
Differenzialrechnung

Übungen (I)

Aufgabe 1.1

Bestimme einige Glieder der Folge und untersuche, ob sie beschränkt, monoton wachsend, monoton fallend oder alternierend ist.

(a) $a_n = \frac{n^2}{n+1}$

(b) $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$

(c) $a_n = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n-1}$

(d) $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^3$

(e) $a_n = \sqrt[n]{2}$

(f) $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

(g) $a_n = \frac{n^2}{2^n}$

Aufgabe 1.2

Untersuche, ob die nachstehenden Folgen konvergieren oder divergieren. Falls sie konvergieren, ist der Grenzwert anzugeben. *Beachte:* Winkel sind im Bogenmass angegeben.

(a) $a_n = (-1)^n$

(b) $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$

(c) $a_n = \sin n$

(d) $a_n = \frac{\cos n}{n}$

(e) $a_n = \frac{3n}{n+1} - \frac{n}{n+4}$

(f) $a_n = 0.8^n$

(g) $a_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n$

(h) $a_n = \frac{3^n}{n^3}$

(i) $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

(j) $a_n = \sqrt[n]{n}$

Aufgabe 1.3

Bestimme den Grenzwert der Folgen (a_n) .

(a) $a_n = \frac{1}{n}$

(b) $a_n = \frac{1}{n^2} - 2$

(c) $a_n = \frac{1}{n(n+1)}$

(d) $a_n = \frac{3n^2 - 1}{4n^2 + 2}$

(e) $a_n = \sqrt{\frac{n}{4n+1}}$

(f) $a_n = e^{\frac{1}{n}}$

(g) $a_n = e^{-n}$

Aufgabe 1.4

Untersuche, ob die Folgen konvergent sind. Gib in diesem Fall den Grenzwert an.

(a) $a_n = \frac{1 - 1/n^2}{1 + 1/n^2}$

(b) $a_n = \frac{n+1}{2n+1}$

(c) $a_n = \frac{2+3n^3}{n^3-4}$

(d) $a_n = \frac{n^3+n}{n^4+n^2}$

(e) $a_n = \frac{2n^3-2}{n-2}$

(f) $a_n = \frac{2n^3-3n+1}{4n+5n^3+2}$

Aufgabe 1.5

Untersuche, ob die Folgen konvergent sind. Falls ja, gib den Grenzwert an.

(a) $a_n = \frac{\sqrt{n}+1}{2\sqrt{n}+3}$

(b) $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

(c) $a_n = \sqrt{n^2+1} - n + 1$

(d) $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n^2+1}$

Aufgabe 1.6

Widerlege die folgenden Behauptungen durch ein Gegenbeispiel:

(a) Jede monotone Folge ist konvergent.

(b) Jede beschränkte Folge ist divergent.

(c) Jede divergente Folge ist unbeschränkt.

(d) Ist a_n divergent, so ist $\frac{1}{a_n}$ konvergent.

Aufgabe 2.1

$$\lim_{x \rightarrow 2} (3x - 7)$$

Aufgabe 2.2

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \sin 3x$$

Aufgabe 2.3

$$\lim_{x \rightarrow 0} (3x^2 - 4x + 1)$$

Aufgabe 2.4

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x}$$

Aufgabe 2.5

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 - 6x}{x - 3}$$

Aufgabe 2.6

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x + 2)^3}{(x + 2)}$$

Aufgabe 2.7

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{x - 4}$$

Aufgabe 2.8

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{2}{3}} \frac{9x^2 - 4}{3x + 2}$$

Aufgabe 2.9

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^4 - a^4}{x - a}$$

Aufgabe 2.10

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{x-2}$$

Aufgabe 2.11

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 4x + 4}{x^2 - 4}$$

Aufgabe 2.12

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 5x^2 + 2x + 8}{x^3 - 7x + 6}$$

Aufgabe 2.13

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{1-\sqrt{x}}$$

Aufgabe 2.14

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x}$$

Aufgabe 2.15

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{1}{x-3}$$

Aufgabe 2.16

$$\lim_{x \rightarrow \pi^+} \tan \frac{x}{2}$$

Aufgabe 2.17

$$\lim_{x \rightarrow \pi^-} \tan \frac{x}{2}$$

Aufgabe 2.18

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-\frac{1}{x}}$$

Aufgabe 2.19

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} e^{-\frac{1}{x}}$$

Aufgabe 2.20

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$$

Aufgabe 2.21

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{|x|}$$

Aufgabe 2.22

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{|x|}$$

Aufgabe 2.23

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}}$$

Aufgabe 2.24

$$\lim_{x \rightarrow 0} e^{-1/x^2}$$

Aufgabe 2.25

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x}$$

Aufgabe 2.26

$$\lim_{x \rightarrow \infty} 2^x$$

Aufgabe 2.27

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 2^x$$

Aufgabe 2.28

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3+x}{x}$$

Aufgabe 2.29

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^3 + 2x + 1}$$

Aufgabe 2.30

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x + 3}{5x - 9}$$

Aufgabe 2.31

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 4x + 2}{2x^2 + 1}$$

Aufgabe 2.32

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 2}{x^2}$$

Aufgabe 2.33

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x} + 1}{x + 1}$$

Aufgabe 2.34

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + x + x^2}{x^2}$$

Aufgabe 2.35

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 + x - x^2}{2x^2 + 3}$$

Aufgabe 2.36

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{2x}$$

Aufgabe 2.37

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sin x$$

Aufgabe 2.38

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x}$$

Aufgabe 2.39

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{|x|}$$

Aufgabe 2.40

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^8}{2^x}$$

Aufgabe 2.41

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^x}{x^5}$$

Aufgabe 2.42

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

Aufgabe 2.43

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[x]{100}$$

Aufgabe 3.1

Werte die Funktion an der gegebenen Stelle aus und vereinfache den Term so weit wie möglich.

(a) $f(x) = x^2 - 4x + 5; \quad x = 2 + h$

(b) $f(x) = \frac{x+2}{x-3}; \quad x = 3 + h$

(c) $f(x) = (x-4)^3; \quad x = 6 + h$

Aufgabe 3.2

Bestimme die Ableitung von $f(x) = x^2$ an der Stelle $x_0 = -3$.

Aufgabe 3.3

Bestimme die Ableitung von $f(x) = 3x - 4$ an der Stelle $x_0 = 2$.

Aufgabe 3.4

Bestimme die Ableitung von $f(x) = x^3$ an der Stelle $x_0 = 2$.

Aufgabe 3.5

Bestimme die Ableitung von $f(x) = \frac{1}{x}$ an der Stelle $x_0 = 4$.

Aufgabe 3.6

Bestimme die Ableitung von $f(x) = \frac{1}{x+1}$ an der Stelle $x_0 = 1$.

Aufgabe 3.7

Bestimme die Ableitung von $f(x) = \frac{1}{x^2}$ an der Stelle $x_0 = 2$.

Aufgabe 3.8

Bestimme die Ableitung von $f(x) = \sqrt{x}$ an der Stelle $x_0 = 4$.

Aufgabe 3.9

Bestimme die Ableitung von $f(x) = \sqrt{2x}$ an der Stelle $x_0 = 3$.

Aufgabe 3.10

Bestimme die Ableitung von $f(x) = \sqrt{x+3}$ an der Stelle $x_0 = -2$.

Aufgabe 3.11

Bestimme die Gleichung der Tangente an den Graphen der Funktion $f(x) = x^2 + 1$ an der Stelle $x_0 = -2$.

Aufgabe 3.12

Bestimme die Gleichung der Normalen des Graphen der Funktion $f(x) = \sqrt{x-3}$ an der Stelle $x = 4$.

Aufgabe 3.13

Bestimme die Gleichung der Tangente an den Graphen der Funktion $f(x) = \frac{1}{2x-1}$ an der Stelle $x = 1$.

Aufgabe 3.14

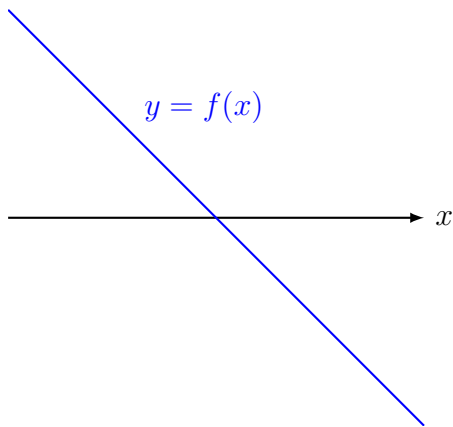
Bestimme die Gleichung der Normalen des Graphen von $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x$ an der Stelle $x_0 = 1$.

Aufgabe 3.15

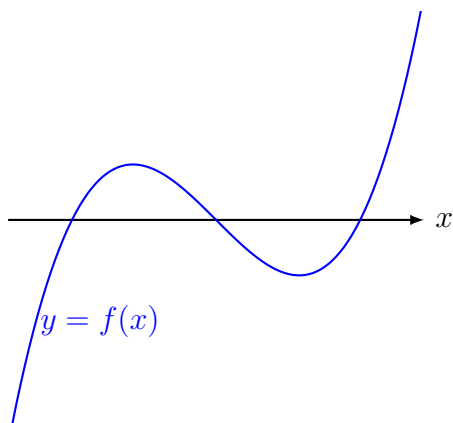
Bestimme die Gleichung der Tangente an den Graphen der Funktion $f(x) = \frac{x-1}{x}$ an der Stelle $x = 2$.

Differenziere graphisch.

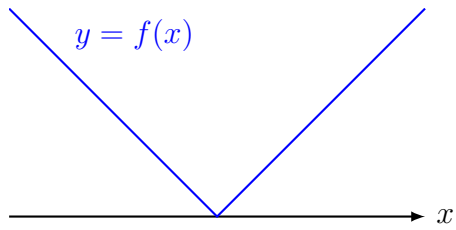
Aufgabe 3.16



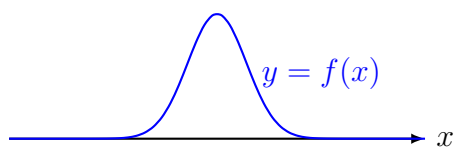
Aufgabe 3.17



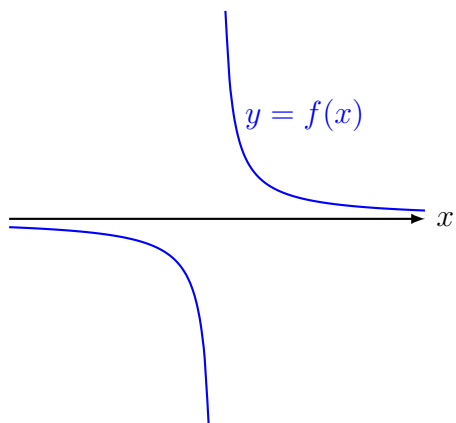
Aufgabe 3.18



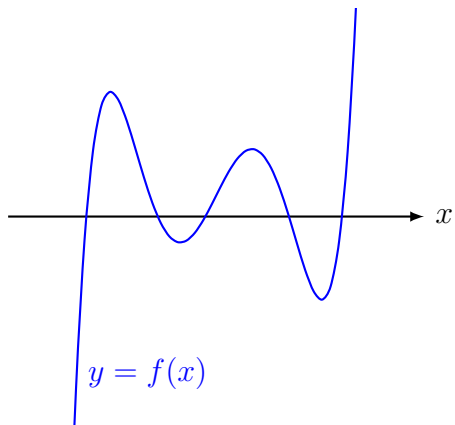
Aufgabe 3.19



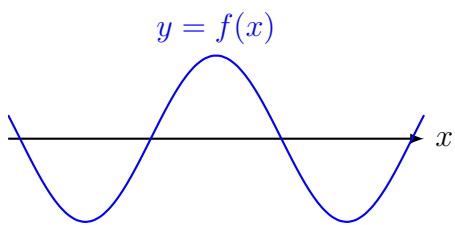
Aufgabe 3.20



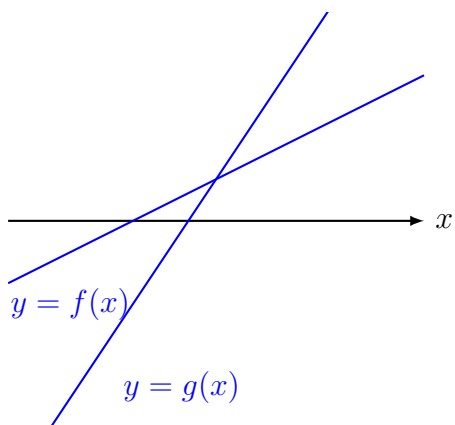
Aufgabe 3.21



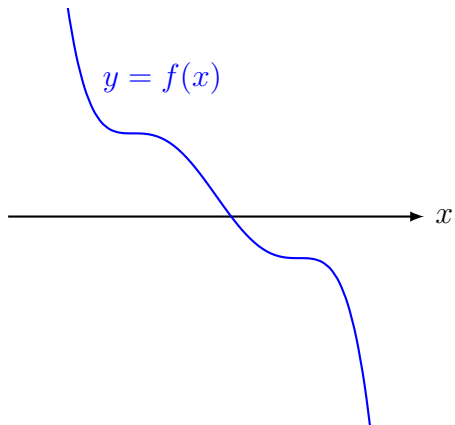
Aufgabe 3.22



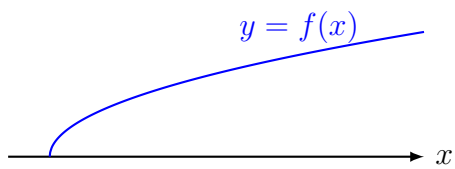
Aufgabe 3.23



Aufgabe 3.24



Aufgabe 3.25



Aufgabe 4.1

Bestimme die Ableitung von $f(x) = \ln x$ an der Stelle $x = 5$.

Aufgabe 4.2

Bestimme die Ableitung von $f(x) = x^5$ an der Stelle $x = -2$.

Aufgabe 4.3

Bestimme die Ableitung von $f(x) = \cos x$ an der Stelle $x = \pi/2$.

Aufgabe 4.4

Bestimme die Gleichung der Tangente an den Graphen der Funktion $f(x) = e^x$ an der Stelle $x = 0$.

Aufgabe 4.5

Bestimme die Gleichung der Normalen an den Graphen der Funktion $f(x) = x^3$ an der Stelle $x = \frac{2}{3}$.

Aufgabe 4.6

Die Tangente an den Graphen der Funktion $f(x) = \sqrt{x}$ bei $x = 1$ begrenzt zusammen mit den Koordinatenachsen im II. Quadranten eine Dreiecksfläche. Welchen Inhalt hat diese Fläche?

Aufgabe 4.7

An welchen Stellen hat der Graph der Funktion $f(x) = 1/x$ die Steigung $m = -1.44$?

Aufgabe 4.8

Eine Funktion f ist an der Stelle $x_0 \dots$

- monoton wachsend, wenn $f'(x_0) > 0$,
- monoton fallend, wenn $f'(x_0) < 0$.

Ist f an der Stelle x_0 monoton wachsend oder monoton fallend?

(a) $f(x) = x^4; \quad x_0 = -3$

(b) $f(x) = x^7; \quad x_0 = -100$

(c) $f(x) = \ln x; \quad x_0 = 0.7$

(d) $f(x) = 1/x; \quad x_0 = 4$

(e) $f(x) = 1/x; \quad x_0 = -4$

Aufgabe 4.9

Bestimme die zweite Ableitung $f''(x)$ der gegebenen Funktion.

(a) $f(x) = e^x$

(b) $f(x) = \sin x$

(c) $f(x) = \ln x$

(d) $f(x) = x$

Aufgabe 4.10

An welcher Stelle ist der Graph von $f(x) = x^2$ parallel zur Geraden $g: y = 3x + 5$?

Aufgabe 4.11

Bestimme die Steigung der Tangente an den Graphen von f an der Stelle x_0 in Grad.

(a) $f(x) = x^4; \quad x_0 = 0.5$

(b) $f(x) = 1/x; \quad x_0 = -1$

(c) $f(x) = e^x; \quad x_0 = -2$

(d) $f(x) = \ln x; \quad x_0 = \sqrt{3}$

(e) $f(x) = \cos x; \quad x_0 = \frac{\pi}{6}$

Aufgabe 5.1

$$f(x) = x^2 + x^3$$

$$f'(x) =$$

Aufgabe 5.2

$$f(x) = \sin x + \cos x$$

$$f'(x) =$$

Aufgabe 5.3

$$f(x) = \tan x + x$$

$$f'(x) =$$

Aufgabe 5.4

$$f(t) = 3 + \ln t$$

$$f'(x) =$$

Aufgabe 5.5

$$f(x) = x^2 + \frac{1}{x^2}$$

$$f'(x) =$$

Aufgabe 5.6

$$f(x) = 3^x + x^3$$

$$f'(x) =$$

Aufgabe 5.7

$$a(z) = 1 + z + z^2 + z^3$$

$$f'(x) =$$

Aufgabe 5.8

$$f(x) = \log_{10} x + \sqrt{x}$$

$$f'(x) =$$

Aufgabe 5.9

$$f(x) = 4 + x$$

$$f'(x) =$$

Aufgabe 5.10

$$f(x) = x^{-4} + x^{-6}$$

$$f'(x) =$$

Aufgabe 5.11

$$f(x) = 3x^2$$

$$f'(x) =$$

Aufgabe 5.12

$$f(x) = 5e^x$$

$$f'(x) =$$

Aufgabe 5.13

$$f(x) = -4 \sin x$$

$$f'(x) =$$

Aufgabe 5.14

$$g(x) = \pi \ln x$$

$$f'(x) =$$

Aufgabe 5.15

$$f(x) = -\cos x$$

$$f'(x) =$$

Aufgabe 5.16

$$f(x) = 7$$

$$f'(x) =$$

Aufgabe 5.17

$$f(t) = \frac{5}{t}$$

$$f'(t) =$$

Aufgabe 5.18

$$f(x) = 4\sqrt{x}$$

$$f'(x) =$$

Aufgabe 5.19

$$f(x) = \frac{1}{\ln 2} \cdot 2^x$$

$$f'(x) =$$

Aufgabe 5.20

$$h(s) = 3s^{-5}$$

$$f'(s) =$$

Aufgabe 5.21

$$f(x) = 2x^2 + 3x - 5$$

$$f'(x) =$$

Aufgabe 5.22

$$f(x) = x^3 - 7x^2 + 9$$

$$f'(x) =$$

Aufgabe 5.23

$$f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2 + 6x - 2$$

$$f'(x) =$$

Aufgabe 5.24

$$f(x) = \frac{2}{3}x^5 + \frac{4}{3}x^4 + \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{5}x^2 + \frac{1}{2}x - 3$$

$$f'(x) =$$

Aufgabe 5.25

$$f(x) = \sqrt{2}x^3 - \pi x^2 + e x$$

$$f'(x) =$$

Aufgabe 5.26

$$g(x) = 0.1x^5 - 0.25x^3 - 0.3x$$

$$f'(x) =$$

Aufgabe 5.27

$$f(x) = 2 \cdot (7x^2 + 3x - 8)$$

$$f'(x) =$$

Aufgabe 5.28

$$f(t) = (t - 1)(t + 1)$$

$$f'(t) =$$

Aufgabe 5.29

$$h(x) = (x + 2)^2$$

$$f'(x) =$$

Aufgabe 5.30

$$f(x) = 3(x + 1)(x - 2)$$

$$f'(x) =$$

Aufgabe 5.31

$$f(t) = (3t^2 + t) \cdot (1 - t^2)$$

$$f'(t) =$$

Aufgabe 5.32

$$f(x) = (1 + 3x + x^2) \cdot (x^3 + 4x - 3)$$

$$f'(x) =$$

Aufgabe 5.33

$$g(x) = x \cdot \cos x$$

$$f'(x) =$$

Aufgabe 5.34

$$f(t) = (t^2 - 1) \cdot \sin t$$

$$f'(t) =$$

Aufgabe 5.35

$$f(x) = \sin x \cdot \cos x$$

$$f'(x) =$$

Aufgabe 5.36

$$h(t) = \cos^2 t$$

$$h'(t) =$$

Aufgabe 5.37

$$f(x) = x \cdot \ln x$$

$$f'(x) =$$

Aufgabe 5.38

$$f(x) = \sqrt{x} \cdot \sin x$$

$$f'(x) =$$

Aufgabe 5.39

$$h(x) = x^2 \cdot e^x$$

$$f'(x) =$$

Aufgabe 5.40

$$f(x) = \tan x \cdot \cos x$$

$$f'(x) =$$

Aufgabe 5.41

$$f(x) = \frac{x+1}{x-1}$$

$$f'(x) =$$

Aufgabe 5.42

$$f(x) = \frac{3x}{x+1}$$

$$f'(x) =$$

Aufgabe 5.43

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 1}$$

$$f'(x) =$$

Aufgabe 5.44

$$f(x) = \frac{x^3 + 2x^2 - 4}{x}$$

$$f'(x) =$$

Aufgabe 5.45

$$f(x) = \frac{x^4 + 3x^2 + 2}{x + 5}$$

$$f'(x) =$$

Aufgabe 5.46

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 3x + 2}$$

$$f'(x) =$$

Aufgabe 5.47

$$f(x) = \frac{e^x}{x^2}$$

$$f'(x) =$$

Aufgabe 5.48

$$f(x) = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$f'(x) =$$

Aufgabe 5.49

$$f(x) = \frac{\ln x}{x}$$

$$f'(x) =$$

Aufgabe 5.50

$$f(x) = \frac{x \cdot \ln x}{e^x}$$

$$f'(x) =$$

Aufgabe 5.51

$$f(x) = (5x - 3)^7$$

$$f'(x) =$$

Aufgabe 5.52

$$f(x) = e^{3x}$$

$$f'(x) =$$

Aufgabe 5.53

$$f(x) = e^{-x}$$

$$f'(x) =$$

Aufgabe 5.54

$$f(x) = \tan(4x)$$

$$f'(x) =$$

Aufgabe 5.55

$$f(x) = \sqrt{7x - 3}$$

$$f'(x) =$$

Aufgabe 5.56

$$f(x) = \sin 2x$$

$$f'(x) =$$

Aufgabe 5.57

$$f(x) = \cos(-x)$$

$$f'(x) =$$

Aufgabe 5.58

$$f(x) = \cos(x^2)$$

$$f'(x) =$$

Aufgabe 5.59

$$f(x) = \sin(x^2 + 3x + 1)$$

$$f'(x) =$$

Aufgabe 5.60

$$f(x) = (\sin x)^2$$

$$f'(x) =$$

Aufgabe 5.61

$$f(x) = 5x^2 - 3e^x + \ln x$$

$$f'(x) =$$

Aufgabe 5.62

$$f(x) = \sin(x^2)$$

$$f'(x) =$$

Aufgabe 5.63

$$f(x) = \sin^2 x$$

$$f'(x) =$$

Aufgabe 5.64

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x + 1}$$

$$f'(x) =$$

Aufgabe 5.65

$$f(x) = (x^4 + x) \cdot \ln x$$

$$f'(x) =$$

Aufgabe 5.66

$$f(x) = \sqrt{\ln x}$$

$$f'(x) =$$

Aufgabe 5.67

$$f(x) = e^{-x^2}$$

$$f'(x) =$$

Aufgabe 5.68

$$f(x) = \frac{\ln x}{x^3}$$

$$f'(x) =$$

Aufgabe 5.69

$$f(x) = \frac{1}{\cos x}$$

$$f'(x) =$$

Aufgabe 5.70

$$f(x) = \sqrt{1 - 2x}$$

$$f'(x) =$$

Aufgabe 5.71

$$f(x) = x^4 \cdot \sin x$$

$$f'(x) =$$

Aufgabe 5.72

$$f(x) = \tan(5x + \pi)$$

$$f'(x) =$$

Aufgabe 5.73

$$f(x) = \frac{2}{x}$$

$$f'(x) =$$

Aufgabe 5.74

$$f(x) = e^{(x^2)}$$

$$f'(x) =$$

Aufgabe 5.75

$$f(x) = (e^x)^2$$

$$f'(x) =$$

Aufgabe 5.76

$$f(x) = \frac{x^2}{1 - x^2}$$

$$f'(x) =$$

Aufgabe 5.77

$$f(x) = (x^3 - 7x^2 + 5)^8$$

$$f'(x) =$$

Aufgabe 5.78

$$f(x) = x^{-2}$$

$$f'(x) =$$

Aufgabe 5.79

$$f(x) = xe^x; f'(x) = ?$$

Aufgabe 5.80

$$f(x) = e \cdot x^2 - \frac{1}{e^2 \cdot x}$$

$$f'(x) =$$

Aufgabe 5.81

$$f(x) = \frac{x^3}{2e^x}$$

$$f'(x) =$$

Aufgabe 5.82

$$f(x) = \frac{1}{(\cos x)^2}$$

$$f'(x) =$$

Aufgabe 5.83

$$f(x) = \sin(2x)$$

$$f'(x) =$$

Aufgabe 5.84

$$f(x) = e^{x^2+1} \cdot \ln(x+1)$$

$$f'(x) =$$

Aufgabe 5.85

$$f(x) = -14 \sin x - 3x^2$$

$$f'(x) =$$

Aufgabe 5.86

$$f(x) = \frac{\sqrt{2}}{x} - \frac{x}{\pi}$$

$$f'(x) =$$

Aufgabe 5.87

$$f(x) = \ln \frac{1-x^2}{1+x^2}$$

$$f'(x) =$$

Aufgabe 5.88

$$f(x) = 2^{\sin x}$$

$$f'(x) =$$

Aufgabe 5.89

$$f(x) = \sqrt{\frac{4x^2 - 5}{x^2 + 3x}}$$

$$f'(x) =$$

Aufgabe 5.90

$$f(x) = (x - a) \cdot e^{2-x/a}$$

$$f'(x) =$$

Aufgabe 5.91

$$f(x) = x^2 - 2x + 1$$

$$f'(x) =$$

$$f''(x) =$$

$$f'''(x) =$$

Aufgabe 5.92

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - \sqrt{2}x + 1$$

$$f'(x) =$$

$$f''(x) =$$

$$f'''(x) =$$

Aufgabe 5.93

$$f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^3$$

$$f'(x) =$$

$$f''(x) =$$

$$f'''(x) =$$

Aufgabe 5.94

$$f(x) = \sin x;$$

$$f'(x) =$$

$$f''(x) =$$

$$f'''(x) =$$

$$f^{(4)}(x) =$$

Aufgabe 5.95

$$f(x) = e^{-x}$$

$$f'(x) =$$

$$f''(x) =$$

$$f'''(x) =$$

$$f^{(4)}(x) =$$

Aufgabe 5.96

$$f(x) = x^3$$

$$f'(x) =$$

$$f''(x) =$$

$$f'''(x) =$$

$$f^{(4)}(x) =$$

Aufgabe 6.1

Berechne für die stückweise definierte Funktion f .

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{falls } x < -5 \\ 4x + 1 & \text{falls } -5 \leq x < 4 \\ 2\sqrt{x} & \text{falls } 4 \leq x \end{cases}$$

(a) $f(0)$

(b) $f(-10)$

(c) $f(4)$

(d) $f(1)$

(e) $f(-5)$

Aufgabe 6.2

Ist die Funktion $f(x) = 4x + 3$ an der Stelle $x_0 = 0$ stetig?

Aufgabe 6.3

Ist die Funktion $f(x) = \sqrt{x^2}$ an der Stelle $x_0 = 0$ stetig?

Aufgabe 6.4

Ist die Funktion $f(x) = \frac{1}{x+1}$ an der Stelle $x_0 = -1$ stetig?

Aufgabe 6.5

Ist die Funktion $f(x) = |\sin x|$ an der Stelle $x_0 = \pi$ stetig?

Aufgabe 6.6

Ist die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 4x - 5 & \text{für } x \leq 3 \\ 2x + 1 & \text{für } x > 3 \end{cases}$$

an der Stelle $x_0 = 3$ stetig?

Aufgabe 6.7

Ist die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x - 1} & \text{für } x \neq 1 \\ 2 & \text{sonst} \end{cases}$$

an der Stelle $x_0 = 1$ stetig?

Aufgabe 6.8

Ist die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

an der Stelle $x_0 = 0$ stetig?

Aufgabe 6.9

Ist die Funktion $f(x) = 1/x$ stetig?

Aufgabe 6.10

Ist die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} x/7 + 1 & \text{für } x < 3 \\ \sqrt{x-1} & \text{für } x \geq 3 \end{cases}$$

stetig?

Aufgabe 6.11

Für welchen Wert von a ist die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 + 3x + 1 & \text{für } x < 2 \\ x^3 + ax - 4 & \text{für } x \geq 2 \end{cases}$$

an der Stelle $x_0 = 2$ stetig?

Aufgabe 6.12

Ist die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} e^x & \text{für } x \leq 0 \\ x + 1 & \text{für } x > 0 \end{cases}$$

f an der Stelle $x_0 = 0$ differenzierbar?

Aufgabe 6.13

Bestimme die Werte der Parameter $a \in \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{R}$ so, dass die Funktion f an der Stelle $x = 4$ differenzierbar ist.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + bx + a & \text{für } x < 4 \\ a\sqrt{x} + b & \text{für } x \geq 4 \end{cases}$$

7.1–7.9: Untersuche, ob die Funktion f auf dem Intervall I monoton wachsend, monoton fallend oder nicht monoton ist.

Aufgabe 7.1

$$f(x) = x^2; I = (-\infty, 0]$$

Aufgabe 7.2

$$f(x) = \sqrt{x}; I = (0, \infty)$$

Aufgabe 7.3

$$f(x) = 1/x; I = (-\infty, 0)$$

Aufgabe 7.4

$$f(x) = x^3; I = \mathbb{R}$$

Aufgabe 7.5

$$f(x) = \sin x; I = [\pi, 2\pi]$$

Aufgabe 7.6

$$f(x) = -2x; I = \mathbb{R}$$

Aufgabe 7.7

$$f(x) = e^x + e^{-x}; I = \mathbb{R}$$

Aufgabe 7.8

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 - 5x - 29; I = [1, 3]$$

Aufgabe 7.9

$$f(x) = \ln x; I = (0, \infty)$$

7.10–7.13: Bestimme die Intervalle, in denen die Funktion f monoton wachsend bzw. monoton fallend ist.

Aufgabe 7.10

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 6x - 3$$

Aufgabe 7.11

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$$

Aufgabe 7.12

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 4$$

Aufgabe 7.13

$$f(x) = x + \cos x$$

Untersuche, ob die Funktion *gerade*, *ungerade* oder *weder gerade noch ungerade* ist.

Aufgabe 8.1

$$f(x) = x^3$$

Aufgabe 8.2

$$f(x) = -x^2$$

Aufgabe 8.3

$$f(x) = 1$$

Aufgabe 8.4

$$f(x) = -7$$

Aufgabe 8.5

$$f(x) = 0$$

Aufgabe 8.6

$$f(x) = 3x^8$$

Aufgabe 8.7

$$f(x) = x^7 \cdot x^5$$

Aufgabe 8.8

$$f(x) = x^6 \cdot x^3$$

Aufgabe 8.9

$$f(x) = \frac{1}{x^3}$$

Aufgabe 8.10

$$f(x) = 7x^{-2}$$

Aufgabe 8.11

$$f(x) = (x^{-3})^5$$

Aufgabe 8.12

$$f(x) = \frac{2}{x^7}$$

Aufgabe 8.13

$$f(x) = -x^{-8}$$

Aufgabe 8.14

$$f(x) = x^4 \cdot x^{-4}$$

Aufgabe 8.15

$$f(x) = x - 1$$

Aufgabe 8.16

$$f(x) = 4x^3 + 1$$

Aufgabe 8.17

$$f(x) = 4x^8 + 3x^4 - 2x^2$$

Aufgabe 8.18

$$f(x) = x^9 - \frac{1}{2}x^7$$

Aufgabe 8.19

$$f(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$$

Aufgabe 8.20

$$f(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}$$

Aufgabe 8.21

$$f(x) = x^4 - x^{-2}$$

Aufgabe 8.22

$$f(x) = 3x^5 - 4x^3 + x - 3$$

Aufgabe 8.23

$$f(x) = \sin x$$

Aufgabe 8.24

$$f(x) = \cos(x)$$

Aufgabe 8.25

$$f(x) = \tan(x)$$

Aufgabe 8.26

$$f(x) = \sqrt{x}$$

Aufgabe 8.27

$$f(x) = e^x$$

Aufgabe 8.28

$$f(x) = \ln(x)$$

Aufgabe 8.29

$$f(x) = |x|$$

Aufgabe 8.30

$$f(x) = |x^3| + 1$$

Aufgabe 8.31

$$f(x) = \sqrt{|x|}$$

Aufgabe 8.32

$$f(x) = |x^3| + \sin(x)$$

Aufgabe 8.33

$$f(x) = e^x + e^{-x}$$

Aufgabe 8.34

$$f(x) = \sin(x) \cdot \cos(x)$$

Aufgabe 8.35

$$f(x) = x|x^3|$$

Aufgabe 8.36

$$f(x) = x \cdot \sin(x)$$

Aufgabe 8.37

$$f(x) = \sin^2 x \cdot \cos x$$

Aufgabe 8.38

$$f(x) = \ln(|x|) + \cos(x) + x^6$$

Aufgabe 8.39

$$f(x) = e^{x^2} - x$$

Aufgabe 8.40

$$f(x) = (x + 1)^2$$

Aufgabe 8.41

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$$

Aufgabe 8.42

$$f(x) = (x + 1)(x + 3)(x - 4)$$

Aufgabe 8.43

$$f(x) = |x^3 + x^2 + x|$$

Aufgabe 8.44

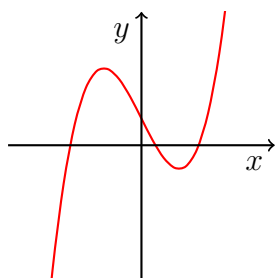
$$f(x) = \frac{x}{x^4 + x^2}$$

Aufgabe 8.45

$$f(x) = (x^2 + 1)^5$$

Aufgabe 9.1

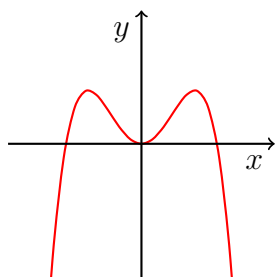
Beurteile aufgrund des asymptotischen Verhaltens, ob der Graph



zur Funktion $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x + 1$ passen kann.

Aufgabe 9.2

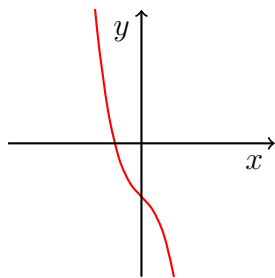
Beurteile aufgrund des asymptotischen Verhaltens, ob der Graph



Zur Funktion $f(x) = \frac{1}{8}x^4 - x^2$ gehören kann.

Aufgabe 9.3

Untersuche aufgrund des asymptotischen Verhaltens, ob der Graph



zur Funktion $f(x) = -x^3 - x - 2$ gehören kann.

Aufgabe 9.4

Untersuche das asymptotische Verhalten von $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 4$.

Aufgabe 9.5

Untersuche das asymptotische Verhalten von $f(x) = x^4 + x^3 + 1$.

Aufgabe 9.6

Untersuche das asymptotische Verhalten von $f(x) = 4x + x^2 - x^6 + x^4$.

Aufgabe 9.7

Untersuche das asymptotische Verhalten von $f(x) = 1 - 5x + 3x^2 - 2x^3$.

Aufgabe 9.8

Untersuche das asymptotische Verhalten von $f(x) = (x - 1)(2 - x)(3 - x)$.

Aufgabe 9.9

Untersuche das asymptotische Verhalten von $f(x) = \frac{x + 2}{x - 1}$.

Aufgabe 9.10

Untersuche das asymptotische Verhalten von $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 3}{x + 2}$.

Aufgabe 9.11

Untersuche das asymptotische Verhalten von $f(x) = \frac{x+1}{x^3+1}$.

Aufgabe 9.12

Untersuche das asymptotische Verhalten von $f(x) = \frac{4x^2 - 4x + 5}{2x - 1}$.

Aufgabe 9.13

Untersuche das asymptotische Verhalten von $f(x) = (x^3 - 3x + 1)e^{-x}$.

Aufgabe 9.14

Untersuche das asymptotische Verhalten von $f(x) = \ln\left(1 + \frac{x}{|x|}\right)$.

Aufgabe 9.15

Untersuche das asymptotische Verhalten von $f(x) = \frac{\ln(1 + |x|)}{1 + x^2}$.

Aufgabe 9.16

Untersuche das asymptotische Verhalten von $f(x) = e^x \cdot \sin(x)$.

Aufgabe 10.1

Bestimme die exakten Nullstellen der Funktion f ohne Taschenrechner.

(a) $f(x) = 3 - 7x$

(b) $f(x) = x^2 - \sqrt{3}x$

(c) $f(x) = x^2 - 3x - 7$

(d) $f(x) = x^2 + 4x + 5$

(e) $f(x) = x^4 - 3x^2 + 2$

(f) $f(x) = x^3 + x^2 - 6x$

Aufgabe 10.2

Bestimme exakt alle reellen Nullstellen von f

(a) $f(x) = -3x(x - 4)(x + 5)(2x + 1)(x - \sqrt{2})(x + \pi)$

(b) $f(x) = \frac{5(x - 2)^2(x - 1.5)(x + 7)}{x(2x - 3)(x - 2)}$

Aufgabe 10.3

Bestimme exakt alle reellen Nullstellen von f .

(a) $f(x) = \sin(2x)$

(b) $f(x) = \cos\left(\frac{1}{3}x + 1\right)$

(c) $f(x) = \tan(4 - x)$

Aufgabe 10.4

Bestimme exakt alle Nullstellen von $f(x) = \cos x + 1$.

Aufgabe 10.5

Bestimme exakt alle reellen Nullstellen von f .

(a) $f(x) = \ln x - 1$

(b) $f(x) = \ln(x^2 - 5x + 5)$

Aufgabe 10.6

Bestimme alle reellen Nullstellen mit Hilfe des Horner-Schemas.

(a) $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$

(b) $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$

Aufgabe 10.7

Bestimme den Ordinatenabschnitt der Funktion f .

(a) $f(x) = x^4 - 2x^2 + 3$

(b) $f(x) = (x - 4)^2$

(c) $f(x) = \frac{x^3 - 2x + 8}{2x^2 + x - 12}$

(d) $f(x) = e^x + 1$

(e) $f(x) = 2 - \cos(x)$

(f) $f(x) = \ln(x^2 + 5)$

Aufgabe 10.8

Bestimme alle reellen Nullstellen von f mit Hilfe des Taschenrechners.

(a) $f(x) = x^4 + \frac{3}{2}x^3 + \frac{3}{2}x - 1$

(b) $f(x) = x^6 - 4x^5 + 7x^4 - 8x^3 + 7x^2 - 4x + 1$

(c) $f(x) = \frac{x^3 - 5x^2 + 7x - 3}{x^3 - 2x^2 - x + 2}$

(d) $f(x) = x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 11x - 6$

Aufgabe 10.9

Bestimme für die Funktion f und die Startwerte x_0, x_1 mit der Sekantenmethode eine Näherung für eine Nullstelle von f . Berechne $x_2, x_3, \dots, x_k$ mit einer Genauigkeit von 4 signifikanten Stellen und stoppe die Ausführung, sobald $f(x_k) < 10^{-2}$ gilt.

(a) $f(x) = e^{-x} - \frac{1}{2}x; x_1 = 0, x_2 = 1$

(b) $f(x) = \sin(x) - x^{-1}; x_1 = 1, x_2 = 2$ Winkelmaß?

(c) $f(x) = x^x - \sqrt{x}; x_1 = 1, x_2 = 2$