdot x^3 - \ln x \cdot 3x^2}{x^6} = \frac{x^2 - 3x^2 \cdot \ln x}{x^6}$$

Aufgabe 5.68

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{x^{-1} \cdot x^3 - \ln x \cdot 3x^2}{x^6} = \frac{x^2 - 3x^2 \cdot \ln x}{x^6} \\ &= \frac{x^2(1 - 3 \ln x)}{x^6} \end{aligned}$$

Aufgabe 5.68

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{x^{-1} \cdot x^3 - \ln x \cdot 3x^2}{x^6} = \frac{x^2 - 3x^2 \cdot \ln x}{x^6} \\ &= \frac{x^2(1 - 3 \ln x)}{x^6} = \frac{1 - 3 \ln x}{x^4} \end{aligned}$$

Aufgabe 5.69

$$f(x) = \frac{1}{\cos x}; f'(x) = ?$$

Aufgabe 5.69

$$f'(x) = \frac{0 \cdot \cos x - 1 \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$$

Aufgabe 5.70

$$f(x) = \sqrt{1 - 2x}; \quad f'(x) = ?$$

Aufgabe 5.70

$$f'(x) = \frac{-2}{2\sqrt{1-2x}} = \frac{-1}{\sqrt{1-2x}}$$

Aufgabe 5.71

$$f(x) = x^4 \cdot \sin x; f'(x) = ?$$

Aufgabe 5.71

$$f'(x) = 4x^3 \cdot \sin x + x^4 \cdot \cos x$$

Aufgabe 5.72

$$f(x) = \tan(5x + \pi); f'(x) = ?$$

Aufgabe 5.72

$$f'(x) = \frac{5}{\cos^2(5x + \pi)} = \frac{5}{\cos^2(5x)}$$

Aufgabe 5.72

$$f'(x) = \frac{5}{\cos^2(5x + \pi)} = \frac{5}{\cos^2(5x)}$$

oder

$$f'(x) = 5 \cdot [1 + \tan^2(5x + \pi)]$$

Aufgabe 5.72

$$f'(x) = \frac{5}{\cos^2(5x + \pi)} = \frac{5}{\cos^2(5x)}$$

oder

$$\begin{aligned} f'(x) &= 5 \cdot [1 + \tan^2(5x + \pi)] \\ &= 5 + 5 \tan^2(5x + \pi) = 5 + 5 \tan^2(5x) \end{aligned}$$

Aufgabe 5.72

$$f'(x) = \frac{5}{\cos^2(5x + \pi)} = \frac{5}{\cos^2(5x)}$$

oder

$$\begin{aligned} f'(x) &= 5 \cdot [1 + \tan^2(5x + \pi)] \\ &= 5 + 5 \tan^2(5x + \pi) = 5 + 5 \tan^2(5x) \end{aligned}$$

Die trigonometrischen Vereinfachungen folgen aus den Reduktionsformeln für $x + \pi$: (FTB S. 99)

Aufgabe 5.72

$$f'(x) = \frac{5}{\cos^2(5x + \pi)} = \frac{5}{\cos^2(5x)}$$

oder

$$\begin{aligned} f'(x) &= 5 \cdot [1 + \tan^2(5x + \pi)] \\ &= 5 + 5 \tan^2(5x + \pi) = 5 + 5 \tan^2(5x) \end{aligned}$$

Die trigonometrischen Vereinfachungen folgen aus den Reduktionsformeln für $x + \pi$: (FTB S. 99)

$$\sin(x + \pi) = -\sin(x)$$

$$\cos(x + \pi) = -\cos(x)$$

$$\tan(x + \pi) = \tan(x)$$

Aufgabe 5.73

$$f(x) = \frac{2}{x}; f'(x) = ?$$

Aufgabe 5.73

$$f'(x) = -\frac{2}{x^2}$$

Aufgabe 5.74

$$f(x) = e^{(x^2)}; f'(x) = ?$$

Aufgabe 5.74

$$f'(x) = 2x \cdot e^{(x^2)}$$

Aufgabe 5.75

$$f(x) = (e^x)^2; f'(x) = ?$$

Aufgabe 5.75

$$f'(x) = e^x \cdot 2e^x = 2(e^x)^2 = 2e^{2x}$$

Aufgabe 5.76

$$f(x) = \frac{x^2}{1-x^2}; f'(x) = ?$$

Aufgabe 5.76

$$f'(x) = \frac{2x(1-x^2) - x^2(-2x)}{(1-x^2)^2} = \frac{2x}{(1-x^2)^2}$$

Aufgabe 5.77

$$f(x) = (x^3 - 7x^2 + 5)^8; f'(x) = ?$$

Aufgabe 5.77

$$f'(x) = (3x^2 - 14x) \cdot 8(x^3 - 7x^2 + 5)^7$$

Aufgabe 5.77

$$\begin{aligned}f'(x) &= (3x^2 - 14x) \cdot 8(x^3 - 7x^2 + 5)^7 \\&= 8(3x^2 - 14x)(x^3 - 7x^2 + 5)^7\end{aligned}$$

Aufgabe 5.78

$$f(x) = x^{-2}; f'(x) = ?$$

Aufgabe 5.78

$$f'(x) = -2x^{-3}$$

Aufgabe 5.78

$$f'(x) = -2x^{-3}$$

oder

$$f'(x) = \frac{-2}{x^3}$$

Aufgabe 5.79

$$f(x) = xe^x; f'(x) = ?$$

Aufgabe 5.79

$$f'(x) = e^x + x \cdot e^x = e^x(1 + x)$$

Aufgabe 5.80

$$f(x) = e \cdot x^2 - \frac{1}{e^2 \cdot x}; f'(x) = ?$$

Aufgabe 5.80

$$f'(x) = 2 \cdot e \cdot x + \frac{1}{e^2 \cdot x^2}$$

Aufgabe 5.81

$$f(x) = \frac{x^3}{2e^x}; \quad f'(x) = ?$$

Aufgabe 5.81

$$f'(x) = \frac{6x^2 - 2x^3}{4e^x} = \frac{3x^2 - x^3}{2e^x}$$

Aufgabe 5.82

$$f(x) = \frac{1}{(\cos x)^2}; \quad f'(x) = ?$$

Aufgabe 5.82

$$f'(x) = \frac{2 \sin x}{(\cos x)^3}$$

Aufgabe 5.83

$$f(x) = \sin(2x); f'(x) = ?$$

Aufgabe 5.83

$$f'(x) = 2 \cos(2x)$$

Aufgabe 5.84

$$f(x) = e^{x^2+1} \cdot \ln(x+1); f'(x) = ?$$

Aufgabe 5.84

$$f'(x) = 2xe^{x^2+1} \ln(x+1) + e^{x^2+1} \cdot \frac{1}{x+1}$$

Aufgabe 5.85

$$f(x) = -14 \sin x - 3x^2; f'(x) = ?$$

Aufgabe 5.85

$$f'(x) = -14 \cos x - 6x$$

Aufgabe 5.86

$$f(x) = \frac{\sqrt{2}}{x} - \frac{x}{\pi}; f'(x) = ?$$

Aufgabe 5.86

$$f'(x) = \frac{-\sqrt{2}}{x^2} - \frac{1}{\pi}$$

Aufgabe 5.87

$$f(x) = \ln \frac{1-x^2}{1+x^2}; \quad f'(x) = ?$$

Aufgabe 5.87

$$f'(x) = \frac{-2x(1+x^2) - (1-x^2)2x}{(1+x^2)^2} \cdot \frac{1}{\frac{1-x^2}{1+x^2}}$$

Aufgabe 5.87

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{-2x(1+x^2) - (1-x^2)2x}{(1+x^2)^2} \cdot \frac{1}{\frac{1-x^2}{1+x^2}} \\ &= \frac{-2x - 2x^2 - 2x + 2x^2}{(1+x^2)^2} \cdot \frac{1+x^2}{1-x^2} \end{aligned}$$

Aufgabe 5.87

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{-2x(1+x^2) - (1-x^2)2x}{(1+x^2)^2} \cdot \frac{1}{\frac{1-x^2}{1+x^2}} \\ &= \frac{-2x - 2x^2 - 2x + 2x^2}{(1+x^2)^2} \cdot \frac{1+x^2}{1-x^2} \\ &= \frac{-4x}{(1+x^2)(1-x^2)} = \end{aligned}$$

Aufgabe 5.87

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{-2x(1+x^2) - (1-x^2)2x}{(1+x^2)^2} \cdot \frac{1}{\frac{1-x^2}{1+x^2}} \\&= \frac{-2x - 2x^2 - 2x + 2x^2}{(1+x^2)^2} \cdot \frac{1+x^2}{1-x^2} \\&= \frac{-4x}{(1+x^2)(1-x^2)} = \frac{-4x}{1-x^4} =\end{aligned}$$

Aufgabe 5.87

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{-2x(1+x^2) - (1-x^2)2x}{(1+x^2)^2} \cdot \frac{1}{\frac{1-x^2}{1+x^2}} \\&= \frac{-2x - 2x^2 - 2x + 2x^2}{(1+x^2)^2} \cdot \frac{1+x^2}{1-x^2} \\&= \frac{-4x}{(1+x^2)(1-x^2)} = \frac{-4x}{1-x^4} = \frac{4x}{x^4-1}\end{aligned}$$

Aufgabe 5.88

$$f(x) = 2^{\sin x}; f'(x) = ?$$

Aufgabe 5.88

$$f'(x) = \cos x \cdot \ln 2 \cdot 2^{\sin x}$$

Aufgabe 5.89

$$f(x) = \sqrt{\frac{4x^2 - 5}{x^2 + 3x}}; f'(x) = ?$$

Aufgabe 5.89

$$f'(x) = \frac{12x^2 + 10x + 15}{(x^2 + 3x)^2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{x^2 + 3x}{4x^2 - 5}}$$

Aufgabe 5.90

$$f(x) = (x - a) \cdot e^{2-x/a}; f'(x) = ?$$

Aufgabe 5.90

$$f'(x) = 1 \cdot e^{2-a^{-1}x} + (x-a)(-a^{-1})e^{2-a^{-1}x}$$

Aufgabe 5.90

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 \cdot e^{2-a^{-1}x} + (x-a)(-a^{-1})e^{2-a^{-1}x} \\ &= 1 \cdot e^{2-a^{-1}x} + (1-a^{-1}x)e^{2-a^{-1}x} \end{aligned}$$

Aufgabe 5.90

$$\begin{aligned}f'(x) &= 1 \cdot e^{2-a^{-1}x} + (x-a)(-a^{-1})e^{2-a^{-1}x} \\&= 1 \cdot e^{2-a^{-1}x} + (1-a^{-1}x)e^{2-a^{-1}x} \\&= (2-a^{-1}x)e^{2-a^{-1}x}\end{aligned}$$

Aufgabe 5.91

$$f(x) = x^2 - 2x + 1; f'''(x)$$

Aufgabe 5.91

$$f'(x) = 2x - 2$$

Aufgabe 5.91

$$f'(x) = 2x - 2$$

$$f''(x) = 2$$

Aufgabe 5.91

$$f'(x) = 2x - 2$$

$$f''(x) = 2$$

$$f'''(x) = 0$$

Aufgabe 5.92

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - \sqrt{2}x + 1; f'''(x)$$

Aufgabe 5.92

$$f'(x) = 3x^2 + 6x - \sqrt{2}$$

Aufgabe 5.92

$$f'(x) = 3x^2 + 6x - \sqrt{2}$$

$$f''(x) = 6x + 6$$

Aufgabe 5.92

$$f'(x) = 3x^2 + 6x - \sqrt{2}$$

$$f''(x) = 6x + 6$$

$$f'''(x) = 6$$

Aufgabe 5.93

$$f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^3; f'''(x)$$

Aufgabe 5.93

$$f'(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2$$

Aufgabe 5.93

$$f'(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2$$

$$f''(x) = 3x^2 - 3x$$

Aufgabe 5.93

$$f'(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2$$

$$f''(x) = 3x^2 - 3x$$

$$f'''(x) = 6x$$

Aufgabe 5.94

$$f(x) = \sin x; f^{(4)}(x)$$

Aufgabe 5.94

$$f'(x) = \cos x$$

Aufgabe 5.94

$$f'(x) = \cos x$$

$$f''(x) = -\sin x$$

Aufgabe 5.94

$$f'(x) = \cos x$$

$$f''(x) = -\sin x$$

$$f'''(x) = -\cos x$$

Aufgabe 5.94

$$f'(x) = \cos x$$

$$f''(x) = -\sin x$$

$$f'''(x) = -\cos x$$

$$f^{(4)}(x) = \sin x$$

Aufgabe 5.95

$$f(x) = e^{-x}; f^{(4)}(x)$$

Aufgabe 5.95

$$f'(x) = -e^{-x}$$

Aufgabe 5.95

$$f'(x) = -e^{-x}$$

$$f''(x) = e^{-x}$$

Aufgabe 5.95

$$f'(x) = -e^{-x}$$

$$f''(x) = e^{-x}$$

$$f'''(x) = -e^{-x}$$

Aufgabe 5.95

$$f'(x) = -e^{-x}$$

$$f''(x) = e^{-x}$$

$$f'''(x) = -e^{-x}$$

$$f^{(4)}(x) = e^{-x}$$

Aufgabe 5.96

$$f(x) = x^3; f^{(4)}(x)$$

Aufgabe 5.96

$$f'(x) = 3x^2$$

Aufgabe 5.96

$$f'(x) = 3x^2$$

$$f''(x) = 6x$$

Aufgabe 5.96

$$f'(x) = 3x^2$$

$$f''(x) = 6x$$

$$f'''(x) = 6$$

Aufgabe 5.96

$$f'(x) = 3x^2$$

$$f''(x) = 6x$$

$$f'''(x) = 6$$

$$f^{(4)}(x) = 0$$

Aufgabe 6.1

Gegeben ist die stückweise definierte Funktion f .

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{falls } x < -5 \\ 4x + 1 & \text{falls } -5 \leq x < 4 \\ 2\sqrt{x} & \text{falls } 4 \leq x \end{cases}$$

Berechne

- (a) $f(0)$ (b) $f(-10)$ (c) $f(4)$ (d) $f(1)$ (e) $f(-5)$

Aufgabe 6.1

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{falls } x < -5 \\ 4x + 1 & \text{falls } -5 \leq x < 4 \\ 2\sqrt{x} & \text{falls } 4 \leq x \end{cases}$$

(a) $f(0) = 4 \cdot 0 + 1 = 1$

Aufgabe 6.1

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{falls } x < -5 \\ 4x + 1 & \text{falls } -5 \leq x < 4 \\ 2\sqrt{x} & \text{falls } 4 \leq x \end{cases}$$

(a) $f(0) = 4 \cdot 0 + 1 = 1$

(b) $f(-10) = (-10)^2 = 100$

Aufgabe 6.1

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{falls } x < -5 \\ 4x + 1 & \text{falls } -5 \leq x < 4 \\ 2\sqrt{x} & \text{falls } 4 \leq x \end{cases}$$

(a) $f(0) = 4 \cdot 0 + 1 = 1$

(b) $f(-10) = (-10)^2 = 100$

(c) $f(4) = 2\sqrt{4} = 4$

Aufgabe 6.1

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{falls } x < -5 \\ 4x + 1 & \text{falls } -5 \leq x < 4 \\ 2\sqrt{x} & \text{falls } 4 \leq x \end{cases}$$

- (a) $f(0) = 4 \cdot 0 + 1 = 1$
- (b) $f(-10) = (-10)^2 = 100$
- (c) $f(4) = 2\sqrt{4} = 4$
- (d) $f(1) = 4 \cdot 1 + 1 = 5$

Aufgabe 6.1

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{falls } x < -5 \\ 4x + 1 & \text{falls } -5 \leq x < 4 \\ 2\sqrt{x} & \text{falls } 4 \leq x \end{cases}$$

(a) $f(0) = 4 \cdot 0 + 1 = 1$

(b) $f(-10) = (-10)^2 = 100$

(c) $f(4) = 2\sqrt{4} = 4$

(d) $f(1) = 4 \cdot 1 + 1 = 5$

(e) $f(-5) = 4 \cdot (-5) + 1 = -19$

Aufgabe 6.2

Ist die Funktion $f(x) = 4x + 3$ an der Stelle $x_0 = 0$ stetig?

Aufgabe 6.2

Ja, da alle Polynomfunktionen stetig sind.

Aufgabe 6.3

Ist die Funktion $f(x) = \sqrt{x^2}$ an der Stelle $x_0 = 0$ stetig?

Aufgabe 6.3

Ja, denn

- ▶ $f(0) = \sqrt{0^2} = 0$
- ▶ $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0$

Aufgabe 6.4

Ist die Funktion $f(x) = 1/(x + 1)$ an der Stelle $x_0 = -1$ stetig?

Aufgabe 6.4

Nein, da

- ▶ $f(-1) = 1/(-1 + 1) = 1/0$ nicht definiert ist

Aufgabe 6.5

Ist die Funktion $f(x) = |\sin x|$ an der Stelle $x_0 = \pi$ stetig?

Aufgabe 6.5

Ja, denn es handelt sich um eine Verkettung zweier stetiger Funktionen.

Aufgabe 6.6

Ist die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 4x - 5 & \text{für } x \leq 3 \\ 2x + 1 & \text{für } x > 3 \end{cases}$$

an der Stelle $x_0 = 3$ stetig?

Aufgabe 6.6

Ja, denn

► $f(3) = 4 \cdot 3 - 5 = 7$

Aufgabe 6.6

Ja, denn

$$\blacktriangleright f(3) = 4 \cdot 3 - 5 = 7$$

$$\blacktriangleright \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} 4x - 5 = 7$$

Aufgabe 6.6

Ja, denn

$$\blacktriangleright f(3) = 4 \cdot 3 - 5 = 7$$

$$\blacktriangleright \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} 4x - 5 = 7$$

$$\blacktriangleright \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} (2x + 1) = 7$$

Aufgabe 6.7

Ist die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x - 1} & \text{für } x \neq 1 \\ 2 & \text{sonst} \end{cases}$$

an der Stelle $x_0 = 1$ stetig?

Aufgabe 6.7

Ja, denn

► $f(1) = 2$

Aufgabe 6.7

Ja, denn

► $f(1) = 2$

► $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$

Aufgabe 6.7

Ja, denn

► $f(1) = 2$

► $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1}$

Aufgabe 6.7

Ja, denn

► $f(1) = 2$

► $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1)$

Aufgabe 6.7

Ja, denn

► $f(1) = 2$

► $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) = 2$

Aufgabe 6.8

Ist die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

an der Stelle $x_0 = 0$ stetig?

Aufgabe 6.8

Nein, denn

► $f(0) = 0$

Aufgabe 6.8

Nein, denn

► $f(0) = 0$

► $\lim_{x \rightarrow 0^-} e^{-1/x} = e^{\infty} = \infty$

Aufgabe 6.9

Ist die Funktion $f(x) = 1/x$ stetig?

Aufgabe 6.9

f ist stetig auf dem ganzen Definitionsbereich $(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ stetig.

Aufgabe 6.10

Ist die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} x/7 + 1 & \text{für } x < 3 \\ \sqrt{x-1} & \text{für } x \geq 3 \end{cases}$$

stetig?

Aufgabe 6.10

Die Funktion f ist nicht stetig an der Stelle $x = 3$

Aufgabe 6.11

Für welchen Wert von a ist die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 + 3x + 1 & \text{für } x < 2 \\ x^3 + ax - 4 & \text{für } x \geq 2 \end{cases}$$

an der Stelle $x_0 = 2$ stetig?

Aufgabe 6.11

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$$

Aufgabe 6.11

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} (2x^2 + 3x + 1) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x^3 + ax - 4)$$

Aufgabe 6.11

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} (2x^2 + 3x + 1) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x^3 + ax - 4)$$

$$8 + 6 + 1 = 8 + 2a - 4$$

Aufgabe 6.11

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} (2x^2 + 3x + 1) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x^3 + ax - 4)$$

$$8 + 6 + 1 = 8 + 2a - 4$$

$$11 = 2a$$

Aufgabe 6.11

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} (2x^2 + 3x + 1) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x^3 + ax - 4)$$

$$8 + 6 + 1 = 8 + 2a - 4$$

$$11 = 2a$$

$$a = 5.5$$

Aufgabe 6.12

Ist die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} e^x & \text{für } x \leq 0 \\ x + 1 & \text{für } x > 0 \end{cases}$$

f an der Stelle $x_0 = 0$ differenzierbar?

Aufgabe 6.12

Ist f an der Stelle $x = 0$ stetig?

Aufgabe 6.12

Ist f an der Stelle $x = 0$ stetig?

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$$

Aufgabe 6.12

Ist f an der Stelle $x = 0$ stetig?

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} e^x$$

Aufgabe 6.12

Ist f an der Stelle $x = 0$ stetig?

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} e^x = 1$$

Aufgabe 6.12

Ist f an der Stelle $x = 0$ stetig?

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} e^x = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$$

Aufgabe 6.12

Ist f an der Stelle $x = 0$ stetig?

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} e^x = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x + 1)$$

Aufgabe 6.12

Ist f an der Stelle $x = 0$ stetig?

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} e^x = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x + 1) = 1$$

Aufgabe 6.12

Ist f an der Stelle $x = 0$ stetig?

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} e^x = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x + 1) = 1$$

$$f(0) = 1$$

Aufgabe 6.12

Ist f an der Stelle $x = 0$ stetig?

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} e^x = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x + 1) = 1$$

$$f(0) = 1 \quad (\text{ok})$$

Aufgabe 6.12

Ist f an der Stelle $x = 0$ stetig?

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} e^x = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x + 1) = 1$$

$$f(0) = 1 \quad (\text{ok})$$

Ist f an der Stelle $x = 0$ differenzierbar?

Aufgabe 6.12

Ist f an der Stelle $x = 0$ stetig?

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} e^x = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x + 1) = 1$$

$$f(0) = 1 \quad (\text{ok})$$

Ist f an der Stelle $x = 0$ differenzierbar?

$$x \leq 0: f'(x) = e^x$$

Aufgabe 6.12

Ist f an der Stelle $x = 0$ stetig?

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} e^x = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x + 1) = 1$$

$$f(0) = 1 \quad (\text{ok})$$

Ist f an der Stelle $x = 0$ differenzierbar?

$$x \leq 0: f'(x) = e^x \quad \Rightarrow$$

Aufgabe 6.12

Ist f an der Stelle $x = 0$ stetig?

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} e^x = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x + 1) = 1$$

$$f(0) = 1 \quad (\text{ok})$$

Ist f an der Stelle $x = 0$ differenzierbar?

$$x \leq 0: f'(x) = e^x \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} e^x = 1$$

Aufgabe 6.12

Ist f an der Stelle $x = 0$ stetig?

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} e^x = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x + 1) = 1$$

$$f(0) = 1 \quad (\text{ok})$$

Ist f an der Stelle $x = 0$ differenzierbar?

$$x \leq 0: f'(x) = e^x \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} e^x = 1$$

$$x > 0: f'(x) = 1$$

Aufgabe 6.12

Ist f an der Stelle $x = 0$ stetig?

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} e^x = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x + 1) = 1$$

$$f(0) = 1 \quad (\text{ok})$$

Ist f an der Stelle $x = 0$ differenzierbar?

$$x \leq 0: f'(x) = e^x \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} e^x = 1$$

$$x > 0: f'(x) = 1 \quad \Rightarrow$$

Aufgabe 6.12

Ist f an der Stelle $x = 0$ stetig?

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} e^x = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x + 1) = 1$$

$$f(0) = 1 \quad (\text{ok})$$

Ist f an der Stelle $x = 0$ differenzierbar?

$$x \leq 0: f'(x) = e^x \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} e^x = 1$$

$$x > 0: f'(x) = 1 \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 = 1$$

Aufgabe 6.12

Ist f an der Stelle $x = 0$ stetig?

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} e^x = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x + 1) = 1$$

$$f(0) = 1 \quad (\text{ok})$$

Ist f an der Stelle $x = 0$ differenzierbar?

$$x \leq 0: f'(x) = e^x \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} e^x = 1$$

$$x > 0: f'(x) = 1 \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 = 1 \quad (\text{ok})$$

Aufgabe 6.12

Ist f an der Stelle $x = 0$ stetig?

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} e^x = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x + 1) = 1$$

$$f(0) = 1 \quad (\text{ok})$$

Ist f an der Stelle $x = 0$ differenzierbar?

$$x \leq 0: f'(x) = e^x \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} e^x = 1$$

$$x > 0: f'(x) = 1 \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 = 1 \quad (\text{ok})$$

$\Rightarrow f$ an der Stelle $x = 0$ differenzierbar.

Aufgabe 6.13

Bestimme die Werte der Parameter $a \in \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{R}$ so, dass die Funktion f an der Stelle $x = 4$ differenzierbar ist.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + bx + a & \text{für } x < 4 \\ a\sqrt{x} + b & \text{für } x \geq 4 \end{cases}$$

Aufgabe 6.13

Die Funktionswerte der Teilfunktionen müssen an der Stelle $x = 4$ übereinstimmen:

$$f(4) = \lim_{x \rightarrow 4^-} f(x)$$

$$2a + b = 16 + 4b + a$$

$$a - 3b = 16$$

Die Steigungen der Teilfunktionen müssen an der Stelle $x = 4$ übereinstimmen:

$$\text{für } x < 4 \text{ gilt: } f'(x) = 2x + b$$

$$\text{für } x \geq 4 \text{ gilt: } f'(x) = \frac{a}{2\sqrt{x}}$$

$$f'(4) = \lim_{x \rightarrow 4^-} f'(x)$$

$$a/4 = 8 + b$$

$$a = 32 + 4b$$

$$a - 4b = 32$$

Das Gleichungssystem $\begin{cases} a - 3b = 16 \\ a - 4b = 32 \end{cases}$ hat die Lösung $a = -32$,
 $b = -16$

Differenzialrechnung (Kapitel 7)

Monotonie

Aufgabe 7.1

Untersuche das Monotonieverhalten der Funktion $f(x) = x^2$ auf dem Intervall $I = (-\infty, 0]$.

Aufgabe 7.1

$f(x) = x^2$ ist in $I = (-\infty, 0]$ monoton fallend, da $f'(x) = 2x < 0$ für alle $x \in I$

Aufgabe 7.2

Untersuche, ob die Funktion $f(x) = \sqrt{x}$ auf dem Intervall $I = (0, \infty)$ monoton wachsend, monoton fallend oder nicht monoton ist.

Aufgabe 7.2

$f(x) = \sqrt{x}$ ist in $I = (0, \infty)$ monoton wachsend, da
 $f'(x) = 1/2\sqrt{x} > 0$ für alle $x \in I$

Aufgabe 7.3

Untersuche, ob die Funktion $f(x) = 1/x$ auf dem Intervall $I = (-\infty, 0)$ monoton wachsend, monoton fallend oder nicht monoton ist.

Aufgabe 7.3

$f(x) = 1/x$ ist in $I = (-\infty, 0)$ monoton fallend, da $f'(x) = -1/x^2$ für alle $x \in I$.

Aufgabe 7.4

Untersuche, ob die Funktion $f(x) = x^3$ auf dem Intervall $I = \mathbb{R}$ monoton wachsend, monoton fallend oder nicht monoton ist.

Aufgabe 7.4

$f(x) = x^3$ ist in $I = \mathbb{R}$ monoton wachsend, da $f'(x) = 3x^2 > 0$ für alle $x \in I$

Aufgabe 7.5

Untersuche, ob die Funktion $f(x) = \sin x$ auf dem Intervall $I = [\pi, 2\pi]$ monoton wachsend, monoton fallend oder nicht monoton ist.

Aufgabe 7.5

$f(x) = \sin x$ ist in $I = [\pi, 2\pi]$ nicht monoton, da $f'(x) = \cos x$ in I sowohl positive wie auch negative Werte annimmt.

Aufgabe 7.6

Untersuche, ob die Funktion $f(x) = -2x$ auf dem angegebenen Intervall $I = \mathbb{R}$ monoton wachsend, monoton fallend oder nicht monoton ist.

Aufgabe 7.6

f ist monoton fallend in $I = \mathbb{R}$, da $f'(x) = -2 < 0$ für alle $x \in I$.

Aufgabe 7.7

Untersuche, ob die Funktion $f(x) = e^x + e^{-x}$ auf dem angegebenen Intervall $I = \mathbb{R}$ monoton wachsend, monoton fallend oder nicht monoton ist.

Aufgabe 7.7

f ist nicht monoton in $I = \mathbb{R}$, da $f'(x) = e^x - e^{-x}$ positiv für $x > 0$ und negativ für $x < 0$.

Aufgabe 7.8

Untersuche, ob die Funktion $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 - 5x - 29$ auf dem Intervall $I = [1, 3]$ monoton wachsend, monoton fallend oder nicht monoton ist.

Aufgabe 7.8

f ist monoton fallend in $I = [1, 3]$, da

$$f'(x) = x^2 - 4x - 5 = (x + 1)(x - 5) < 0 \text{ für alle } x \in I$$

Aufgabe 7.9

Untersuche, ob die Funktion $f(x) = \ln x$ auf dem Intervall $I = (0, \infty)$ monoton wachsend, monoton fallend oder nicht monoton ist.

Aufgabe 7.9

$f(x) = \ln x$ ist monoton wachsend in $I = (0, \infty)$, da $f'(x) = \frac{1}{x} > 0$
für alle $x \in I$

Aufgabe 7.10

Bestimme die Intervalle, in denen die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 6x - 3$$

monoton wachsend bzw. monoton fallend ist.

Aufgabe 7.10

$$f'(x) = x^2 + x - 6 = (x - 2)(x + 3)$$

Aufgabe 7.10

$$f'(x) = x^2 + x - 6 = (x - 2)(x + 3)$$

horizontale Tangente bei: $x_1 = 2$, $x_2 = -3$

Aufgabe 7.10

$$f'(x) = x^2 + x - 6 = (x - 2)(x + 3)$$

horizontale Tangente bei: $x_1 = 2$, $x_2 = -3$

Vorzeichentabelle:

	$-\infty < x < -3$	$-3 < x < 2$	$2 < x < \infty$
$x + 3$	-	+	+
$x - 2$	-	-	+
$f'(x)$	+	-	+
$f(x)$			

Aufgabe 7.11

Bestimme die Intervalle, in denen die Funktion

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$$

monoton wachsend bzw. monoton fallend ist.

Aufgabe 7.11

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 12 = 3(x^2 - 4x + 4) = 3(x - 2)^2$$

Aufgabe 7.11

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 12 = 3(x^2 - 4x + 4) = 3(x - 2)^2$$

horizontale Tangente bei: $x_1 = x_2 = 2$

Aufgabe 7.11

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 12 = 3(x^2 - 4x + 4) = 3(x - 2)^2$$

horizontale Tangente bei: $x_1 = x_2 = 2$

Vorzeichentabelle:

	$-\infty < x < 2$	$2 < x < \infty$
$x - 2$	-	+
$x - 2$	-	+
$f'(x)$	+	+
$f(x)$	$\nearrow$	$\nearrow$

Aufgabe 7.12

Bestimme die Intervalle, in denen die Funktion

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 4$$

monoton wachsend bzw. monoton fallend ist.

Aufgabe 7.12

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x^2 - 2x - 3) = 3(x + 1)(x - 3)$$

Aufgabe 7.12

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x^2 - 2x - 3) = 3(x + 1)(x - 3)$$

horizontale Tangente bei: $x_1 = -1$, $x_2 = 3$

Aufgabe 7.12

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x^2 - 2x - 3) = 3(x + 1)(x - 3)$$

horizontale Tangente bei: $x_1 = -1$, $x_2 = 3$

	$-\infty < x < -1$	$-1 < x < 3$	$3 < x < \infty$
$x + 1$	-	+	+
$x - 3$	-	-	+
$f'(x)$	+	-	+
$f(x)$			

Aufgabe 7.13

Bestimme die Intervalle, in denen die Funktion

$$f(x) = x + \cos x$$

monoton wachsend bzw. monoton fallend ist.

Aufgabe 7.13

$$f'(x) = 1 - \sin x$$

Aufgabe 7.13

$$f'(x) = 1 - \sin x$$

Stellen mit horizontaler Tangente: $x_k = k \cdot \pi$, $k \in \mathbb{Z}$

Aufgabe 7.13

$$f'(x) = 1 - \sin x$$

Stellen mit horizontaler Tangente: $x_k = k \cdot \pi$, $k \in \mathbb{Z}$

Wegen $-1 \leq \sin x < 1$ gilt $f'(x) = 1 - \sin x \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 7.13

$$f'(x) = 1 - \sin x$$

Stellen mit horizontaler Tangente: $x_k = k \cdot \pi$, $k \in \mathbb{Z}$

Wegen $-1 \leq \sin x < 1$ gilt $f'(x) = 1 - \sin x \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

f ist auf ganz $\mathbb{R}$ monoton wachsend.

Untersuche, ob die Funktion gerade, ungerade oder weder gerade noch ungerade ist.

Aufgabe 8.1

$$f(x) = x^3$$

Aufgabe 8.1

$$f(x) = x^3$$

$$f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$$

$$\Rightarrow f(-x) = -f(x) \quad \forall x \in D_f$$

$\Rightarrow f$ ist ungerade

Aufgabe 8.2

$$f(x) = -x^2$$

Aufgabe 8.2

$$f(x) = -x^2$$

$$f(-x) = -(-x)^2 = -x^2 = f(x)$$

$$\Rightarrow f(-x) = f(x) \quad \forall x \in D_f$$

$\Rightarrow f$ ist gerade

Aufgabe 8.3

$$f(x) = 1$$

Aufgabe 8.3

$$f(x) = 1$$

$$f(-x) = 1 = f(x)$$

$$\Rightarrow f(-x) = f(x) \quad \forall x \in D_f$$

$\Rightarrow f$ ist gerade

Aufgabe 8.4

$$f(x) = -7$$

Aufgabe 8.4

$$f(x) = -7$$

$$f(-x) = -7 = f(x)$$

$$\Rightarrow f(-x) = f(x) \quad \forall x \in D_f$$

$\Rightarrow f$ ist gerade

Aufgabe 8.5

$$f(x) = 0$$

Aufgabe 8.5

$$f(x) = 0$$

$$f(-x) = 0 = f(x) \text{ und } f(-x) = 0 = -0 = -f(x)$$

$$\Rightarrow f(-x) = f(x) \quad \forall x \in D_f$$

$$f(-x) = -f(x) \quad \forall x \in D_f$$

$\Rightarrow f$ ist gerade *und* ungerade

Aufgabe 8.6

$$f(x) = 3x^8$$

Aufgabe 8.6

$$f(x) = 3x^8$$

$$f(-x) = 3(-x)^8 = 3x^8 = f(x)$$

$$\Rightarrow f(-x) = f(x) \quad \forall x \in D_f$$

$\Rightarrow f$ ist gerade

Aufgabe 8.7

$$f(x) = x^7 \cdot x^5$$

Aufgabe 8.7

$$f(x) = x^7 \cdot x^5$$

$$f(-x) = (-x)^7 \cdot (-x)^5 = (-x^7) \cdot (-x^5) = x^7 \cdot x^5 = f(x)$$

$$\text{oder schneller: } f(x) = x^7 \cdot x^5 = x^{12} \text{ und } f(-x) = (-x)^{12} = x^{12}$$

$$\Rightarrow f(-x) = f(x) \quad \forall x \in D_f$$

$\Rightarrow f$ ist gerade

gerade

Aufgabe 8.8

$$f(x) = x^6 \cdot x^3$$

Aufgabe 8.8

$$f(x) = x^6 \cdot x^3 = x^9$$

$$f(-x) = (-x)^9 = -x^9 = -f(x)$$

$$\Rightarrow f(-x) = -f(x) \quad \forall x \in D_f$$

$\Rightarrow f$ ist ungerade

Aufgabe 8.9

$$f(x) = \frac{1}{x^3}$$

Aufgabe 8.9

$$f(x) = \frac{1}{x^3}$$

$$f(-x) = \frac{1}{(-x)^3} = \frac{1}{-x^3} = -\frac{1}{x^3} = -f(x)$$

$$\Rightarrow f(-x) = -f(x) \quad \forall x \in D_f$$

$\Rightarrow f$ ist ungerade

Aufgabe 8.10

$$f(x) = 7x^{-2}$$

Aufgabe 8.10

$$f(x) = 7x^{-2}$$

$$f(-x) = 7(-x)^{-2} = 7x^{-2} = f(x)$$

$$\Rightarrow f(-x) = f(x) \quad \forall x \in D_f$$

$\Rightarrow f$ ist gerade

Aufgabe 8.11

$$f(x) = (x^{-3})^5$$

Aufgabe 8.11

$$f(x) = (x^{-3})^5 = x^{-15}$$

$$f(-x) = (-x)^{-15} = -x^{-15} = -f(x)$$

$$\Rightarrow f(-x) = -f(x) \quad \forall x \in D_f$$

$\Rightarrow f$ ist ungerade

Aufgabe 8.12

$$f(x) = \frac{2}{x^7}$$

Aufgabe 8.12

$$f(x) = \frac{2}{x^7}$$

$$f(-x) = \frac{2}{(-x)^7} = \frac{2}{-x^7} = -\frac{2}{x^7} = -f(x)$$

$$\Rightarrow f(-x) = -f(x) \quad \forall x \in D_f$$

$\Rightarrow f$ ist ungerade

ungerade

Aufgabe 8.13

$$f(x) = -x^{-8}$$

Aufgabe 8.13

$$f(x) = -x^{-8}$$

$$f(-x) = -(-x)^{-8} = -x^{-8} = f(x)$$

$$\Rightarrow f(-x) = f(x) \quad \forall x \in D_f$$

$\Rightarrow f$ ist gerade

Aufgabe 8.14

$$f(x) = x^4 \cdot x^{-4}$$

Aufgabe 8.14

$$f(x) = x^4 \cdot x^{-4} = x^0 = 1$$

$$f(-x) = 1 = f(x)$$

$$\Rightarrow f(-x) = f(x) \quad \forall x \in D_f$$

$\Rightarrow f$ ist gerade

Aufgabe 8.15

$$f(x) = x - 1$$

Aufgabe 8.15

$$f(x) = x - 1$$

$$f(-x) = -x - 1$$

Offenbar lässt sich der Term $f(-x)$ weder durch $f(x)$ noch durch $f(-x)$ *allgemein* (d. h. für alle x) darstellen. Das bedeutet aber, dass es (mindestens) ein Argument x geben muss, das weder die Gleichung $f(-x) = f(x)$ noch die Gleichung $f(-x) = -f(x)$ erfüllt. Eine solche Zahl ist schnell gefunden:

$$f(1) = 1 - 1 = 0$$

$$f(-1) = -1 - 1 = -2$$

(Das funktioniert übrigens auch mit jeder anderen Zahl ausser 0)

$\Rightarrow f(-x) \neq f(x)$ und $f(-x) \neq -f(x)$ für mindestens ein $x \in D_f$

$\Rightarrow f$ ist weder gerade noch ungerade

Aufgabe 8.16

$$f(x) = 4x^3 + 1$$

Aufgabe 8.16

$$f(x) = 4x^3 + 1$$

$$f(-x) = 4(-x)^3 + 1 = -4x^3 + 1$$

Offenbar lässt sich der Term $f(-x)$ weder durch $f(x)$ noch durch $f(-x)$ *allgemein* (d. h. für alle x) darstellen. Das bedeutet aber, dass es (mindestens) ein Argument x geben muss, das weder die Gleichung $f(-x) = f(x)$ noch die Gleichung $f(-x) = -f(x)$ erfüllt. Eine solche Zahl ist schnell gefunden:

$$f(1) = 4 \cdot 1^3 - 1 = 3$$

$$f(-1) = 4 \cdot (-1)^3 - 1 = -5$$

$\Rightarrow f(-x) \neq f(x)$ und $f(-x) \neq -f(x)$ für mindestens ein $x \in D_f$

$\Rightarrow f$ ist weder gerade noch ungerade

Aufgabe 8.17

$$f(x) = 4x^8 + 3x^4 - 2x^2$$

Aufgabe 8.17

$$f(x) = 4x^8 + 3x^4 - 2x^2$$

$$f(-x) = 4(-x)^8 + 3(-x)^4 - 2(-x)^2 = 4x^8 + 3x^4 - 2x^2 = f(x)$$

$$\Rightarrow f(-x) = f(x) \quad \forall x \in D_f$$

$\Rightarrow f$ ist gerade

Aufgabe 8.18

$$f(x) = x^9 - \frac{1}{2}x^7$$

Aufgabe 8.18

$$f(x) = x^9 - \frac{1}{2}x^7$$

$$f(-x) = (-x)^9 - \frac{1}{2}(-x)^7 = -x^9 + \frac{1}{2}x^7 = -(x^9 - \frac{1}{2}x^7) = -f(x)$$

$$\Rightarrow f(-x) = -f(x) \quad \forall x \in D_f$$

$\Rightarrow f$ ist ungerade

Aufgabe 8.19

$$f(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$$

Aufgabe 8.19

$$f(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$$

Summen aus geraden und ungeraden Funktionen sind weder gerade noch ungerade. Gegenbeispiel:

$$f(1) = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 5$$

$$f(-1) = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 = 1$$

$\Rightarrow f(-x) \neq f(x)$ und $f(-x) \neq -f(x)$ für mindestens ein $x \in D_f$

$\Rightarrow f$ ist weder gerade noch ungerade

Aufgabe 8.20

$$f(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}$$

Aufgabe 8.20

$$f(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}$$

Summen aus geraden und ungeraden Funktionen sind weder gerade noch ungerade. Gegenbeispiel:

$$f(1) = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{1} = 1 + 1 = 2$$

$$f(-1) = \frac{1}{(-1)^2} + \frac{1}{-1} = 1 - 1 = 0$$

$\Rightarrow f(-x) \neq f(x)$ und $f(-x) \neq -f(x)$ für mindestens ein $x \in D_f$

$\Rightarrow f$ ist weder gerade noch ungerade

Aufgabe 8.21

$$f(x) = x^4 - x^{-2}$$

Aufgabe 8.21

$$f(x) = x^4 - x^{-2}$$

$$f(-x) = (-x)^4 - (-x)^{-2} = x^4 - x^{-2} = f(x)$$

$$\Rightarrow f(-x) = f(x) \quad \forall x \in D_f$$

$\Rightarrow f$ ist gerade

Aufgabe 8.22

$$f(x) = 3x^5 - 4x^3 + x - 3$$

Aufgabe 8.22

$$f(x) = 3x^5 - 4x^3 + x - 3$$

Summen aus geraden und ungeraden Funktionen sind weder gerade noch ungerade. Gegenbeispiel:

$$f(2) = 3 \cdot 2^5 - 4 \cdot 2^3 + 2 - 3 = 96 - 32 + 2 - 3 = 63$$

$$f(-2) = 3 \cdot (-2)^5 - 4 \cdot (-1)^3 + (-1) - 3 = -96 + 32 - 2 - 3 = -69$$

(etwas „gemein“: $x = 1$ funktioniert hier ausnahmsweise nicht)

$$\Rightarrow f(-x) \neq f(x) \text{ und } f(-x) \neq -f(x) \text{ f\"ur mindestens ein } x \in D_f$$

$$\Rightarrow f \text{ ist weder gerade noch ungerade}$$

Aufgabe 8.23

$$f(x) = \sin x$$

Aufgabe 8.23

$$f(x) = \sin(x)$$

$$f(-x) = \sin(-x) = -\sin(x) = -f(x)$$

$$\Rightarrow f(-x) = -f(x) \quad \forall x \in D_f$$

$\Rightarrow f$ ist ungerade

Aufgabe 8.24

$$f(x) = \cos(x)$$

Aufgabe 8.24

$$f(x) = \cos(x)$$

$$f(-x) = \cos(-x) = \cos(x) = f(x)$$

$$\Rightarrow f(-x) = f(x) \quad \forall x \in D_f$$

$\Rightarrow f$ ist gerade

Aufgabe 8.25

$$f(x) = \tan(x)$$

Aufgabe 8.25

$$f(x) = \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

$$f(-x) = \tan(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-\sin(x)}{\cos(x)} = -\frac{\sin(x)}{\cos(x)} = -\tan(x)$$

$$\Rightarrow f(-x) = -f(x) \quad \forall x \in D_f$$

$\Rightarrow f$ ist ungerade

Aufgabe 8.26

$$f(x) = \sqrt{x}$$

Aufgabe 8.26

$$f(x) = \sqrt{x}$$

Die Wurzelfunktion hat keine Werte für negative Argumente.

$$f(1) = \sqrt{1} = 1$$

$$f(-1) = \sqrt{-1} \text{ ist nicht definiert}$$

$\Rightarrow f$ ist weder gerade noch ungerade

Aufgabe 8.27

$$f(x) = e^x$$

Aufgabe 8.27

$$f(x) = e^x$$

$$f(-x) = e^{-x}$$

Das sieht nicht nach einer Symmetrieeigenschaft aus. Gegenbeispiel:

$$f(1) = e^1 = e \approx 2.718 \dots$$

$$f(-1) = e^{-1} = 1/e \approx 0.367 \dots$$

$\Rightarrow f(-x) \neq f(x)$ und $f(-x) \neq -f(x)$ für mindestens ein $x \in D_f$

$\Rightarrow f$ ist weder gerade noch ungerade

Aufgabe 8.28

$$f(x) = \ln(x)$$

Aufgabe 8.28

$$f(x) = \ln(x)$$

Der natürliche Logarithmus hat keine Werte für negative Argumente.

$$f(1) = \ln(1) = 0$$

$f(-1) = \ln(-1)$ ist nicht definiert

$\Rightarrow f$ ist weder gerade noch ungerade

Aufgabe 8.29

$$f(x) = |x|$$

Aufgabe 8.29

$$f(x) = |x|$$

$$f(-x) = |-x| = |x| = f(x)$$

$$\Rightarrow f(-x) = f(x) \quad \forall x \in D_f$$

$\Rightarrow f$ ist gerade

Aufgabe 8.30

$$f(x) = |x^3| + 1$$

Aufgabe 8.30

$$f(x) = |x^3| + 1$$

$$f(-x) = |(-x)^3| + 1 = |-x^3| + 1 = |x^3| + 1 = f(x)$$

$$\Rightarrow f(-x) = f(x) \quad \forall x \in D_f$$

$\Rightarrow f$ ist gerade

Aufgabe 8.31

$$f(x) = \sqrt{|x|}$$

Aufgabe 8.31

$$f(x) = \sqrt{|x|}$$

$$f(-x) = \sqrt{|-x|} = \sqrt{|x|} = f(x)$$

$$\Rightarrow f(-x) = f(x) \quad \forall x \in D_f$$

$\Rightarrow f$ ist gerade

Aufgabe 8.32

$$f(x) = |x^3| + \sin(x)$$

Aufgabe 8.32

$$f(x) = |x^3| + \sin(x)$$

$$f(x) = |(-x)^3| + \sin(-x) = |x^3| - \sin(x)$$

f ist Summe aus einer geraden und einer ungeraden Funktion.

$$f(1) = |1^3| + \sin(1) = 1 + \sin(1) \approx 1.84$$

$$f(-1) = |(-1)^3| + \sin(-1) = 1 - \sin(1) \approx 0.158$$

$\Rightarrow f(-x) \neq f(x)$ und $f(-x) \neq -f(x)$ für mindestens ein $x \in D_f$

$\Rightarrow f$ ist weder gerade noch ungerade

Aufgabe 8.33

$$f(x) = e^x + e^{-x}$$

Aufgabe 8.33

$$f(x) = e^x + e^{-x}$$

$$f(-x) = e^{-x} + e^{-(-x)} = e^{-x} + e^x = e^x + e^{-x} = f(x)$$

$$\Rightarrow f(-x) = f(x) \quad \forall x \in D_f$$

$\Rightarrow f$ ist gerade

Aufgabe 8.34

$$f(x) = \sin(x) \cdot \cos(x)$$

Aufgabe 8.34

$$f(x) = \sin(x) \cdot \cos(x)$$

$$f(-x) = \sin(-x) \cdot \cos(-x) = -\sin(x) \cdot \cos(x) = -f(x)$$

$$\Rightarrow f(-x) = -f(x) \quad \forall x \in D_f$$

$\Rightarrow f$ ist ungerade

Aufgabe 8.35

$$f(x) = x|x^3|$$

Aufgabe 8.35

$$f(x) = x|x^3|$$

$$f(-x) = (-x) \cdot |(-x)^3| = -x \cdot |-x^3| = -x \cdot |x^3| = f(x)$$

$$\Rightarrow f(-x) = -f(x) \quad \forall x \in D_f$$

$\Rightarrow f$ ist ungerade

Aufgabe 8.36

$$f(x) = x \cdot \sin(x)$$

Aufgabe 8.36

$$f(x) = x \cdot \sin(x)$$

$$f(-x) = (-x) \cdot \sin(-x) = -x \cdot (-\sin(x)) = x \cdot \sin(x) = f(x)$$

$$\Rightarrow f(-x) = f(x) \quad \forall x \in D_f$$

$\Rightarrow f$ ist gerade

Aufgabe 8.37

$$f(x) = \sin^2 x \cdot \cos x$$

Aufgabe 8.37

$$f(x) = \sin^2 x \cdot \cos x = \sin(x)^2 \cdot \cos(x)$$

$$\begin{aligned} f(-x) &= \sin(-x)^2 \cdot \cos(-x) = (-\sin(x))^2 \cdot \cos(x) \\ &= \sin(x)^2 \cdot \cos(x) = f(x) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f(-x) = f(x) \quad \forall x \in D_f$$

$\Rightarrow f$ ist gerade

Aufgabe 8.38

$$f(x) = \ln(|x|) + \cos(x) + x^6$$

Aufgabe 8.38

$$f(x) = \ln(|x|) + \cos(x) + x^6$$

$$f(-x) = \ln(|-x|) + \cos(-x) + (-x)^6 = \ln(|x|) + \cos(x) + x^6 = f(x)$$

$$\Rightarrow f(-x) = f(x) \quad \forall x \in D_f$$

$\Rightarrow f$ ist gerade

Aufgabe 8.39

$$f(x) = e^{x^2} - x$$

Aufgabe 8.39

$$f(x) = e^{x^2} - x$$

$$f(-x) = e^{(-x)^2} - (-x) = e^{x^2} + x$$

f ist die Summe einer geraden und einer ungeraden Funktion.

$$f(1) = e^{1^2} - 1 = e - 1 \approx 2.71828 \dots$$

$$f(-1) = e^{(-1)^2} + 1 = e + 1 \approx 3.71828 \dots$$

$\Rightarrow f(-x) \neq f(x)$ und $f(-x) \neq -f(x)$ für mindestens ein $x \in D_f$

$\Rightarrow f$ ist weder gerade noch ungerade

Aufgabe 8.40

$$f(x) = (x + 1)^2$$

Aufgabe 8.40

$$f(x) = (x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$$

$$f(-x) = (-x)^2 + 2(-x) + 1 = x^2 - 2x + 1$$

f ist die Summe aus geraden und ungeraden Funktionen.

$$f(1) = (1 + 1)^2 = 2^2 = 4$$

$$f(-1) = (-1 + 1)^2 = 0^2 = 0$$

$\Rightarrow x \in D_f$ mit $f(-x) \neq f(x)$ und $f(-x) \neq -f(x)$ für mindestens ein $x \in D_f$

$\Rightarrow f$ ist weder gerade noch ungerade

Aufgabe 8.41

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$$

Aufgabe 8.41

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$$

$$f(-x) = \sqrt{(-x)^2 + 1} = \sqrt{x^2 + 1} = f(x)$$

$$\Rightarrow f(-x) = f(x) \quad \forall x \in D_f$$

$\Rightarrow f$ ist gerade

Aufgabe 8.42

$$f(x) = (x + 1)(x + 3)(x - 4)$$

Aufgabe 8.42

$$f(x) = (x + 1)(x + 3)(x - 4)$$

Vermutung: f ist weder gerade noch ungerade

$$f(1) = (1 + 1)(1 + 3)(1 - 4) = 2 \cdot 4 \cdot (-3) = -24$$

$$f(-1) = (-1 + 1)(-1 + 3)(-1 - 4) = 0 \cdot 2 \cdot (-5) = 0$$

$\Rightarrow f(-x) \neq f(x)$ und $f(-x) \neq -f(x)$ für mindestens ein $x \in D_f$

$\Rightarrow f$ ist weder gerade noch ungerade

Aufgabe 8.43

$$f(x) = |x^3 + x^2 + x|$$

Aufgabe 8.43

$$f(x) = |x^3 + x^2 + x|$$

Vermutung: f ist weder gerade noch ungerade

$$f(1) = |1^3 + 1^2 + 1| = |3| = 3$$

$$f(-1) = |(-1)^3 + (-1)^2 + 1| = |-1 + 1 + 1| = |1| = 1$$

$\Rightarrow f(-x) \neq f(x)$ und $f(-x) \neq -f(x)$ für mindestens ein $x \in D_f$

$\Rightarrow f$ ist weder gerade noch ungerade

Aufgabe 8.44

$$f(x) = \frac{x}{x^4 + x^2}$$

Aufgabe 8.44

$$f(x) = \frac{x}{x^4 + x^2}$$

$$f(-x) = \frac{-x}{(-x)^4 + (-x)^2} = \frac{-x}{x^4 + x^2} = -\frac{x}{x^4 + x^2} = -f(x)$$

$$\Rightarrow f(-x) = -f(x) \quad \forall x \in D_f$$

$\Rightarrow f$ ist ungerade

Aufgabe 8.45

$$f(x) = (x^2 + 1)^5$$

Aufgabe 8.45

$$f(x) = (x^2 + 1)^5$$

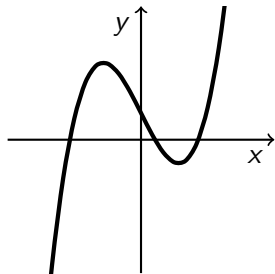
$$f(-x) = ((-x)^2 + 1)^5 = (x^2 + 1)^5 = f(x)$$

$$\Rightarrow f(-x) = f(x) \quad \forall x \in D_f$$

$\Rightarrow f$ ist gerade

Aufgabe 9.1

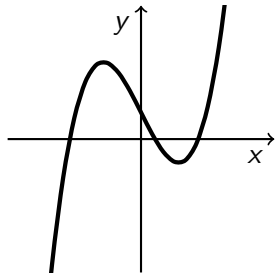
Beurteile aufgrund des asymptotischen Verhaltens, ob der Graph



zur Funktion $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x + 1$ gehören kann.

Aufgabe 9.1

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x + 1$$



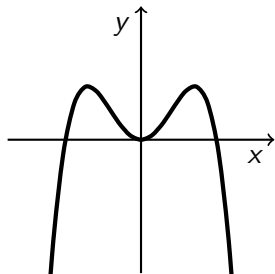
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{3}x^3 = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{3}x^3 = +\infty$$

$\Rightarrow$ Ja

Aufgabe 9.2

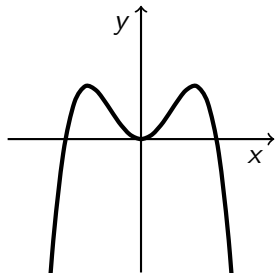
Beurteile aufgrund des asymptotischen Verhaltens, ob der Graph



Zur Funktion $f(x) = \frac{1}{8}x^4 - x^2$ gehören kann.

Aufgabe 9.2

$$f(x) = \frac{1}{8}x^4 - x^2$$



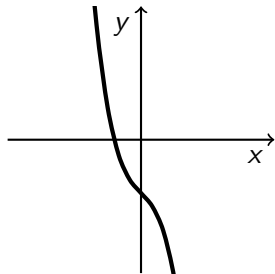
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{8}x^4 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{8}x^4 = +\infty$$

$\Rightarrow$ Nein

Aufgabe 9.3

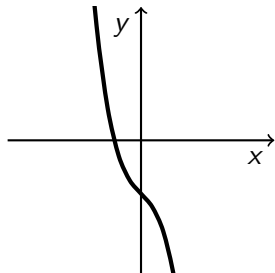
Untersuche aufgrund des asymptotischen Verhaltens, ob der Graph



zur Funktion $f(x) = -x^3 - x - 2$ gehören kann.

Aufgabe 9.3

$$f(x) = -x^3 - x - 2$$



$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^3) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^3) = -\infty$$

$\Rightarrow$ Ja

Aufgabe 9.4

Untersuche das asymptotische Verhalten von

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 4.$$

Aufgabe 9.4

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$$

Aufgabe 9.5

Untersuche das asymptotische Verhalten von $f(x) = x^4 + x^3 + 1$.

Aufgabe 9.5

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^4 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^4 = +\infty$$

Aufgabe 9.6

Untersuche das asymptotische Verhalten von

$$f(x) = 4x + x^2 - x^6 + x^4.$$

Aufgabe 9.6

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^6) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^6) = -\infty$$

Aufgabe 9.7

Untersuche das asymptotische Verhalten von
 $f(x) = 1 - 5x + 3x^2 - 2x^3$.

Aufgabe 9.7

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x^3) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-2x^3) = -\infty$$

Aufgabe 9.8

Untersuche das asymptotische Verhalten von
 $f(x) = (x - 1)(2 - x)(3 - x)$.

Aufgabe 9.8

$$f(x) = (x - 1)(2 - x)(3 - x)$$

Aufgabe 9.8

$$f(x) = (x - 1)(2 - x)(3 - x)$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 1)(2 - x)(3 - x) = \\ (+\infty) \cdot (-\infty) \cdot (-\infty) &= +\infty\end{aligned}$$

Aufgabe 9.8

$$f(x) = (x - 1)(2 - x)(3 - x)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 1)(2 - x)(3 - x) =$$
$$(+\infty) \cdot (-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x - 1)(2 - x)(3 - x) =$$
$$(-\infty) \cdot (+\infty) \cdot (+\infty) = -\infty$$

Aufgabe 9.9

Untersuche das asymptotische Verhalten von $f(x) = \frac{x+2}{x-1}$.

Aufgabe 9.9

Da der Grad des Zähler- und des Nennerpolynoms gleich 1 ist, hat die Funktion f eine horizontale Asymptote:

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{x+2}{x-1} = \lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{x}{x} = \lim_{|x| \rightarrow \infty} 1 = 1 \quad (\text{horizontale Asymptote: } y = 1)$$

Aufgabe 9.10

Untersuche das asymptotische Verhalten von $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 3}{x + 2}$.

Aufgabe 9.10

Da der Grad des Zählerpolynoms grösser ist als der des Nennerpolynoms, muss eine Polynomdivision durchgeführt werden:

$$(x^2 + 2x + 3) : (x + 2) = x + \frac{3}{x + 2} \quad [\text{ohne Lösungsweg}]$$

Die asymptotische Näherungsfunktion von $f(x)$ ist also $g(x) = x$

Aufgabe 9.11

Untersuche das asymptotische Verhalten von $f(x) = \frac{x+1}{x^3+1}$.

Aufgabe 9.11

Da der Grad des Zählerpolynoms kleiner ist, als der Grad des Nennerpolynoms, streben die Funktionswerte für $|x| \rightarrow \infty$ gegen Null

Horizontale Asymptote: $y = 0$

Aufgabe 9.12

Untersuche das asymptotische Verhalten von $f(x) = \frac{4x^2 - 4x + 5}{2x - 1}$.

Aufgabe 9.12

Da der Grad des Zählerpolynoms grösser ist als der des Nennerpolynoms, muss eine Polynomdivision durchgeführt werden:

$$(4x^2 - 4x + 5) : (2x - 1) = 2x - 1 + \frac{4}{2x - 1} \quad [\text{ohne Lösungsweg}]$$

Die asymptotische Näherungsfunktion von $f(x)$ ist also
 $g(x) = 2x - 1$

Aufgabe 9.13

Untersuche das asymptotische Verhalten von

$$f(x) = (x^3 - 3x + 1)e^{-x}.$$

Aufgabe 9.13

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

Aufgabe 9.13

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

Aufgabe 9.14

Untersuche das asymptotische Verhalten von $f(x) = \ln \left(1 + \frac{x}{|x|} \right)$.

Aufgabe 9.14

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln \left(1 + \frac{x}{|x|} \right) = -\infty$$

Aufgabe 9.14

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln \left(1 + \frac{x}{|x|} \right) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left(1 + \frac{x}{|x|} \right) = \ln 2$$

Aufgabe 9.15

Untersuche das asymptotische Verhalten von $f(x) = \frac{\ln(1 + |x|)}{1 + x^2}$.

Aufgabe 9.15

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + |x|)}{1 + x^2} = 0$$

Aufgabe 9.15

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + |x|)}{1 + x^2} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(1 + |x|)}{1 + x^2} = 0$$

Aufgabe 9.16

Untersuche das asymptotische Verhalten von $f(x) = e^x \cdot \sin(x)$.

Aufgabe 9.16

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [e^x \cdot \sin(x)] = 0$$

Aufgabe 9.16

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [e^x \cdot \sin(x)] = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [e^x \cdot \sin(x)] \text{ nicht definiert!}$$

Aufgabe 10.1

Bestimme die exakten Nullstellen der Funktion f ohne Taschenrechner.

(a) $f(x) = 3 - 7x$

(b) $f(x) = x^2 - \sqrt{3}x$

(c) $f(x) = x^2 - 3x - 7$

(d) $f(x) = x^2 + 4x + 5$

(e) $f(x) = x^4 - 3x^2 + 2$

(f) $f(x) = x^3 + x^2 - 6x$

Aufgabe 10.1

$$(a) \quad 3 - 7x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 3/7$$

Aufgabe 10.1

(a) $3 - 7x = 0 \Rightarrow x = 3/7$

(b) $0 = x(x - \sqrt{3}) \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = \sqrt{3}$

Aufgabe 10.1

(a) $3 - 7x = 0 \Rightarrow x = 3/7$

(b) $0 = x(x - \sqrt{3}) \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = \sqrt{3}$

(c) $D = 37; x_1 = \frac{3 + \sqrt{37}}{2}, x_2 = \frac{3 - \sqrt{37}}{2}$

Aufgabe 10.1

(a) $3 - 7x = 0 \Rightarrow x = 3/7$

(b) $0 = x(x - \sqrt{3}) \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = \sqrt{3}$

(c) $D = 37; x_1 = \frac{3 + \sqrt{37}}{2}, x_2 = \frac{3 - \sqrt{37}}{2}$

(d) $D = -4 \Rightarrow$ keine Nullstellen

Aufgabe 10.1

(a) $3 - 7x = 0 \Rightarrow x = 3/7$

(b) $0 = x(x - \sqrt{3}) \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = \sqrt{3}$

(c) $D = 37; x_1 = \frac{3 + \sqrt{37}}{2}, x_2 = \frac{3 - \sqrt{37}}{2}$

(d) $D = -4 \Rightarrow$ keine Nullstellen

(e) $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$

$$(x^2 - 1)(x^2 - 2) = 0$$

$$x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = \sqrt{2}, x_4 = -\sqrt{2}$$

Aufgabe 10.1

(a) $3 - 7x = 0 \Rightarrow x = 3/7$

(b) $0 = x(x - \sqrt{3}) \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = \sqrt{3}$

(c) $D = 37; x_1 = \frac{3 + \sqrt{37}}{2}, x_2 = \frac{3 - \sqrt{37}}{2}$

(d) $D = -4 \Rightarrow$ keine Nullstellen

(e) $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$

$$(x^2 - 1)(x^2 - 2) = 0$$

$$x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = \sqrt{2}, x_4 = -\sqrt{2}$$

(f) $x^3 + x^2 - 6x = x(x^2 + x - 6) = x(x - 2)(x + 3) = 0$

$$x_1 = 0, x_2 = 2, x_3 = -3$$

Aufgabe 10.2

Bestimme exakt alle reellen Nullstellen von f

(a) $f(x) = -3x(x - 4)(x + 5)(2x + 1)(x - \sqrt{2})(x + \pi)$

(b) $f(x) = \frac{5(x - 2)^2(x - 1.5)(x + 7)}{x(2x - 3)(x - 2)}$

Aufgabe 10.2

(a) $x_1 = 0$, $x_2 = 4$, $x_3 = -5$, $x_4 = -\frac{1}{2}$, $x_5 = \sqrt{2}$, $x_6 = -\pi$

Aufgabe 10.2

(a) $x_1 = 0$, $x_2 = 4$, $x_3 = -5$, $x_4 = -\frac{1}{2}$, $x_5 = \sqrt{2}$, $x_6 = -\pi$

(b) Nullstellen des Zählers: 2, 1.5, -7

Aufgabe 10.2

(a) $x_1 = 0, x_2 = 4, x_3 = -5, x_4 = -\frac{1}{2}, x_5 = \sqrt{2}, x_6 = -\pi$

(b) Nullstellen des Zählers: 2, 1.5, -7

Nullstellen des Nenners: 0, $\frac{3}{2}$, 2

Aufgabe 10.2

(a) $x_1 = 0, x_2 = 4, x_3 = -5, x_4 = -\frac{1}{2}, x_5 = \sqrt{2}, x_6 = -\pi$

(b) Nullstellen des Zählers: 2, 1.5, -7

Nullstellen des Nenners: 0, $\frac{3}{2}$, 2

Nullstellen von f : $x_1 = 2, x_2 = -7$

Aufgabe 10.2

(a) $x_1 = 0, x_2 = 4, x_3 = -5, x_4 = -\frac{1}{2}, x_5 = \sqrt{2}, x_6 = -\pi$

(b) Nullstellen des Zählers: 2, 1.5, -7

Nullstellen des Nenners: 0, $\frac{3}{2}$, 2

Nullstellen von f : $x_1 = 2, x_2 = -7$

Aufgabe 10.3

Bestimme exakt alle reellen Nullstellen von f .

(a) $f(x) = \sin(2x)$

(b) $f(x) = \cos\left(\frac{1}{3}x + 1\right)$

(c) $f(x) = \tan(4 - x)$

Aufgabe 10.3

(a) $\sin(2x) = 0$

Aufgabe 10.3

(a) $\sin(2x) = 0$

$$2x_k = k \cdot \pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Aufgabe 10.3

(a) $\sin(2x) = 0$

$$2x_k = k \cdot \pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$x_k = k \cdot \frac{1}{2}\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Aufgabe 10.3

(a) $\sin(2x) = 0$

$$2x_k = k \cdot \pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$x_k = k \cdot \frac{1}{2}\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

(b) $\cos\left(\frac{1}{3}x + 1\right) = 0$

Aufgabe 10.3

(a) $\sin(2x) = 0$

$$2x_k = k \cdot \pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$x_k = k \cdot \frac{1}{2}\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

(b) $\cos\left(\frac{1}{3}x + 1\right) = 0$

$$\frac{1}{3}x_k + 1 = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Aufgabe 10.3

(a) $\sin(2x) = 0$

$$2x_k = k \cdot \pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$x_k = k \cdot \frac{1}{2}\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

(b) $\cos\left(\frac{1}{3}x + 1\right) = 0$

$$\frac{1}{3}x_k + 1 = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$x_k = \frac{3}{2}\pi + 3k \cdot \pi - 1 \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Aufgabe 10.3

(a) $\sin(2x) = 0$

$$2x_k = k \cdot \pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$x_k = k \cdot \frac{1}{2}\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

(b) $\cos\left(\frac{1}{3}x + 1\right) = 0$

$$\frac{1}{3}x_k + 1 = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$x_k = \frac{3}{2}\pi + 3k \cdot \pi - 1 \quad (k \in \mathbb{Z})$$

(c) $\tan(4 - x) = 0$

Aufgabe 10.3

(a) $\sin(2x) = 0$

$$2x_k = k \cdot \pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$x_k = k \cdot \frac{1}{2}\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

(b) $\cos\left(\frac{1}{3}x + 1\right) = 0$

$$\frac{1}{3}x_k + 1 = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$x_k = \frac{3}{2}\pi + 3k \cdot \pi - 1 \quad (k \in \mathbb{Z})$$

(c) $\tan(4 - x) = 0$

$$(4 - x_k) = k \cdot \pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Aufgabe 10.3

(a) $\sin(2x) = 0$

$$2x_k = k \cdot \pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$x_k = k \cdot \frac{1}{2}\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

(b) $\cos\left(\frac{1}{3}x + 1\right) = 0$

$$\frac{1}{3}x_k + 1 = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$x_k = \frac{3}{2}\pi + 3k \cdot \pi - 1 \quad (k \in \mathbb{Z})$$

(c) $\tan(4 - x) = 0$

$$(4 - x_k) = k \cdot \pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$-x_k = k \cdot \pi - 4 \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Aufgabe 10.3

(a) $\sin(2x) = 0$

$$2x_k = k \cdot \pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$x_k = k \cdot \frac{1}{2}\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

(b) $\cos\left(\frac{1}{3}x + 1\right) = 0$

$$\frac{1}{3}x_k + 1 = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$x_k = \frac{3}{2}\pi + 3k \cdot \pi - 1 \quad (k \in \mathbb{Z})$$

(c) $\tan(4 - x) = 0$

$$(4 - x_k) = k \cdot \pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

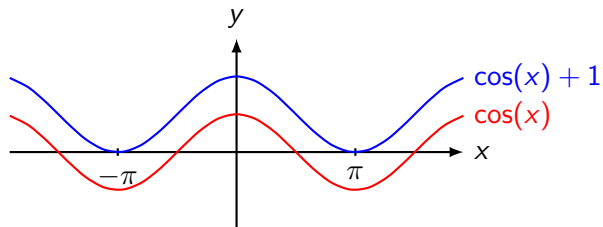
$$-x_k = k \cdot \pi - 4 \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$x_k = k \cdot \pi + 4 \quad (k \in \mathbb{Z})$$

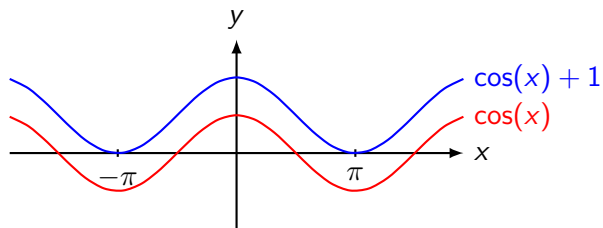
Aufgabe 10.4

Bestimme exakt alle Nullstellen von $f(x) = \cos x + 1$.

Aufgabe 10.4

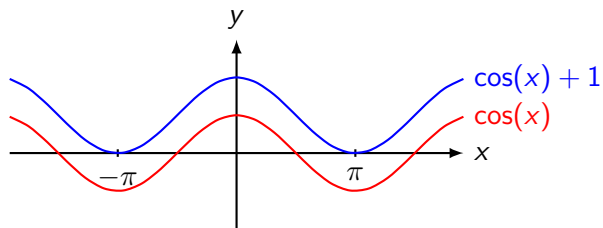


Aufgabe 10.4



$$\cos x + 1 = 0$$

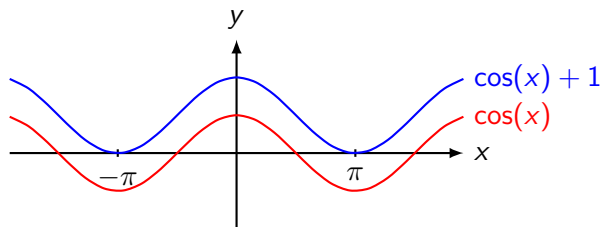
Aufgabe 10.4



$$\cos x + 1 = 0$$

$$\cos x = -1$$

Aufgabe 10.4

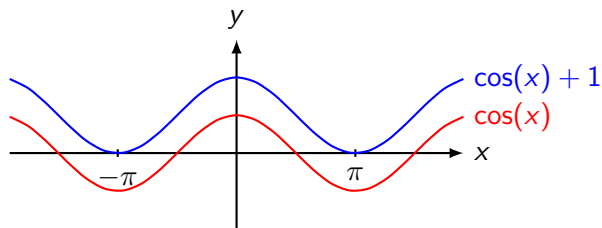


$$\cos x + 1 = 0$$

$$\cos x = -1$$

$$\cos x = \cos(\pi + k \cdot 2\pi) \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Aufgabe 10.4



$$\cos x + 1 = 0$$

$$\cos x = -1$$

$$\cos x = \cos(\pi + k \cdot 2\pi) \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$x_k = \pi + k \cdot 2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Aufgabe 10.5

Bestimme exakt alle reellen Nullstellen von f .

(a) $f(x) = \ln x - 1$

(b) $f(x) = \ln(x^2 - 5x + 5)$

Aufgabe 10.5

(a) $\ln x - 1 = 0$

$$\ln x = 1$$

$$x = e$$

Aufgabe 10.5

(a) $\ln x - 1 = 0$

$$\ln x = 1$$

$$x = e$$

(b) $\ln(x^2 - 5x + 5) = 0$

$$x^2 - 5x + 5 = 1$$

$$x^2 - 5x + 4 = 0$$

$$(x - 1)(x - 4) = 0$$

$$x_1 = 1$$

$$x_2 = 4$$

Aufgabe 10.6

Bestimme alle reellen Nullstellen mit Hilfe des Horner-Schemas.

(a) $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$

(b) $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$

Aufgabe 10.6

(a)

x		-2	-1	2
1	1	-1	-2	0

Aufgabe 10.6

(a)

x		-2	-1	2
1	1	-1	-2	0

Also ist $x = 1$ eine Nullstelle und $(x - 1)$ ein Linearfaktor.

Aufgabe 10.6

$$(a) \begin{array}{c|c|c|c|c} x & & -2 & -1 & 2 \\ \hline 1 & 1 & -1 & -2 & 0 \end{array}$$

Also ist $x = 1$ eine Nullstelle und $(x - 1)$ ein Linearfaktor.

$$(x - 1)(x^2 - x - 2) = 0$$

Aufgabe 10.6

$$(a) \begin{array}{c|c|c|c|c} x & & -2 & -1 & 2 \\ \hline 1 & 1 & -1 & -2 & 0 \end{array}$$

Also ist $x = 1$ eine Nullstelle und $(x - 1)$ ein Linearfaktor.

$$(x - 1)(x^2 - x - 2) = 0$$

$$(x - 1)(x - 2)(x + 1) = 0$$

Aufgabe 10.6

$$(a) \begin{array}{c|c|c|c|c} x & & -2 & -1 & 2 \\ \hline 1 & 1 & -1 & -2 & 0 \end{array}$$

Also ist $x = 1$ eine Nullstelle und $(x - 1)$ ein Linearfaktor.

$$(x - 1)(x^2 - x - 2) = 0$$

$$(x - 1)(x - 2)(x + 1) = 0$$

$$x_1 = 1$$

Aufgabe 10.6

$$(a) \begin{array}{c|c|c|c|c} x & & -2 & -1 & 2 \\ \hline 1 & 1 & -1 & -2 & 0 \end{array}$$

Also ist $x = 1$ eine Nullstelle und $(x - 1)$ ein Linearfaktor.

$$(x - 1)(x^2 - x - 2) = 0$$

$$(x - 1)(x - 2)(x + 1) = 0$$

$$x_1 = 1$$

$$x_2 = 2$$

Aufgabe 10.6

$$(a) \begin{array}{c|c|c|c|c} x & & -2 & -1 & 2 \\ \hline 1 & 1 & -1 & -2 & 0 \end{array}$$

Also ist $x = 1$ eine Nullstelle und $(x - 1)$ ein Linearfaktor.

$$(x - 1)(x^2 - x - 2) = 0$$

$$(x - 1)(x - 2)(x + 1) = 0$$

$$x_1 = 1$$

$$x_2 = 2$$

$$x_3 = -1$$

(b)

x		-2	-5	6
1	1	-1	-6	0

(b)

x		-2	-5	6
1	1	-1	-6	0

Also ist $x = 1$ eine Nullstelle und $(x - 1)$ ein Linearfaktor.

(b)

x		-2	-5	6
1	1	-1	-6	0

Also ist $x = 1$ eine Nullstelle und $(x - 1)$ ein Linearfaktor.

$$(x - 1)(x^2 - x - 6) = 0$$

(b)

x		-2	-5	6
1	1	-1	-6	0

Also ist $x = 1$ eine Nullstelle und $(x - 1)$ ein Linearfaktor.

$$(x - 1)(x^2 - x - 6) = 0$$

$$(x - 1)(x + 2)(x - 3) = 0$$

(b)

x		-2	-5	6
1	1	-1	-6	0

Also ist $x = 1$ eine Nullstelle und $(x - 1)$ ein Linearfaktor.

$$(x - 1)(x^2 - x - 6) = 0$$

$$(x - 1)(x + 2)(x - 3) = 0$$

$$x_1 = 1$$

(b)

x		-2	-5	6
1	1	-1	-6	0

Also ist $x = 1$ eine Nullstelle und $(x - 1)$ ein Linearfaktor.

$$(x - 1)(x^2 - x - 6) = 0$$

$$(x - 1)(x + 2)(x - 3) = 0$$

$$x_1 = 1$$

$$x_2 = -2$$

(b)

x		-2	-5	6
1	1	-1	-6	0

Also ist $x = 1$ eine Nullstelle und $(x - 1)$ ein Linearfaktor.

$$(x - 1)(x^2 - x - 6) = 0$$

$$(x - 1)(x + 2)(x - 3) = 0$$

$$x_1 = 1$$

$$x_2 = -2$$

$$x_3 = 3$$

Aufgabe 10.7

Bestimme den Ordinatenabschnitt der Funktion f .

(a) $f(x) = x^4 - 2x^2 + 3$

(b) $f(x) = (x - 4)^2$

(c) $f(x) = \frac{x^3 - 2x + 8}{2x^2 + x - 12}$

(d) $f(x) = e^x + 1$

(e) $f(x) = 2 - \cos(x)$

(f) $f(x) = \ln(x^2 + 5)$

Aufgabe 10.7

(a) $f(0) = 3$

Aufgabe 10.7

(a) $f(0) = 3$

(b) $f(0) = 16$

Aufgabe 10.7

(a) $f(0) = 3$

(b) $f(0) = 16$

(c) $f(0) = -2/3$

Aufgabe 10.7

(a) $f(0) = 3$

(b) $f(0) = 16$

(c) $f(0) = -2/3$

(d) $f(0) = 2$

Aufgabe 10.7

(a) $f(0) = 3$

(b) $f(0) = 16$

(c) $f(0) = -2/3$

(d) $f(0) = 2$

(e) $f(0) = 1$

Aufgabe 10.7

(a) $f(0) = 3$

(b) $f(0) = 16$

(c) $f(0) = -2/3$

(d) $f(0) = 2$

(e) $f(0) = 1$

(f) $f(0) = \ln 5$

Aufgabe 10.8

Bestimme alle reellen Nullstellen von f mit Hilfe des Taschenrechners.

(a) $f(x) = x^4 + \frac{3}{2}x^3 + \frac{3}{2}x - 1$

(b) $f(x) = x^6 - 4x^5 + 7x^4 - 8x^3 + 7x^2 - 4x + 1$

(c) $f(x) = \frac{x^3 - 5x^2 + 7x - 3}{x^3 - 2x^2 - x + 2}$

(d) $f(x) = x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 11x - 6$

Aufgabe 10.8

(a) $x_1 = -2, x_2 = \frac{1}{2}$

Aufgabe 10.8

(a) $x_1 = -2, x_2 = \frac{1}{2}$

(b) $x = 1$

Aufgabe 10.8

(a) $x_1 = -2, x_2 = \frac{1}{2}$

(b) $x = 1$

(c) Zähler: 1, 3; Nenner: 2, -1, 1; gesamt: $x = 3$

Aufgabe 10.8

(a) $x_1 = -2, x_2 = \frac{1}{2}$

(b) $x = 1$

(c) Zähler: 1, 3; Nenner: 2, -1, 1; gesamt: $x = 3$

(d) $x_1 = x_2 = 1, x_3 = 3, x_4 = -2$

Bei mehrfachen Nullstellen, treten oft Rundungsfehler auf, die korrigiert werden müssen.

Aufgabe 10.9

Bestimme mit dem Bisektionsverfahren die Nullstelle der Funktion f im Intervall I und mit der Genauigkeit ε .

(a) $f(x) = e^{-x} - \frac{1}{2}x$; $I = [0, 1]$, $\varepsilon = 10^{-4}$

(b) $f(x) = \sin(x) - x^{-1}$; $I = [1, 2]$, $\varepsilon = 10^{-6}$

(c) $f(x) = x^x - \sqrt{x}$; $I = (0, 1]$, $\varepsilon = 10^{-5}$

Aufgabe 10.9

(a) $\text{prgmF}: e^{(-x)} - x/2 \rightarrow Y;$

Aufgabe 10.9

(a) $\text{prgmF}: e^{(-x)} - x/2 \rightarrow Y; x \approx 0.8526(000977)$

Aufgabe 10.9

(a) `prgmF:  $e^{(-x)} - x/2 \rightarrow Y$ ;  $x \approx 0.8526(000977)$`

(b) `prgmF:  $\sin(X) - X^{-1} \rightarrow Y$ ;`

Aufgabe 10.9

- (a) `prgmF:  $e^{(-x)} - x/2 \rightarrow Y$ ;  $x \approx 0.8526(000977)$`
- (b) `prgmF:  $\sin(X) - x^{-1} \rightarrow Y$ ;  $x \approx 1.114157(677)$`

Aufgabe 10.9

- (a) $\text{prgmF}: e^{(-x)} - x/2 \rightarrow Y; x \approx 0.8526(000977)$
- (b) $\text{prgmF}: \sin(x) - x^{-1} \rightarrow Y; x \approx 1.114157(677)$
- (c) $\text{prgmF}: x^x - \sqrt{x} \rightarrow Y;$

Aufgabe 10.9

- (a) `prgmF`: $e^{(-X)} - X/2 \rightarrow Y$; $x \approx 0.8526(000977)$
- (b) `prgmF`: $\sin(X) - X^{-1} \rightarrow Y$; $x \approx 1.114157(677)$
- (c) `prgmF`: $X^X - \sqrt{X} \rightarrow Y$; $x \approx 0.49999(973707)$