Differenzialrechnung

Theorie

Version vom 21. August 2020

Inhaltsverzeichnis

1 Grenzwerte

1.1 Grenzwerte von Folgen

Beispiel 1.1

$a_n = \frac{1}{n}$

Beispiel 1.2

$a_n = n!$

Beispiel 1.3

$a_n = \frac{2n}{n+1}$

Beispiel 1.4

$a_n = (-2)^n$

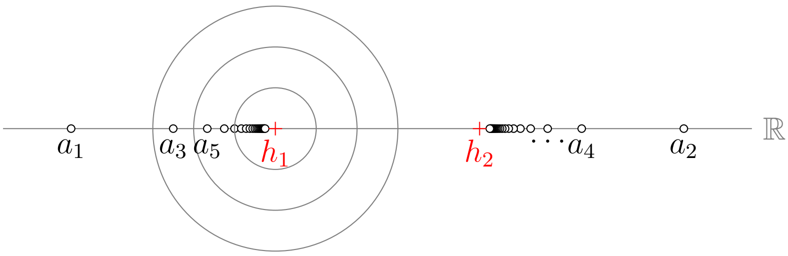
Beispiel 1.5

$a_n = (-1)^n \cdot \frac{n}{n+1}$

Häufungsstelle

Eine Häufungsstelle einer Folge (a_n) ist eine Zahl a mit der Eigenschaft, dass in jeder Umgebung von a unendlich viele Glieder der Folge liegen.

Visualisierungsversuch von Häufungspunkten

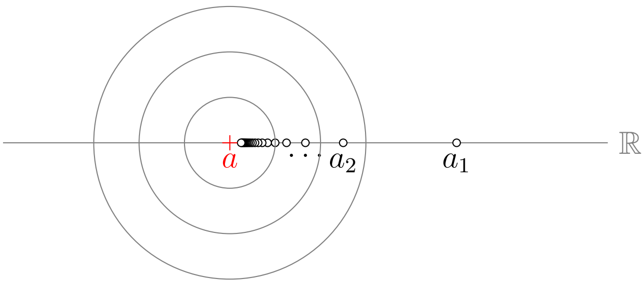


Grenzwert

Ein Grenzwert ist eine Zahl a mit der Eigenschaft, dass in jeder Umgebung von a alle bis auf endlich viele Glieder der Folge liegen.

Eine Folge mit einem Grenzwert wird *konvergent* genannt und man schreibt

Visualisierungsversuch eines Grenzwerts



Formale Definition der Konvergenz

Eine Folge (a_n) ist konvergent mit dem Grenzwert a, wenn es für jede (noch so kleine) Zahl $\varepsilon > 0$ einen Index $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ gibt, so dass die Ungleichung

$$|a - a_n| < \varepsilon$$

für alle $n \geq n_\varepsilon$ erfüllt ist.

Das ε in n_ε zeigt an, dass der Index n_ε in der Regel von ε abhängig ist.

Nullfolge

Eine Folge (a_n) mit dem Grenzwert $a = 0$ heisst *Nullfolge*.

Divergenz

Eine Folge (a_n), die nicht konvergent ist, wird *divergent* genannt.

Beispiel 1.6

Beweis der Konvergenz von Beispiel 1.1: $a_n = 1/n$

vermuteter Grenzwert:

Beispiel 1.7

Ist die Folge $a_n = 1/2^n$ konvergent?

vermuteter Grenzwert:

Reihen

Zur Erinnerung: Ist (a_n) eine beliebige Folge, so ist die durch

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} a_n$$

definierte Folge (s_n) die *Teilsummenfolge* oder *Reihe* von (a_n).

Beispiel 1.8

$a_n = 3 + 2 \cdot n$

Beispiel 1.9

$a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$

Beispiel 1.10

$a_n = \frac{1}{n}$

1.2 Grenzwerte von Funktionen

Gegeben ist eine Funktion f und eine Stelle x_0

Wir untersuchen, wie sich die Funktionswerte $f(x_n) = y_n$ verhalten, wenn x_n gegen x_0 strebt.

Beispiel 1.11

(a) $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ und $x_0 = 3$

x_n	$f(x_n)$

x_n	$f(x_n)$

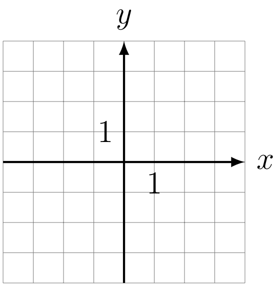
(b) $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ und $x_0 = 1$

x_n	$f(x_n)$

x_n	$f(x_n)$

Graph von f

Für $x \neq 1$ gilt:



Definition

Eine Funktion f besitzt an der Stelle x_0 den Grenzwert g, wenn *für jede Folge* (x_n) mit $x_n \to x_0$ die Folge (y_n) der Funktionswerte $y_n = f(x_n)$ gegen g konvergiert.

Beispiel 1.12

$$f(x) = \frac{x^3 - 4x^2 + x + 6}{x + 1}$$

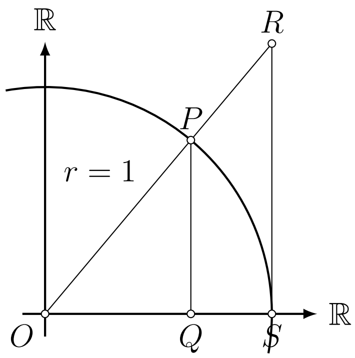
$f(-1) =$

Beispiel 1.13

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = ?$$

x	$\sin(x)/x$

x	$\sin(x)/x$



Beispiel 1.14

$f(x) = \dfrac{\cos x + 1}{x - \pi}$; $x_0 = \pi$

Funktionswert:

Kürze mit Hilfe der Produktformel (Formelsammlung S. 99)

Substitution:

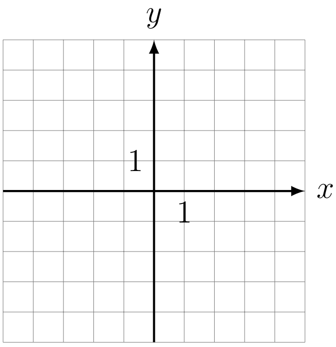
Beispiel 1.15

$f(x) = \dfrac{x + 1}{x - 1}$, $x_0 = 1$

x	$f(x)$

x	$f(x)$

Graph von f



Asymptotisches Verhalten

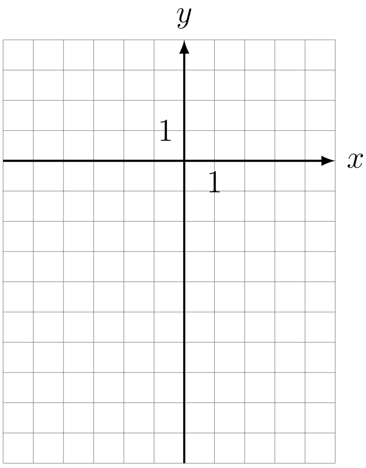
Wie verhält sich $f(x)$ für grosse $|x|$?

Beispiel 1.16

$f(x) = \dfrac{x^2+1}{x+1}$, $x_0 = -1$

Polynomdivsion (Horner):

Graph von f



1.3 Stetigkeit

Eine Funktion f ist an der Stelle x_0 *stetig*, wenn gilt:

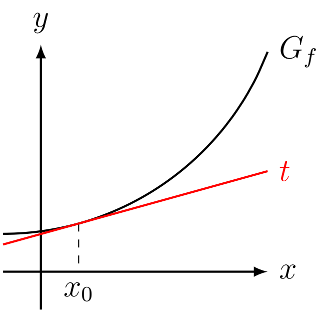
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

wobei alle Ausdrücke in der Gleichung definiert sein müssen.

2 Der Differenzialquotient

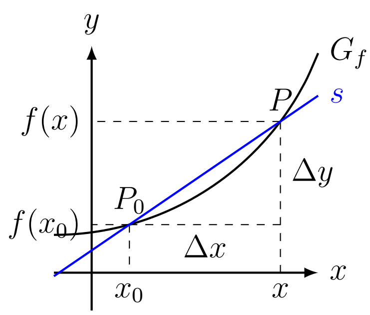
Das Tangentenproblem

Gegeben: eine geeignete Funktion f und eine Stelle x_0



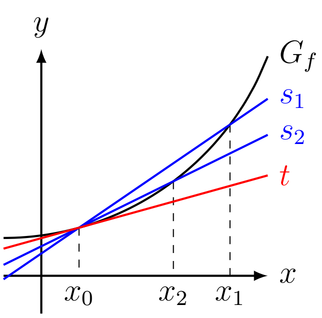
Gesucht: Steigung der Tangente von G_f an der Stelle x_0.

Differenzenquotient



Steigung der Sekante durch P_0 und P:

Der Differenzialquotient



Existiert der Grenzwert

so wird dieser *Differenzialquotient* oder *Ableitung* der Funktion f an der Stelle x_0 genannt und mit $f'(x_0)$ abgekürzt.

Geometrische Deutung

Der Grenzwert

ist gleich der Steigung der Tangente an den Graphen von f an der Stelle x_0.
Aus praktischen Gründen ersetzen wir in der obigen Formel $x = x_0 + h$ und schreiben

Beispiel 2.1

Gesucht: Gleichung der Tangente und Normale von $f(x) = x^2$ an der Stelle $x_0 = 1$.

Gleichung der Tangente:

Funktionswert:

Steigung:

$P(1, 1) \in t$:

$\Rightarrow$

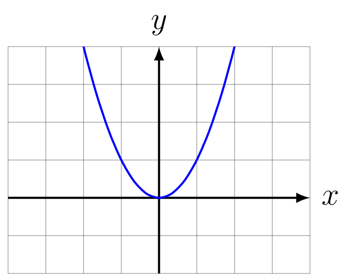
Eine *Normale* ist eine Gerade, die senkrecht zu einer anderen Gerade steht. Hier steht die Normale senkrecht zur Tangente und geht ebenfalls durch den Kurvenpunkt $\big(x_0, f(x_0)\big)$.

Gleichung der Normalen:

Steigung:

$P(1, 1) \in n$:

$\Rightarrow$



Beispiel 2.2

Gesucht: Gleichung der Tangente und Normale von $f(x) = 1/x$ an der Stelle $x_0 = 2$.

Gleichung der Tangente:

Funktionswert:

Steigung:

$P\left(2, \frac{1}{2}\right) \in t$:

$\Rightarrow$

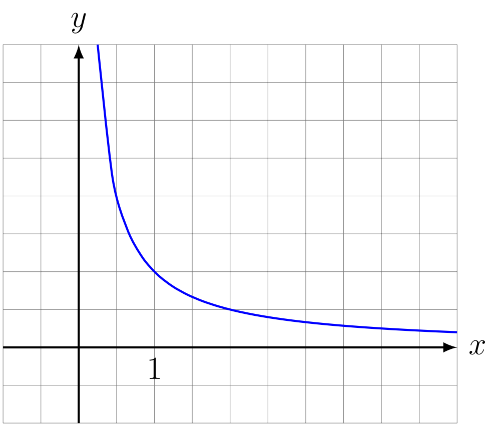
Gleichung der Normalen:

Steigung:

$P\left(2, \frac{1}{2}\right) \in n$:

$\Rightarrow$

Graph:



Beispiel 2.3

Gesucht: Gleichung der Tangente und Normale von $f(x) = \sqrt{x}$ an der Stelle $x_0 = 1$.

Gleichung der Tangente:

Funktionswert:

Steigung:

$P\,(1,1) \in t$:

$\Rightarrow$

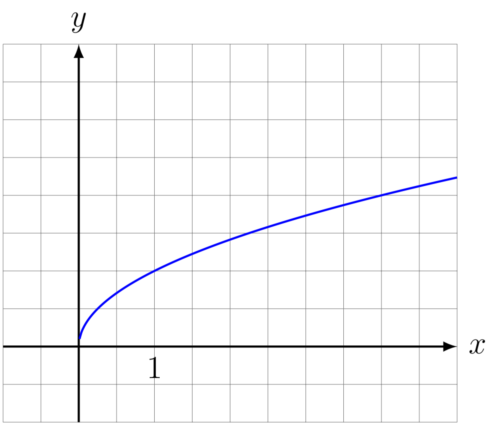
Gleichung der Normalen:

Steigung:

$P\,(1,1) \in n$:

$\Rightarrow$

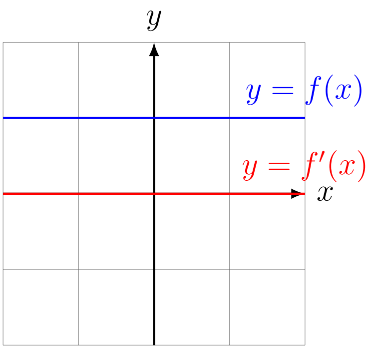
Graph:



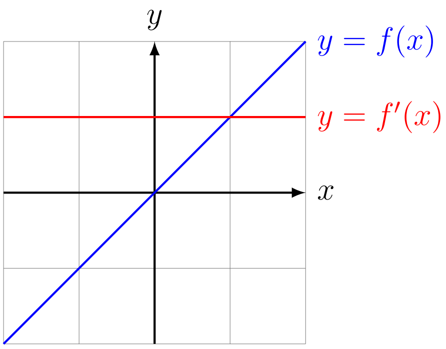
3 Die Ableitungsfunktion

3.1 Elementare Funktionen

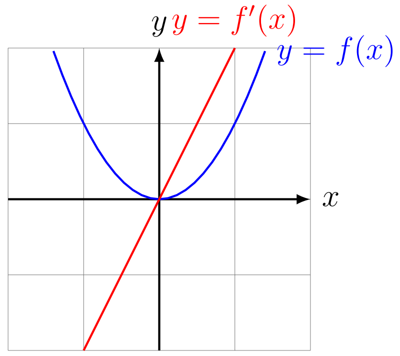
Die konstante Funktion $f(x) = c$



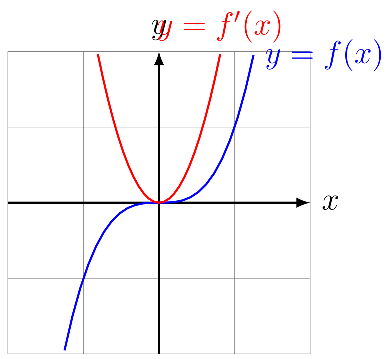
Die Identität $f(x) = x$



Die quadratische Funktion $f(x) = x^2$



Die kubische Funktion $f(x) = x^3$



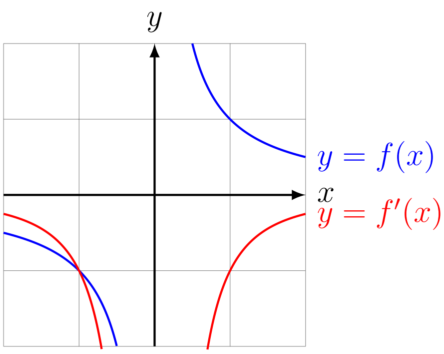
Die quartische Funktion $f(x) = x^4$

Vermutung:

Die allgemeine Potenzfunktion $f(x) = x^n$

Beweis:

Die reziproke Funktion $f(x) = 1/x$



Die Wurzelfunktion $f(x) = \sqrt{x}$

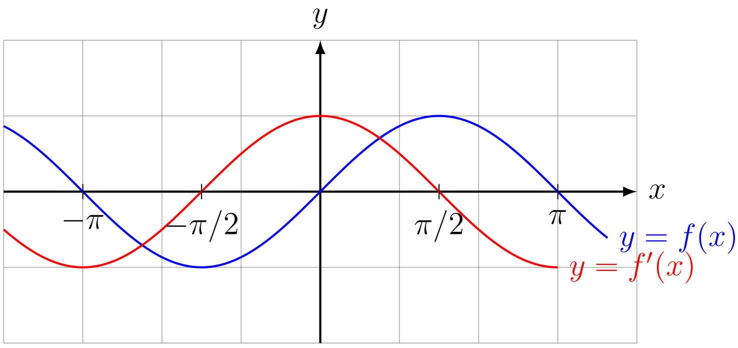
Verallgemeinerung

$\left[x^a\right]' = a \cdot x^{a-1}$ (Potenzregel)

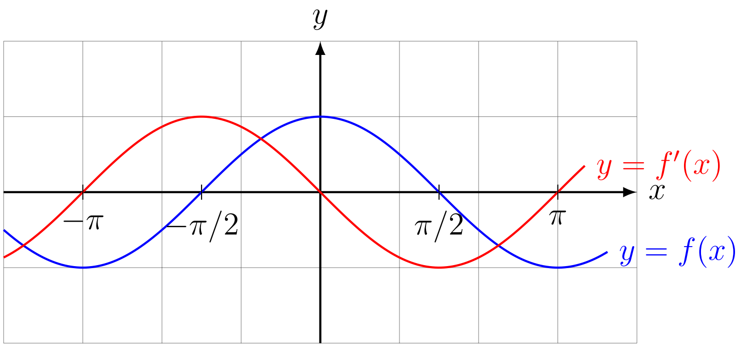
Dadurch lassen sich (b)–(h) verallgemeinern:

- $\left[x\right]'$
- $\left[x^2\right]'$
- $\left[x^7\right]'$
- $\left[1/x\right]'$
- $\left[\sqrt{x}\right]'$

Die Sinusfunktion $f(x) = \sin x$

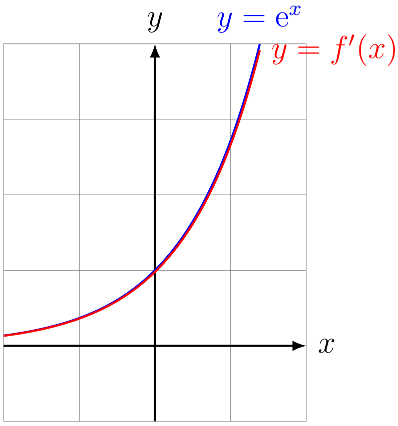


Die Cosinusfunktion $f(x) = \cos x$

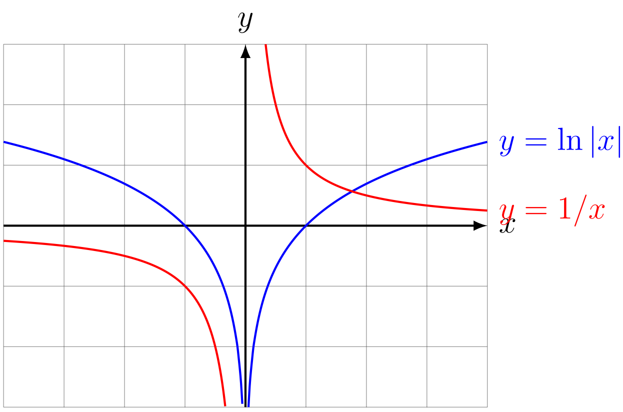


Die Exponentialfunktion $f(x) = \mathbf{e}^x$

(e $\approx$ 2.71828 Eulersche Zahl)



Die Logarithmusfunktion $f(x) = \ln x$



Es gilt sogar: $\big[\ln|x|\big]' = 1/x$

3.2 Der Differenzialoperator

Ist eine Funktion f für jedes x aus ihrem Definitionsbereich differenzierbar, so wird durch f' eine neue Funktion definiert:

Funktion	$x \to f(x)$
Ableitungsfunktion	$x \to f'(x)$

Diese Tabelle können wir auch so interpretieren, dass der Funktion f, eine Funktion f' zugeordnet wird. Diese „Meta-Funktion“, welche einer Funktion ihre Ableitungsfunktion zuordnet, wird *Differentialoperator* genannt und so dargestellt:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} : f \to f' \quad \text{oder} \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f = f'$$

Beispiel: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \cos x = -\sin x$

3.3 Zusammenfassung

$f(x)$	$f'(x)$
c (const.)	0
x	1
$\sqrt{x}$	$1/(2\sqrt{x}) \quad (x > 0)$
$1/x$	$-1/x^2 \quad (x \neq 0)$
$x^r \ (r \in \mathbb{R})$	$r \cdot x^{r-1}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
e^x	e^x
$\ln \lvert x \rvert$	$1/x$

Mehr Ableitungsfunktionen erhalten wir aus den Ableitungsregeln.

4 Ableitungsregeln

Wie werden Summen, Produkte, Quotienten, und Verkettungen von Funktionen differenziert?

4.1 Summenregel

Sind die Funktionen f und g an der Stelle x differenzierbar, dann gilt:

$$\big[f(x) + g(x)\big]' = f'(x) + g'(x).$$

Beweis

$$\begin{aligned}
\big[f(x) + g(x)\big]' &= \lim_{h\to 0} \frac{\big[f(x+h) + g(x+h)\big] - \big[f(x) + g(x)\big]}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x) + g(x+h) - g(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\
&= f'(x) + g'(x)
\end{aligned}$$

Beispiel 4.1

4.2 konstante Faktoren

Ist c eine reelle Zahl und die Funktion f an der Stelle x differenzierbar, dann gilt:

$$\big[c \cdot f(x)\big]' = c \cdot f'(x).$$

Beweis

$$\begin{aligned}
\big[c \cdot f(x)\big]' &= \lim_{h\to 0} \frac{c \cdot f(x+h) - c \cdot f(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{c \cdot \big[f(x+h) - f(x)\big]}{h} \\
&= c \cdot \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
&= c \cdot f'(x)
\end{aligned}$$

Beispiel 4.2

Beispiel 4.3

4.3 Produktregel

Sind die Funktionen f und g an der Stelle x differenzierbar, dann gilt

$$\big[f(x) \cdot g(x)\big]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x).$$

Beweis

$$\big[f(x) \cdot g(x)\big]' = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{\big[f(x+h) - f(x)\big] \cdot g(x+h) + f(x) \cdot \big[g(x+h) - g(x)\big]}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} \left[\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \cdot g(x+h)\right] + \lim_{h \to 0} \left[f(x) \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h}\right]$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \cdot \lim_{h \to 0} g(x+h) + f(x) \cdot \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$
$$= f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

Beispiel 4.4

Beispiel 4.5

4.4 Ableitung des Kehrwerts

Ist die Funktion g an der Stelle x differenzierbar und $g(x) \neq 0$, dann gilt

$$\left[\frac{1}{g(x)}\right]' = -\frac{g'(x)}{g^2(x)}.$$

Beweis

$$\begin{aligned}
\left[\frac{1}{g(x)}\right]' &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[\frac{1}{g(x+h)} - \frac{1}{g(x)}\right] \\
&= \lim_{h\to 0}\left[\frac{1}{h} \cdot \frac{g(x) - g(x+h)}{g(x+h)\cdot g(x)}\right] \\
&= \lim_{h\to 0}\left[\frac{-\big[g(x+h) - g(x)\big]}{h} \cdot \frac{1}{g(x+h)\cdot g(x)}\right] \\
&= -\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h) - g(x)}{h} \cdot \lim_{h\to 0}\frac{1}{g(x+h)\cdot g(x)} \\
&= -g'(x)\cdot\frac{1}{g(x)^2} = -\frac{g'(x)}{g(x)^2}
\end{aligned}$$

4.5 Quotientenregel

Sind die Funktionen f und g an der Stelle x differenzierbar und ist $g(x) \neq 0$, dann gilt

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{g(x)^2}$$

Beweis

$$\begin{aligned}
\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' &= \left[f(x)\cdot\frac{1}{g(x)}\right]' \\
&= f'(x)\cdot\frac{1}{g(x)} + f(x)\cdot\left[\frac{1}{g(x)}\right]' \quad \text{(Produktregel)} \\
&= f'(x)\cdot\frac{1}{g(x)} + f(x)\cdot\left(-\frac{g'(x)}{g(x)^2}\right) \quad \text{(Kehrwert-Regel)} \\
&= f'(x)\cdot\frac{g(x)}{g(x)^2} - f(x)\cdot\frac{g'(x)}{g(x)^2} \\
&= \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{g(x)^2}
\end{aligned}$$

„direkter“ Beweis

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)\cdot g(x) - f(x)\cdot g(x+h)}{g(x+h)\cdot g(x)\cdot h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)\cdot g(x) - f(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g(x+h)}{g(x+h)\cdot g(x)\cdot h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\big[f(x+h) - f(x)\big]\cdot g(x) - f(x)\cdot \big[g(x+h) - g(x)\big]}{g(x+h)\cdot g(x)\cdot h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \cdot \frac{g(x)}{g(x+h)\cdot g(x)}\right) - \lim_{h\to 0} \left(\frac{f(x)}{g(x+h)\cdot g(x)} \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h}\right)$$

$$= \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{g(x)^2}$$

Beispiel 4.6

4.6 Kettenregel

Ist die Funktion g an der Stelle x differenzierbar und ist die Funktion f an der Stelle $y = g(x)$ differenzierbar, so gilt:

$$\big[f\big(g(x)\big)\big]' = f'(g(x))\cdot g'(x)$$

Beweis

Vorbereitungen:

Setze $k \overset{(*)}{=} g(x+h) - g(x) \quad \Leftrightarrow \quad g(x+h) \overset{(**)}{=} g(x) + k$

Da g an der Stelle x differenzierbar ist, gilt

$\lim\limits_{h\to 0} k = \lim\limits_{h\to 0} \big[g(x+h) - g(x)\big] = 0$

Wenn h gegen 0 konvergiert, dann konvergiert k gegen 0. $(***)$

$$
\begin{aligned}
\big[f\big(g(x)\big)\big]' &= \lim_{h\to 0} \frac{f\big(g(x+h)\big) - f\big(g(x)\big)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(g(x)+k) - f(g(x))}{h} \quad \text{mit } (**) \\
&= \lim_{h\to 0} \left[\frac{f(g(x)+k) - f(g(x))}{k} \cdot \frac{k}{h}\right] \quad \text{multipliziere mit } 1 = \frac{k}{k} \\
&= \lim_{h\to 0} \left[\frac{f(g(x)+k) - f(g(x))}{k} \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h}\right] \quad \text{mit } (*) \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(g(x)+k) - f(g(x))}{k} \cdot \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\
&= \lim_{k\to 0} \frac{f(g(x)+k) - f(g(x))}{k} \cdot \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \quad \text{mit } (***) \\
&= f'(g(x)) \cdot g'(x)
\end{aligned}
$$

Beispiel 4.7

Beispiel 4.8

Beispiel 4.9

Beispiel 4.10

4.7 Die Ableitung der Umkehrfunktion

Ist f^{-1} die Umkehrfunktion von f, so gilt:

$f\big(f^{-1}(x)\big) = x.$

Nun leitet man die linke Seite (Kettenregel) und die rechte Seite der Gleichung ab:

$f'\big(f^{-1}(x)\big) \cdot (f^{-1})'(x) = 1$

und löst die Gleichung algebrisch nach $(f^{-1})'(x)$ auf:

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'\big(f^{-1}(x)\big)}$$

Beispiel 4.11

Beispiel 4.12

Beispiel 4.13

4.8 Höhere Ableitungen

Leitet man die Ableitung einer Funktion ein zweites Mal ab, so spricht man von der zweiten Ableitung. Analog wird die dritte, vierte, …, n-te Ableitung definiert.

- Statt $\big(f'\big)'$ schreibt man f'' oder $\dfrac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}$
- Statt $\big((f')'\big)'$ schreibt man f''' oder $\dfrac{\mathrm{d}^3 f}{\mathrm{d}x^3}$
- Statt $\big(((f')')'\big)'$ schreibt man $f^{(4)}$ oder $\dfrac{\mathrm{d}^4 f}{\mathrm{d}x^4}$
- Statt $\big((((f')')')'\big)'$ schreibt man $f^{(5)}$ oder $\dfrac{\mathrm{d}^5 f}{\mathrm{d}x^5}$
- usw.

Beispiel 4.14

Beispiel 4.15

4.9 Implizite Differentiation

Beispiel 1

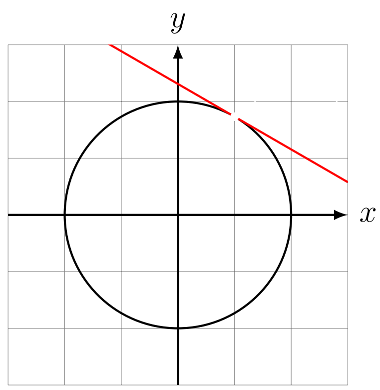
Berechne die Steigung der Tangente im Punkt $P(1, \sqrt{3})$ der Kurve $k\colon x^2 + y^2 = 4$.

(a) Leite die linke und rechte Seite der impliziten Funktionsgleichung nach x ab. Dabei werden Ausdrücke der Form $h(y)$ mit der Kettenregel nach x abgeleitet:

$$\frac{\mathrm{d}h(y)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}h(y)}{\mathrm{d}y} \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}h(y)}{\mathrm{d}y} \cdot y'$$

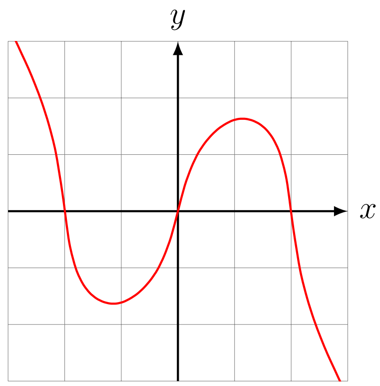
(b) Löse die Gleichung aus Schritt (a) nach y' auf.

(c) Setze, falls verlangt, zur Bestimmung der Steigung die Koordinaten (x, y) auf der rechten Seite der Gleichung $y' = \ldots$ aus Schritt 2 ein.



Beispiel 2

Berechne die Winkel zwischen der Kurve $3x^3 - 12x + y^3 + 3y = 0$ und der x-Achse.



Beispiel 3

Berechne die Ableitung von $y = x^x$ für $(x > 0)$.

5 Stetigkeit und Differenzierbarkeit

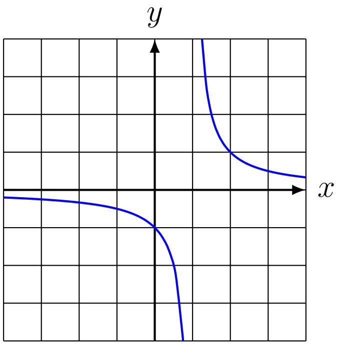
5.1 Definitionslücken

Ist eine Funktion f an einer einzelnen Stelle x_0 nicht definiert, so spricht man von einer *Definitionslücke*.

Im „Schulalltag“ entstehen Definitionslücken an den Stellen, wo man durch Null dividiert.

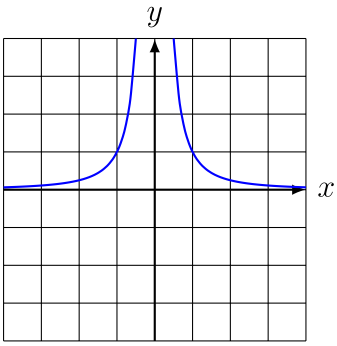
Beispiel 5.1

$f(x) = \dfrac{1}{x-1}$



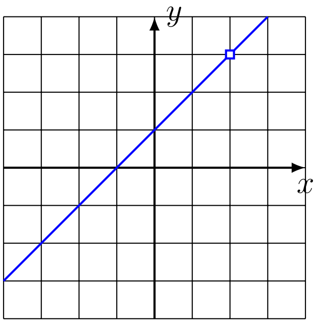
Beispiel 5.2

$f(x) = \dfrac{1}{x^2}$



Beispiel 5.3

$f(x) = \dfrac{(x-2)(x+1)}{x-2} \overset{*}{=} x+1 \qquad [* \text{ nur erlaubt, wenn } x \neq 2]$



5.2 Stetigkeit

Anschaulich

Eine Funktion f ist an einer Stelle x_0 *stetig*, wenn der Graph von f in einer Umgebung von x_0 ohne Unterbruch gezeichnet werden kann.

Achtung: Diese Beschreibung kann in einigen Fällen irreführend sein (siehe Beispiel 5.5).

Formal (Limeskriterium)

Eine Funktion f ist an der Stelle x_0 stetig, wenn der Funktionswert und der Grenzwert an der Stelle x_0 existieren und übereinstimmen; d. h. wenn

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Eine Funktion ist auf einem Intervall I stetig, wenn sie an jeder Stelle des Intervalls I stetig ist.

Bemerkung

Fordert man nur, dass an der Stelle x_0 der links- oder der rechtsseitige Grenzwert

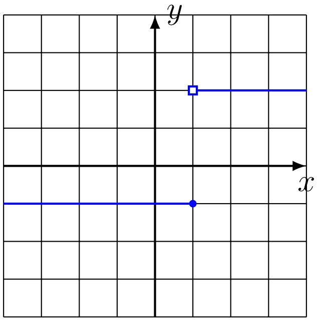
$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0) \quad \text{bzw.} \quad \lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$$

existiert, so spricht man von *links- bzw. rechtsseitiger* Stetigkeit.

Beispiel:

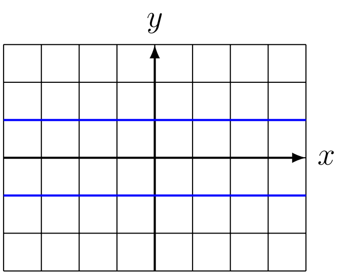
Beispiel 5.4

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{wenn } x \leq 1 \\ 2 & \text{sonst} \end{cases}$$



Beispiel 5.5

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } x \in \mathbb{Q} \\ -1 & \text{wenn } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$



Vorsicht

Die Funktion $f(x) = 1/x$ ist für jedes $x \in D$ stetig!

f ist für $x = 0$ bloss nicht definiert.

Eine Auswahl stetiger Funktionen

- Potenzfunktionen: x^k, $k \in \mathbb{Z}$
- Trigonometrische Funktionen: $\sin(x)$, $\cos(x)$, $\tan(x)$
- Exponentialfunktionen: a^x
- Logarithmusfunktionen: $\log_a x$

Eigenschaften

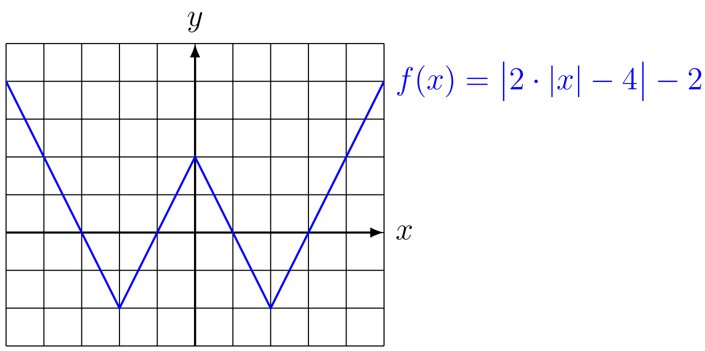
Sind die Funktionen f und g auf einem gemeinsamen Definitionsbereich stetig, dann gilt:

- $f + g$ ist stetig
- $f - g$ ist stetig
- $f \cdot g$ ist stetig
- f/g ist stetig
- $f \circ g$ ist stetig

5.3 Differenzierbarkeit

Anschaulich

Eine Funktion f ist an der Stelle x_0 differenzierbar, wenn dort (eindeutig) die Tangtente an den Graphen gezeichnet werden kann.



f ist an den Stellen $x = -2$, $x = 0$ und $x = 2$ nicht differenzierbar.

Formal

Eine Funktion f ist an der Stelle x_0 differenzierbar, wenn der Grenzwert

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

existiert.

Eine Funktion ist auf dem Intervall $I = (a, b)$ differenzierbar, wenn sie an *jeder* Stelle $x \in I$ differenzierbar ist.

Analog zur links- und rechtssetigen Stetigkeit werden links- und rechtssetige Differenzierbarkeit definiert.

Differenzierbarkeit und Stetigkeit

Wenn eine Funktion f an der Stelle x_0 differenzierbar ist, dann ist sie dort auch immer stetig. Die Umkehrung gilt nicht, wie das Beispiel der Funktion $f(x) = |x|$ an der Stelle $x = 0$ zeigt.

6 Monotonie

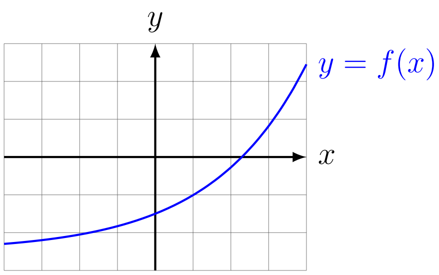
Definitionen

Ist die Funktion f auf einem Intervall I definiert, so heisst f

- *monoton wachsend*, wenn $\forall\ x_1,\ x_2 \in I$ mit $x_1 < x_2$ die Ungleichung $f(x_1) \leq f(x_2)$ erfüllt ist.
- *monoton fallend*, wenn $\forall\ x_1,\ x_2 \in I$ mit $x_1 < x_2$ die Ungleichung $f(x_1) \geq f(x_2)$ erfüllt ist.
- *monoton*, wenn f auf dem Intevall I entweder monoton wachsend oder monoton fallend auf I ist.
- *nicht monoton*, wenn f auf dem Intervall I weder monoton wachsend noch monoton fallend ist.

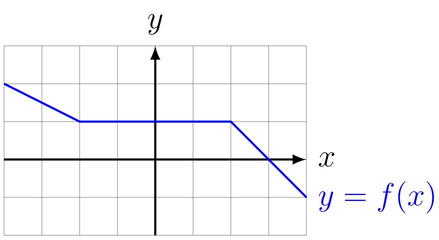
Gilt statt $f(x_1) \leq f(x_2)$ bzw. $f(x_1) \geq f(x_2)$ sogar $f(x_1) < f(x_2)$ bzw. $f(x_1) > f(x_2)$, so ist f *streng monoton wachsend* bzw. *streng monoton fallend*.

Beispiel 6.1



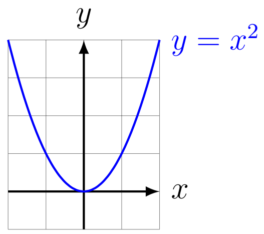
f ist streng monoton wachsend auf $I = [-4, 4]$

Beispiel 6.2



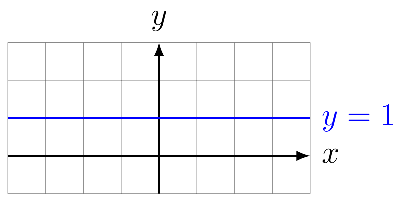
f ist monoton fallend auf $I = [-4, 4]$

Beispiel 6.3



$f(x) = x^2$ ist auf $I = [-2, 2]$ nicht monoton.

Beispiel 6.4



$f(x) = 1$ ist auf

- jedem Intervall $I \subset \mathbb{R}$ monoton.
- auf keinem Intervall $I \subset \mathbb{R}$ streng monoton.

Satz 6.1

- Ist f im Intervall I differenzierbar und monoton steigend, so gilt $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in I$.
- Ist f im Intervall I differenzierbar und monoton fallend, so gilt $f'(x) \leq 0$ für alle $x \in I$.

Beweis

Es sei f auf I monoton steigend und $x_0 \in I$. Wegen der Monotonie gilt für alle $x_1 \in I$ mit $x_0 < x_1$:

$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \geq 0$$

$$\lim_{x_1 \to x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \geq 0$$

$$f'(x_0) \geq 0$$

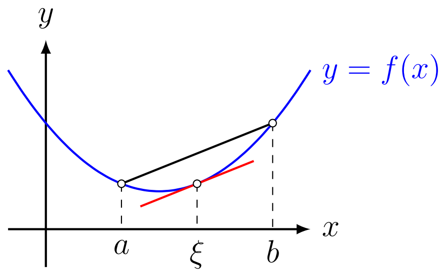
Analog für monoton fallende Funktionen. $\square$

Die Umkehrung dieses Satzes gilt auch; ist aber etwas schwieriger zu beweisen. Dazu benötigt man den ...

Satz 6.2 (Mittelwertsatz)

Ist die Funktion f im Intervall $[a, b]$ stetig und differenzierbar in (a, b), dann gibt es eine Stelle ξ mit $a < \xi < b$, so dass

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\,.$$



(der Beweis folgt später)

Satz 6.3 (Monotoniesatz)

Ist die Funktion f auf dem Intervall I differenzierbar und gilt $f'(x) > 0$ $[f'(x) < 0]$ für alle $x \in I$, dann ist f in I streng monoton wachsend [fallend].

Beweis

Es sind $x_1,\ x_2 \in I$ mit $x_1 < x_2$. Gemäss Mittelwertsatz gibt es eine Stelle $\xi \in I$ mit $x_1 < \xi < x_2$, so dass

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\xi)$$

Da nach Voraussetzung $f'(\xi) > 0$ und $x_2 - x_1 > 0$ sind, gilt $f(x_2) - f(x_1) > 0$. Daraus folgt $f(x_2) > f(x_1)$.

Also ist f monoton wachsend. $\square$

Die Standardaufgabe

Auf welchen Intervallen, ist die Funktion mit der Gleichung

$$f(x) = \tfrac{1}{4}x^4 + 2x^3 + \tfrac{5}{2}x^2 - 12x + 1$$

monoton wachsend bzw. fallend?

Schritt 1

Erste Ableitung berechnen:

Schritt 2

Bestimme die Stellen mit horizontaler Tangente ($f'(x) = 0$):

Schritt 3

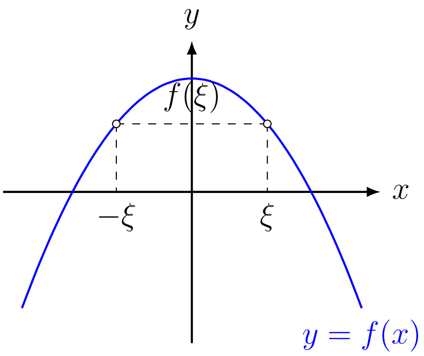
Zerlege f' aufgrund der Nullstellen in Linearfaktoren und erstelle damit eine Vorzeichentabelle:

Bereich				
$f'(x)$				
$f(x)$				

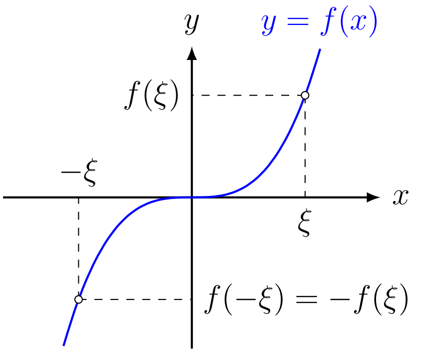
Der Eintrag in Zeile „$x + 3$" und Kolonne „$-4 < x < -3$" ist so zu ermitteln: Wenn x im Intervall $-4 < x < -3$ liegt, dann ist der Faktor $x + 3$ negativ. Das Gesamtvorzeichen eines Intervalls erhält man durch „Multiplizieren" der Vorzeichen innerhalb der Kolonne.

7 Symmetrie

Achsensymmetrie bezüglich $x = 0$



Punktsymmetrie bezüglich $(0, 0)$



Bemerkung

Jede Funktion f kann als Summe einer geraden Funktion g und einer ungeraden Funktion u dargestellt werden.

8 Asymptotisches Verhalten

Wie verhält sich eine Funktion f für grosse $|x|$?

konkret:

8.1 Ganzrationale Funktionen (Polynome)

$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \qquad (a_i \in \mathbb{R},\, a_n \neq 0)$

x^n ausklammern:

$f(x) = x^n \left(a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \frac{a_{n-2}}{x^2} + \ldots + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n} \right)$

$f(x) \approx a_n x^n$ für grosse $|x|$

Beispiel 8.1

$f(x) = -2x^3 + 5x^2 - 7x + 1$

Beispiel 8.2

$f(x) = 1 - 3x^2 - \frac{1}{2}x^4$

Beispiel 8.3

$f(x) = (1 - 3x)(2 - 4x^2)$

8.2 Gebrochenrationale Funktionen

$$f(x) = \frac{a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0}$$

$(a_i,\, b_j \in \mathbb{R},\, a_m \neq 0,\, b_n \neq 0)$

Falls $m \geq n$, so lässt sich f durch eine Polynomdivision als Summe einer ganzrationalen Funktion $q(x)$ und einer *echt* gebrochenrationalen Funktion $r(x)$ darstellen:

$$f(x) = \frac{a(x)}{b(x)} = q(x) + r(x)$$

Beispiel 8.4

$$f(x) = \frac{x^2 + 3x - 4}{2x^3 - 3x^2 + x + 1}$$

Beispiel 8.5

$$f(x) = \frac{3x^2 + 2x + 1}{2x^2 + x - 1}$$

Beispiel 8.6

$$f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 - 2x - 1}{x^2 - 3x - 1}$$

8.3 Exponentialfunktionen

Für $a > 1$ gilt: $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x =$

$\lim\limits_{x \to +\infty} a^x =$

Exponentialfunktionen verändern sich schneller als Potenzfunktionen!

Für einen fest gewählten Exponenten r gilt:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^r}{a^x} =$$

Beispiel 8.7

$f(x) = (1 - x^2)\mathrm{e}^x$

8.4 Logarithmusfunktionen

Für $a > 1$ gilt: $\lim\limits_{x \to 0^+} \log_a(x) =$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \log_a(x) =$

Logarithmusfunktionen verändern sich langsamer als Potenzfunktionen!

Für einen fest gewählten Exponenten r gilt:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\log_a(x)}{x^r} =$$

$$\lim_{x \to 0} x^r \log_a(x) =$$

Beispiel 8.8

$f(x) = (1 - x^2)\ln x$

8.5 Trigonometrische Funktionen

Die Funktionen $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$ haben keine Grenzwerte für $x \to -\infty$ und $x \to +\infty$.

Aufgrund der Beschränktheit von $\sin(x)$ und $\cos(x)$ kann im Verbund mit anderen Funktionen das asymptotische Verhalten jedoch definiert sein.

Beispiel 8.9

$f(x) = \cos\left(\frac{1}{x}\right)$

Beispiel 8.10

$f(x) = \frac{\sin x}{x}$

9 Nullstellen

Ist f eine reelle Funktion mit dem Definitionsbereich D, so ist $x_0 \in D$ eine *Nullstelle* von f, wenn gilt $f(x_0) = 0$.

9.1 Nullstellen ganzrationaler Funktionen

Für ganzrationale Funktionen (Polynome) bis zum Grad 4 gibt es Lösungsformeln zur Nullstellenbestimmung.

Die Formeln zum Lösen linearer und quadratischer Funktionen sollten bekannt sein. Kubische und quartische Gleichungen werden (teilweise) im PAM-Unterricht behandelt.

Für Polynomfunktionfunktionen vom Grad 5 und höher ist man auf numerische Näherungsverfahren angewiesen.

Beispiel 9.1

$f(x) = 3x + 7$

Beispiel 9.2

$f(x) = x^2 - 7x + 12$

Beispiel 9.3

$f(x) = x^3 - 3x$

Abspalten von Linearfaktoren

Wenn von der Polynomfunktion f vom Grad n eine Nullstelle x_0 bekannt ist, lässt sie sich durch Polynomdivsion der Linearfaktor $(x - x_0)$ abspalten.

$f(x) = g(x) \cdot (x - x_0)$

wobei $g(x)$ ein Polynom vom Grad $n - 1$ ist.

Beispiel 9.4

Die Polynomdivision zeigt, dass $x = 3$ eine Nullstelle von $f(x) = x^3 - 5x^2 + 7x - 3$ ist.

```
 (x^3 - 5x^2 + 7x - 3) : (x - 3) = x^2 - 2x + 1
-(x^3 - 3x^2)
-------------
       -2x^2 + 7x
     -(-2x^2 + 6x)
     -------------
                x - 3
              -(x - 3)
              --------
                    0
```

Das Horner-Schema

Durch Ausklammern kann die Auswertung des Polynoms auf eine Folge von Multiplikationen und Additionen reduziert werden:

$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$

$f(x) = x(a_3x^2 + a_2x + a_1) + a_0$

$f(x) = x(x(\underbrace{a_3x + a_2}_{\alpha}) + a_1) + a_0 = x(\underbrace{x\alpha + a_1}_{\beta}) + a_0 = \underbrace{x\beta + a_0}_{\gamma}$

Die geschickte tabellarische Anordnung dieser Operationen ergibt das *Horner-Schema*:

		a_2	a_1	a_0
x	a_3	α	β	γ

Beispiel 9.5

x		-5	7	-3
3	1			

Ist $x = x_0$ Nullstelle des Polynoms $f(x)$ vom Grad n, so sind die ersten $n-1$ Zwischenresultate im Horner-Schema die Koeffizienten des Quotienten $g(x) = f(x) : (x - x_0)$.

Beispiel 9.6

$f(x) = x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 4x - 4$

x		4	3	-4	-4
	1				
	1				
	1				
	1				
	1				

Nullstellen:

9.2 Nullstellen gebrochenrationaler Funktionen

Eine gebrochenrationale Funktion ist ein Quotient aus zwei ganzrationalen Funktionen.

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

x_0 ist genau dann Nullstelle von f, wenn x_0 Nullstelle von p aber nicht von q ist.

Beispiel 9.7

$$f(x) = \frac{x+1}{x-1}$$

Beispiel 9.8

$$f(x) = \frac{x^2 - 7x + 12}{x-3}$$

9.3 Nullstellen von Exponential- und Logarithmusfunktionen

Beispiel 9.9

$$f(x) = \mathrm{e}^x$$

Beispiel 9.10

$$f(x) = (x^2 - 9) \cdot \mathrm{e}^x$$

Beispiel 9.11

$$f(x) = \log_{10} x$$

Beispiel 9.12

$f(x) = \ln(x^2 - 5x + 7)$

9.4 Nullstellen trigonometrischer Funktionen

Beispiel 9.13

$f(x) = \sin(ax + b)$

Beispiel 9.14

$f(x) = \cos(ax + b)$

Beispiel 9.15

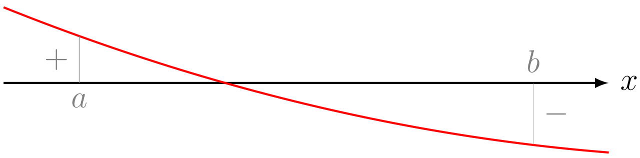
$f(x) = \tan(ax + b)$

9.5 Das Bisektionsverfahren

Das folgende Verfahren erlaubt es, eine Nullstelle ξ einer stetigen Funktion f im Intervall $a \leq \xi \leq b$ näherungsweise zu berechnen, wenn $f(a)$ und $f(b)$ unterschiedliches Vorzeichen haben.

Vorbereitung

- Gebe die Genauigkeit ε der Lösung vor (z. B. $\varepsilon = 10^{-6}$).
- Wähle $a < b$ mit $f(a) \cdot f(b) < 0$.

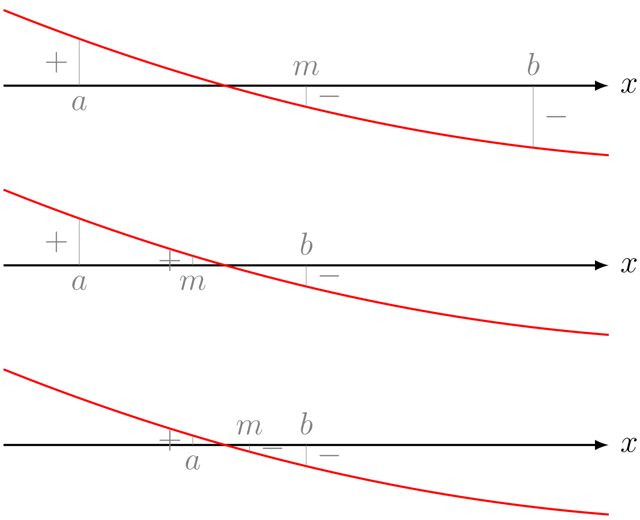


Iterationsschritt

- Berechne $(a+b)/2 \to m$
- Wenn $f(a) \cdot f(m) < 0$: $m \to b$

  sonst: $m \to a$
- Wenn $|b-a| < \varepsilon$: gib m aus und beende das Verfahren

  sonst: wiederhole den Schritt



```
PROGRAM:BISECT
:Prompt A,B,E
:Repeat abs(B-A)<E
:(A+B)/2→M
:A→X:prgmF:Y→S
:M→X:prgmF:Y→T
:If S*T<0
:Then
:M→B
:Else
:M→A
:End
:Disp M
:End
```

Das Programm setzt voraus, dass sich die Funktionsgleichung von f in der Form f`(X)→Y` im Programm `prgmF` befindet.

10 Die Taylor-Reihe

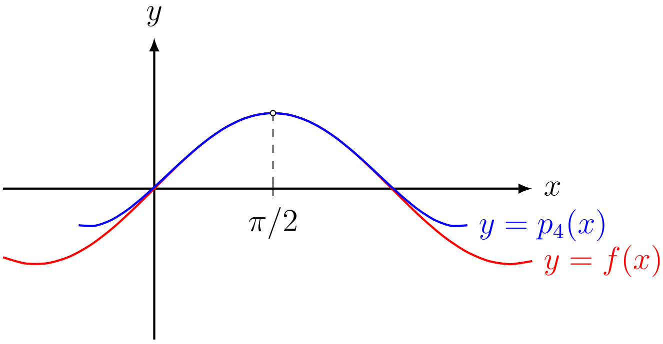
Gegeben: Eine Funktion $y = f(x)$, die an einer Stelle $x_0 \in D_f$ „genügend oft“ stetig differenzierbar ist.

Gesucht: Die Koeffizienten einer Polynomfunktion

$$p_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \ldots + a_n(x - x_0)^n,$$

welche die Funktion f in einer Umgebung von x_0 möglichst gut approximiert (annähert).

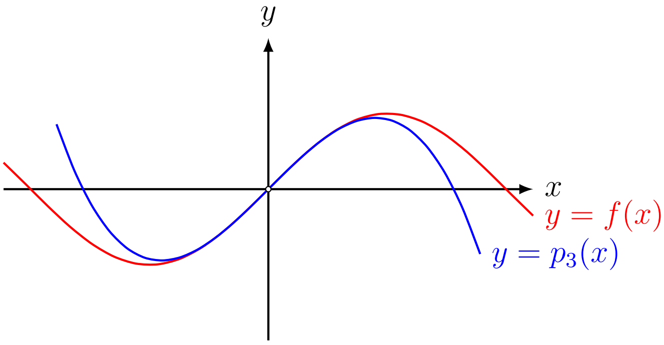
Beispiel 10.1



$f(x) = \sin x;\ x_0 = \dfrac{\pi}{2}$

$p_4(x) = 1 - \dfrac{1}{2}\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)^2 + \dfrac{1}{24}\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)^4$

Beispiel 10.2



$f(x) = \sin x;\ x_0 = 0$

$p_3(x) = x - \dfrac{1}{6}x^3$

Bestimmung der Koeffzienten

Alle Ableitungen von $f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots$

$f'(x) =$

$f''(x) =$

$f'''(x) =$

$x = x_0$ einsetzen und nach a_n auflösen:

$f(x_0) = \qquad \Rightarrow \quad a_0 =$

$f'(x_0) = \qquad \Rightarrow \quad a_1 =$

$f''(x_0) = \qquad \Rightarrow \quad a_2 =$

$f'''(x_0) = \qquad \Rightarrow \quad a_3 =$

Was geschieht mit $a_n(x - x_0)^n$?

- $f^{(0)}(x) = f(x)$:
- $f^{(1)}(x) = f'(x)$:
- $f^{(2)}(x)$:
- ...
- $f^{(n-2)}(x)$:
- $f^{(n-1)}(x)$:
- $f^{(n)}(x)$:
- $f^{(n+1)}(x)$:
-

Setzt man in $f^{(n)}(x)$ für x die Stelle x_0 ein, so erhält man $f^{(n)}(x_0) = n! \cdot a_n$, da alle übrigen Monome verschwinden. So gewinnt man den n-ten Koeffizienten der Polynomfunktion:

$$a_n = \frac{1}{n!} \cdot f^{(n)}(x_0)$$

Das Taylor-Polynom in der Summenschreibweise

Das erste Glied der Summe

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots$$

lässt sich in die Form der übrigen Summanden bringen:

$$f(x) = \frac{f(x_0)}{0!}(x-x_0)^0 + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots$$

Somit können wir die Taylor-Reihe kompakter darstellen:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

... natürlich nur dann, wenn der Grenzwert rechts existiert.

Der Satz von Taylor

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f\colon I \to \mathbb{R}$ eine $(n+1)$-mal stetig differenzierbare Funktion, dann gilt für $x_0 \in I$ und $x \in I$:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_n(x)$$

wobei

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \quad \text{mit } x < \xi < x_0$$

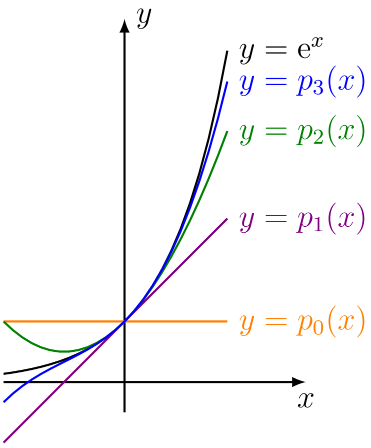
Restglied genannt wird und den „Abbruchfehler“ darstellt.

Beispiel 10.3

Approximiere $f(x) = \mathrm{e}^x$ an der Stelle $x_0 = 0$ mit einem Taylor-Polynom vom Grad 3.

- $a_0 =$
- $a_1 =$
- $a_2 =$
- $a_3 =$

$f(x) =$

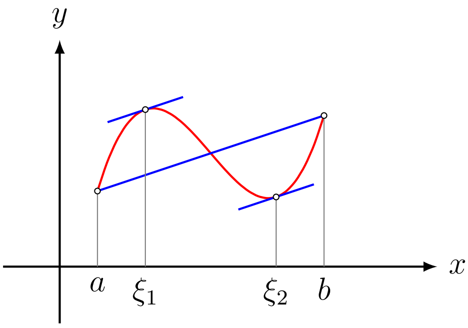


Der Mittelwertsatz der Differenzialrechnung

Ist eine Funktion f stetig im abeschlossenen Intervall $[a, b]$ und differenzierbar im offenen Intervall (a, b), dann gibt es ein $\xi \in [a, b]$, sos dass gilt:

$$f(b) - f(a) = (b - a) \cdot f'(\xi)$$

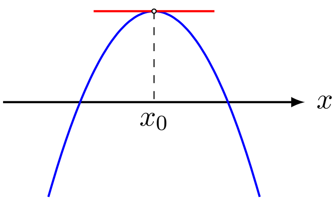
Die Steigung der Sekante über dem ganzen Intervall $[a, b]$ wird im Innern des Intervalls mindestens einmal als Tangentensteigung angenommen.

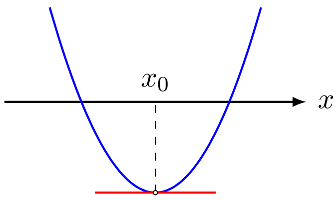


11 Extrem- und Wendepunkte

11.1 Begriffe

Ein notwendiges Kriterium für Extremstellen

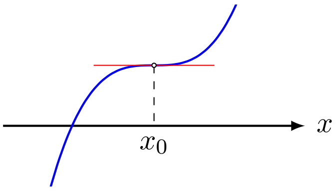




x_0 ist eine Extremstelle $\Rightarrow f'(x_0) = 0$

Der Spielverderber

$f'(x_0) = 0 \quad \not\Rightarrow \quad x_0$ ist Extremstelle



x_0 ist *Terrassenstelle* (Synonym: *Sattelstelle*)

Hinreichende Kriterien für Extremstellen

Gilt $f'(x_0) = 0$, dann ist x_0 entweder ...

- eine Hochstelle,
- eine Tiefstelle oder
- eine Terrassenstelle.

Wie findet man heraus, welcher Fall vorliegt?

Entwickle f an der Stelle x_0 in eine Taylorreihe:

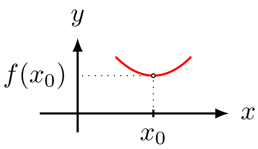
$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!} f''(x_0)(x - x_0)^2 + \dots$

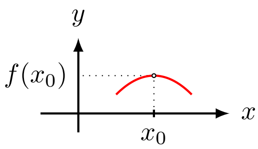
Wegen $f'(x_0) = 0$ folgt:

$f(x) = f(x_0) + \frac{1}{2!} f''(x_0)(x - x_0)^2 + \frac{1}{3!} f'''(x_0)(x - x_0)^3 + \dots$

Liegt x nahe bei x_0, so sind die Monome mit dritter und höherer Ableitung vernachlässigbar gegenüber $\frac{1}{2!} f''(x_0)(x - x_0)^2$:

$$f(x) \approx f(x_0) + \underbrace{\frac{1}{2!} f''(x_0)(x - x_0)^2}_{(*)\text{ Parabel}}$$





$f''(x_0) > 0$: $(*)$ ist nach oben geöffnet; x_0 ist Minimalstelle

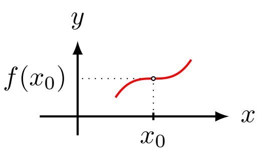
$f''(x_0) < 0$: $(*)$ ist nach unten geöffnet; x_0 ist Maximalstelle

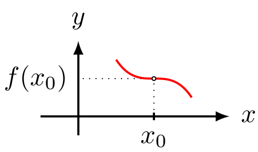
$f''(x_0) = 0$: $\frac{1}{2!} f''(x_0)(x - x_0)^2 = 0$

$\frac{1}{3!} f'''(x_0)(x - x_0)^3$ rückt nach ...

Liegt x nahe bei x_0, so sind die Monome mit vierter und höherer Ableitung vernachlässigbar gegenüber $\frac{1}{3!} f'''(x_0)(x - x_0)^3$:

$$f(x) \approx f(x_0) + \underbrace{\frac{1}{3!} f'''(x_0)(x - x_0)^3}_{(*)\text{ Parabel 3. Ordnung}}$$





$f'''(x_0) > 0$: $(*)$ ändert Krümmung $(-/+)$; x_0 ist Terrassenstelle

$f''(x_0) < 0$: $(*)$ ändert Krümmung $(+/-)$; x_0 ist Terrassenstelle

$f'''(x_0) = 0$: $\frac{1}{3!} f'''(x_0)(x - x_0)^3 = 0$

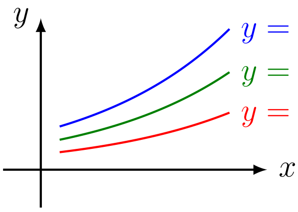
$\frac{1}{4!} f'''(x_0)(x - x_0)^4$ rückt nach ...

Bemerkung

Eine ganzrationale Funktion von Grad n hat nach einmaligem Ableiten den Grad $n-1$. Nach dem Hauptsatz der Algebra hat eine solche Funktion höchstens $n-1$ Nullstellen und somit auch höchstens $n-1$ Extremstellen.

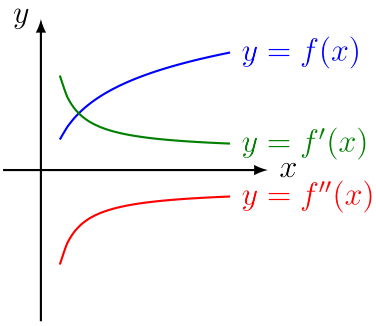
11.2 Die geometrische Deutung der 2. Ableitung

Beispiel 11.1 (zunehmende Steigung)



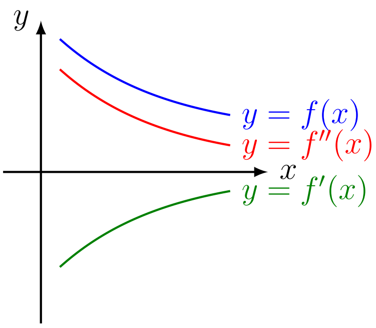
- $f'(x) > 0$: Der Graph von f ist monoton wachsend.
- $f''(x) > 0$: Der Graph von f ist linksgekrümmt (*konvex*).

Beispiel 11.2 (abnehmende Steigung)



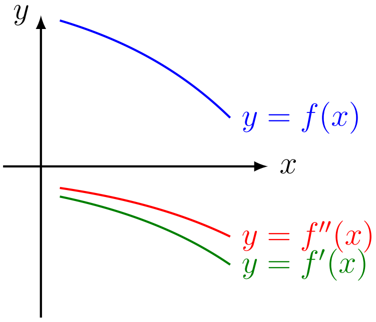
- $f'(x) > 0$: Der Graph von f ist monoton wachsend.
- $f''(x) < 0$: Der Graph von f ist rechtsgekrümmt (*konkav*).

Beispiel 11.3 (abnehmedes Gefälle)



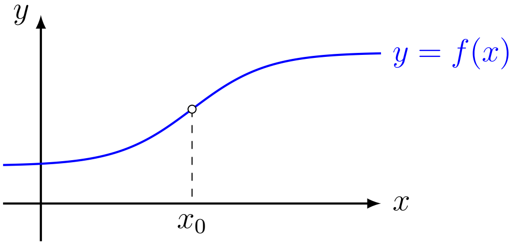
- $f'(x) < 0$: Der Graph von f ist monoton fallend.
- $f''(x) > 0$: Der Graph von f ist linksgekrümmt (*konvex*).

Beispiel 11.4 (zunehmendes Gefälle)



- $f'(x) < 0$: Der Graph von f ist monoton fallend.
- $f''(x) < 0$: Der Graph von f ist rechtsgekrümmt (*konkav*).

Wechselt der Graph von f an einer Stelle x_0 von einer Links- in eine Rechtskurve oder von einer Rechts- in eine Linkskurve, so wird x_0 *Wendestelle* und $P(x_0, y_0)$ *Wendepunkt* genannt.



Notwendige Bedingung für Wendestellen

x_0 Wendestelle $\Rightarrow f''(x_0) = 0$

Da die Wendestellen die Extremstellen der 1. Ableitung sind, können wir die Wendestellen analog zu den Extremstellen berechnen, indem wir in der Theorie der Extremstellen f' durch f'', f'' durch f''' usw. ersetzen.

Hinreichende Bedingung für Wendestellen

f sei eine auf dem offenen Intervall I n-mal differenzierbare Funktion und für $x_0 \in I$ gelte

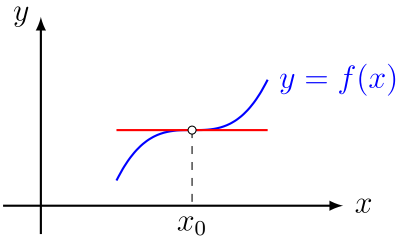
$$f''(x_0) = f'''(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0 \quad \text{aber} f^{(n)}(x_0) \neq 0.$$

Falls n ungerade ist, so ist x_0 eine Wendestelle und es gilt:

- $f^{(n)}(x_0) < 0$: Graph wechselt von Links- zur Rechtskrümmung
- $f^{(n)}(x_0) > 0$: Graph wechselt von Rechts- zur Linkskrümmung

Terrassenpunkte

Eine *Wendetangente* ist eine Tangente in einem Wendepunkt. Ein *Terrassenpunkt* ist ein Wendepunkt mit horizontaler Tangente.



Bemerkung

Eine ganzrationale Funktion von Grad n hat nach zweimaligem Ableiten den Grad $n-2$. Nach dem Hauptsatz der Algebra hat eine solche Funktion höchstens $n-2$ Nullstellen und somit auch höchstens $n-2$ Wendestellen.

12 Kurvendiskussion ganzrationaler Funktionen

Beispiel 12.1

Untersuche die Funktion mit der Gleichung $f(x) = x^4 - 2x^2$.

(a) Definitionsbereich

(b) Symmetrie

(c) Asymptotisches Verhalten

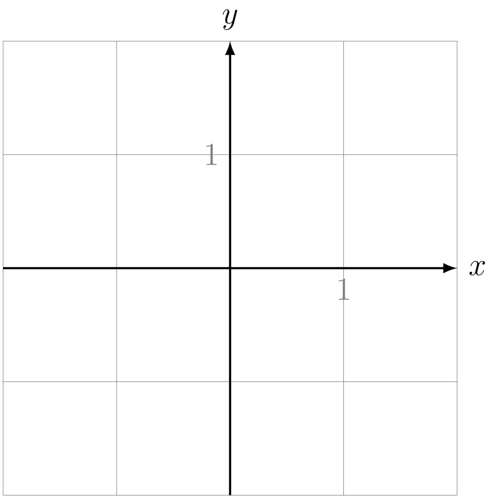
(d) Nullstellen und Ordinatenabschnitt

(e) Ableitungen

(f) Extrempunkte

(g) Wendepunkte

(h) Graph



Beispiel 12.2

Untersuche die Funktion mit der Gleichung $f(x) = 3x^2 - x^3$.

(a) Definitionsbereich

(b) Symmetrie

(c) Asymptotisches Verhalten

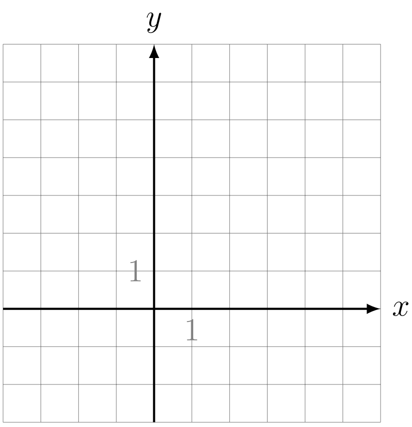
(d) Nullstellen und Ordinatenabschnitt

(e) Ableitungen

(f) Extrempunkte

(g) Wendepunkt

(h) Graph



Beispiel 12.3

Diskutiere die Funktion $f(x) = \frac{3}{8}x^5 - \frac{15}{8}x^4 + \frac{5}{2}x^3 + 1$.

(a) Definitionsbereich

(b) Symmetrie

(c) Asymptotisches Verhalten

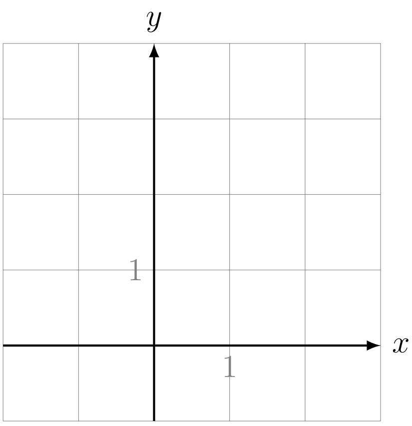
(d) Nullstellen und Ordinatenabschnitt

(e) Ableitungen

(f) Extrempunkte

(g) Wendepunkte

(h) Graph



13 Bestimmung ganzrationaler Funktionen

Beispiel 13.1

f ist eine ganzrationale Funktion vom Grad 4 und besitzt ...

- bei $x = -2$ eine Nullstelle,
- bei $x = 1$ eine Extremstelle,
- im Punkt $P(0, -8)$ eine Wendetangente mit der Steigung 2.

Bestimme die Gleichung dieser Funktion.

Beispiel 13.2

Welches zur y-Achse symmetrische Polynom 4. Grades geht durch $A(0, 2)$ und hat in $B(1, 0)$ ein Minimum?

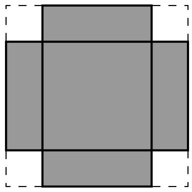
Beispiel 13.3

Ein Polynom 3. Grades hat dieselben Nullstellen wie $g(x) = 2x - 12x^3$. Beide Graphen stehen im Ursprung senkrecht aufeinander. Bestimme die Funktionsgleichung des unbekannten Polynoms.

14 Extremwertaufgaben

Beispiel 14.1 (Offene Schachtel)

Von einem quadratischen Stück Karton mit der Seitenlänge $l = 10$ cm werden an allen Ecken Quadrate mit gleicher Seitenlänge ausgeschnitten.



Wie gross ist die Seitenlänge dieser Quadrate zu wählen, damit der Rest eine oben offene Schachtel mit maximalem Volumen ergibt? Wie gross ist dieses Volumen?

Zielfunktion

Nebenbedingung(en)

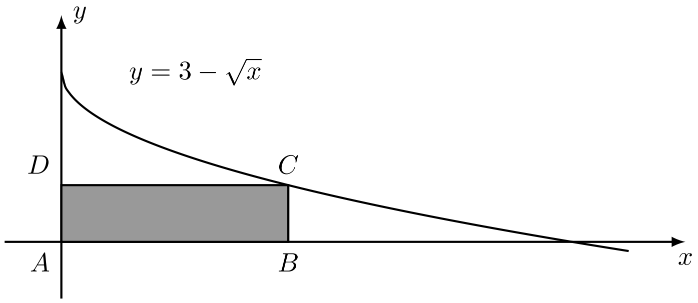
Nebenbedingung in die Zielfunktion einsetzen

Extremum bestimmen

Lösung

Beispiel 14.2

Ein Rechteck, dessen Seiten parallel zu den Koordinatenachsen sind, hat eine Ecke in $A(0,0)$. Die Ecke $C(x,y)$ liegt im I. Quadranten auf der Kurve $f(x) = 3 - \sqrt{x}$ und soll so bestimmt werden, dass der Inhalt des Rechtecks maximal wird.



Zielfunktion

$A(x,y) = x\,y$

Nebenbedingung

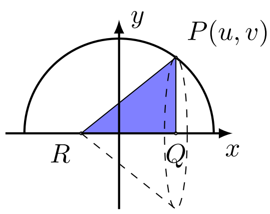
Nebenbedingung in die Zielfunktion einsetzen

Extremum bestimmen

Lösung

Beispiel 14.3

Auf dem Halbkreis mit der Gleichung $f(x) = \sqrt{8 - x^2}$ wird ein Punkt $P(u, v)$ gewählt. Lässt man das rechtwinklige Dreieck $P(u, v)$, $Q(u, 0)$, $R(-1, 0)$ um die x-Achse drehen, entsteht ein gerader Kreiskegel.



Bei welcher x-Koordinate u hat der Kreiskegel maximales Volumen und wie gross ist dieses?

Zielfunktion

Nebenbedingung

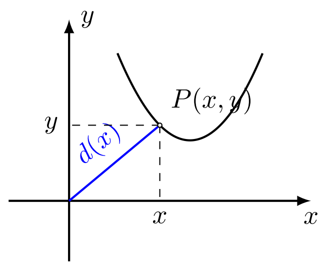
Nebenbedingung in die Zielfunktion einsetzen

Extrema bestimmen

Lösung

Beispiel 14.4

Welcher Punkt $P(x, y)$ der Kurve $k\colon\ y = x^2 - 4\,x + 5$ hat die kürzeste Entfernung vom Ursprung?



Zielfunktion

Nebenbedingung

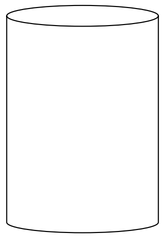
Nebenbedingung in die Zielfunktion einsetzen

Extrema bestimmen

Lösung

Beispiel 14.5

Für die Oberfläche einer zylinderförmige Büchse mit einem Volumen von $1\,\ell$ soll möglichst wenig Material verbraucht werden. Wie gross müssen Höhe h und Radius r gewählt werden?



Zielfunktion

Nebenbedingung

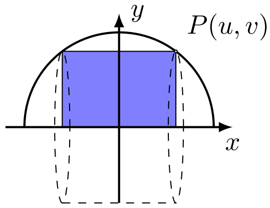
Nebenbedingung in die Zielfunktion einsetzen

Extrema bestimmen

Lösung

Beispiel 14.6

Dem Halbkreis mit der Gleichung $y = \sqrt{12 - x^2}$ wird, wie in der Abbildung dargestellt, ein Rechteck einbeschrieben.



Dreht man dieses Rechteck um die x-Achse, so entsteht ein Zylinder. Wie gross kann das Volumen dieses Zylinders maximal werden?

Zielfunktion

Nebenbedingung

Nebenbedingung in die Zielfunktion einsetzen

Extrema bestimmen

Lösung

15 Funktionenscharen

Die Beispielfunktion

Gegeben: $f_t(x) = x^2 + tx + t \quad (t \in \mathbb{R}$ Parameter)

Fragestellung (a)

Bestimme $f_t(x)$ für $t = -1, 0, 1, 2$

$f_{-1}(x) =$

$f_0(x) =$

$f_1(x) =$

$f_2(x) =$

Graphen mit dem TI-84+ zeichnen:
{-1, 0, 1, 2} $\rightarrow$ L_1

$\boxed{\mathsf{Y=}}$

$\mathsf{Y_1 = X^2 + L_1X + L_1}$

$\boxed{\mathsf{WINDOW}}$

Xmin=-3

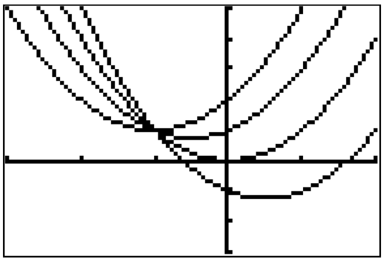
Xmax=2

Xscl=1

Ymin=-3

Ymax=5

Graphen von $f_t(x) = x^2 + tx + t$ für $t = -1, 0, 1, 2$:



Fragestellung (b)

Bestimme $f_t'(x)$ für $t = -1,\ 0,\ 1,\ 2$

$f_t'(x) =$

$f_{-1}'(x) =$

$f_0'(x) =$

$f_1'(x) =$

$f_2'(x) =$

Fragestellung (c)

Für welches t gilt $f_t(2) = 1$?

Fragestellung (d)

Für welches t gilt $f_t'(2) = 1$?

Fragestellung (e)

Bestimme formal die Nullstellen von $f_t(x)$

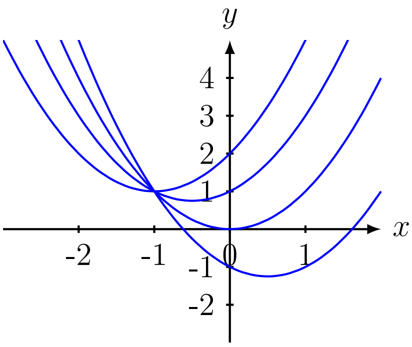
Fragestellung (f)

Auf welcher Kurve k liegen die Extrempunkte von f_t?

Wir sind noch nicht ganz fertig.
t aus den Koordinaten von

eliminieren:

Kurve, auf der alle Extrempunkte liegen:



Fragestellung (g)

Welche Punkte haben alle Graphen G_t gemeinsam?

16 Gebrochenrationale Funktionen

Begriffe

Eine *gebrochenrationale Funktion* ist ein Quotient aus zwei ganzrationalen Funktionen

$$f(x) = \frac{a_m x^n + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0} = \frac{p(x)}{q(x)}$$

wobei

- $p(x)$ ein *Zählerpolynom* vom Grad m ist,
- $q(x)$ ein *Nennerpolynom* vom Grad n ist.

Weitere Bezeichnungen und Sonderfälle:

$n = 0$:	Der Nenner $q_0(x) = b_0$ ist konstant und $f(x)$ ist eine *ganzrationale Funktion.*
$m \geq n$:	f ist eine *unecht gebrochenrationale Funktion.*
$m < n$:	f ist eine *echt gebrochenrationale Funktion.*

16.1 Polynomdivision

Ein Verfahren, um eine unecht gebrochenrationale Funktion als Summe aus einer ganzrationalen- und einer echt gebrochenrationalen Funktion darzustellen. (vgl. $\frac{7}{3} = 2 + \frac{1}{3}$)

$$\begin{array}{rl}
(2x^2 + x + 1) : (2x-1) & = x + 1 + \dfrac{2}{2x-1} \\
-\underline{(2x^2 - x)} \qquad & \\
2x + 1 & \\
-\underline{(2x - 1)} & \\
2 &
\end{array}$$

Definitionsbereich

$D = \mathbb{R} \setminus \{x \colon q(x) = 0\}$
Menge aller reellen Zahlen, die *nicht* Nullstellen des Nennerpolynoms sind.

Beispiel 16.1

$f(x) = \dfrac{x-5}{x^2 - 7x + 12} = \dfrac{x-5}{(x-3)(x-4)} \Rightarrow D = \mathbb{R} \setminus \{3, 4\}$ (Definitionslücken)

Nullstellen

Eine *Nullstelle* von f ist eine Nullstelle von $p(x)$, die nicht auch Nullstelle von $q(x)$ ist.

Beispiel 16.2

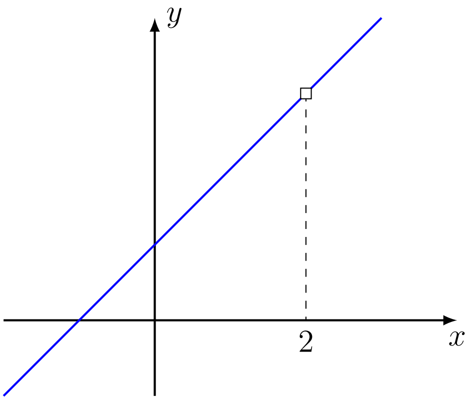
$$f(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 6x - 9} = \frac{(x+1)(x-3)}{(x-3)^2} \Rightarrow N = \{-1\}$$

Hebbare Definitionslücken

Eine Definitionslücke, die sich als Faktor aus dem Nenner wegkürzen lässt, wird *hebbar* genannt.

Beispiel 16.3

$$f(x) = \frac{(x+1)(x-2)}{x-2} = x + 1, \text{ falls } x \neq 2 \Rightarrow x = 2 \text{ ist hebbare Definitionslücke.}$$



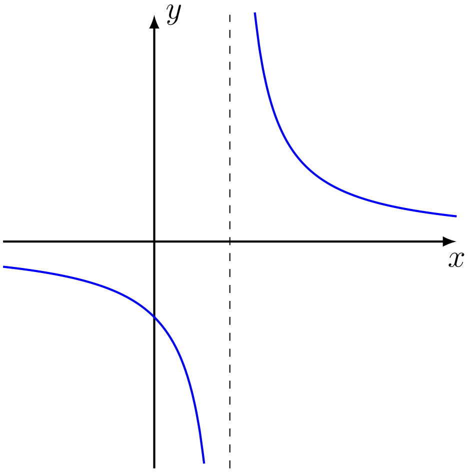
Polstelle

Eine Definitionslücke, die sich als Faktor nicht aus dem Nenner wegkürzen lässt, wird *Polstelle* genannt.

Ist der Grad des gekürzten Linearfaktors ungerade, so ist es eine Polstelle *mit Vorzeichenwechsel (mVzw)*, sonst eine Polstelle *ohne Vorzeichenwechsel (oVzw)*.

Beispiel 16.4

$$f(x) = \frac{1}{x-1}$$

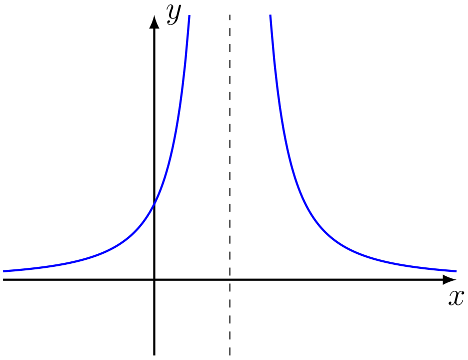


$$\lim_{x\to 1^-} \frac{1}{x-1} = -\infty \quad \text{und} \quad \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x-1} = +\infty$$

$f(x)$ besitzt bei $x_0 = 1$ einen *Pol mit Vorzeichenwechsel.*

Beispiel 16.5

$$f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$$



$$\lim_{x\to 1^-} \frac{1}{(x-1)^2} = +\infty \quad \text{und} \quad \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{(x-1)^2} = +\infty$$

$f(x)$ hat bei $x_0 = 1$ einen *Pol ohne Vorzeichenwechsel.*

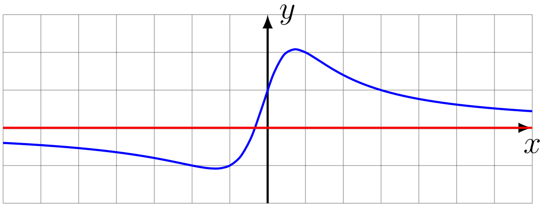
Asymptotisches Verhalten

Welchen Grenzwert haben $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ und $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$?

Beispiel 16.6

$$f(x) = \frac{3x+1}{x^2+1}$$

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0 \\ \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0 \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \lim_{|x|\to\infty} f(x) = 0 \quad \text{(Kurzschreibweise)}$$

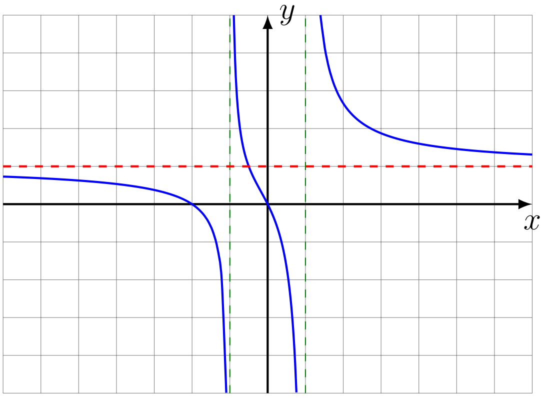


(horizontale) Asymptote: $y = 0$ (x-Achse)

Beispiel 16.7

$f(x) = \dfrac{x^2 + 2x}{x^2 - 1} = 1 + \dfrac{2x + 1}{x^2 - 1}$ (Polynomdivision)

$\lim\limits_{|x| \to \infty} f(x) = 1 \quad$ Asymptote: $y = 1$

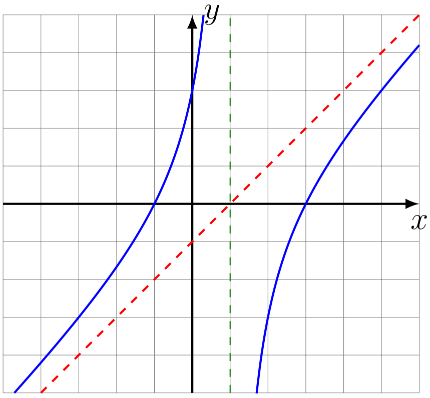


Beispiel 16.8

$f(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 3}{x - 1} = x - 1 - \dfrac{4}{x - 1}$ (Polynomdivision)

Asymptote: $a(x) = x - 1$

Für grosse $|x|$ gilt: $f(x) \approx a(x)$ bzw. $\lim\limits_{|x| \to \infty} [f(x) - a(x)] = 0$



16.2 Kurvendiskussion

Beispiel 16.9

$$f(x) = \frac{x-2}{x^2-1} = \frac{x-2}{(x-1)(x+1)}$$

- *Definitionsbereich:*

  $D = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$

- *Symmetrie:*

  Weder ordinaten- noch ursprungssymmetrisch

- *Nullstelle(n):*

  $f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 2$

- *Ordinatenabschnitt:*

  $f(0) = \dfrac{0-2}{0-1} = 2$

- *Verhalten an den Definitionslücken:*

  $x = 1$ (Pol mit Vorzeichenwechsel):

  $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = -\infty \; \lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = +\infty$

  $x = -1$ (Pol mit Vorzeichenwechsel):

  $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = +\infty \; \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = -\infty$

- *Verhalten im Unendlichen (asymtptotisches Verhalten)*

  $\lim\limits_{|x| \to \infty} \dfrac{x-2}{x^2-1} = 0$

- *Ableitungen:*

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1 \cdot (x^2-1) - (x-2) \cdot 2x}{(x^2-1)^2} \\ &= \frac{x^2 - (2x^2+4x)}{(x^2-1)^2} \\ &= \frac{-x^2+4x-1}{(x^2-1)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{(-2x+4)(x^2-1)^2 - (-x^2+4x-1)2(x^2-1)2x}{(x^2-1)^4}\text{(Kettenregel)} \\ &= \frac{(-2x+4)(x^2-1) - (-x^2+4x-1)4x}{(x^2-1)^3} \\ &= \frac{-2x^3+2x+4x^2-4+4x^3-16x^2+4x}{(x^2-1)^2} \\ &= \frac{2x^3-12x^2+6x-4}{(x^2-1)^2} \end{aligned}$$

- *Extrempunkte:*

  $f'(x) = -x^2 + 4x - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 \approx 3.73 \; x_2 \approx 0.27,$

  Test:

  $f''(3.73) \approx -0.02 \quad \Rightarrow \quad \text{HoP}(3.73, 0.13)$

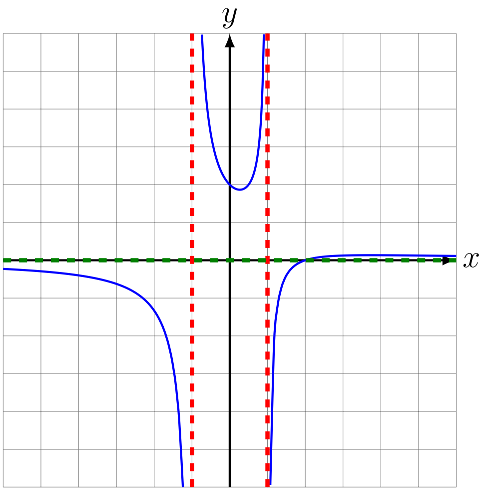
  $f''(0.27) \approx 4.02 > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{TiP}(0.27, 1.87)$

- *Wendepunkte:*

  Kandidaten $f''(x) = 2x^3 - 12x^2 + 6x - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 \approx 5.52$

  $W(5.52, 0.12)$?

- *Graph:*



17 Diskussion transzendenter Funktionen

Beispiel 17.1

Diskutiere die Funktion mit der Gleichung $f(x) = (x-2)\cdot \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2}$.

(a) *Definitionsbereich:* $D = \mathbb{R}$

(b) *Symmetrie:*

$f(-x) = (-x-2)\cdot \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2} \neq f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R} \Rightarrow$ nicht ordinatensymmetrisch

$-f(x) = (-x+2)\cdot \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2} \neq f(-x)$ für alle $x \in \mathbb{R} \Rightarrow$ nicht ursprungssymmetrisch

(c) Asymptotisches Verhalten:

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ und $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = +\infty$

(d) Ordinatenabschnitt und Nullstellen:

$$\begin{aligned}(x-2)\cdot \mathrm{e}^{x^2/2} &= 0\\ x &= 2\end{aligned}$$

$f(0) = (0-2)\cdot \mathrm{e}^0 = -2$

(e) Ableitungen:

$$f'(x) = 1\cdot \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2} + (x-2)\cdot x\cdot \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2} = (x^2-2x+1)\cdot \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2}$$

$$f''(x) = (2x-2)\cdot \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2} + (x^2-2x+1)\cdot x\cdot \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2} = (x^3-2x^2+3x-2)\cdot \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2}$$

$$\begin{aligned}f'''(x) &= (3x^2-4x+3)\cdot \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2} + (x^3-2x^2+3x-2)\cdot x\cdot \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2}\\ &= (x^4-2x^3+6x^2-6x+3)\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2}\end{aligned}$$

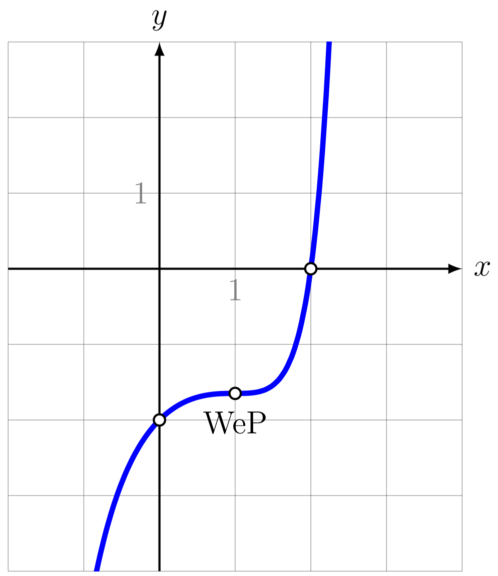
(f) Extrempunkte:

- Kandidaten: $$\begin{aligned}f'(x) &= 0\\ (x^2-2x+1)\cdot \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2} &= 0\\ x_1 = x_2 &= 1\end{aligned}$$
- Test: $f''(1) = (x^3-2x^2+3x-2)\cdot \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\cdot 1} = 0\cdot \mathrm{e}^{\frac{1}{2}} = 0 \quad \Rightarrow \quad$ unklar

(g) Wendepunkte:

- Kandidaten: $$\begin{aligned}f''(x) &= 0\\ (x^3-2x^2+3x-2)\cdot \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2} &= 0\\ x &= 1\end{aligned}$$
- Test: $$\begin{aligned}f'''(1) &= (x^4-2x^3+6x^2-6x+3)\cdot \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\cdot 1}\\ &= (1-2+6-6+3)\cdot \mathrm{e}^{\frac{1}{2}} = 2\cdot \mathrm{e}^{\frac{1}{2}} > 0\end{aligned}$$
- y-Koordinate: $f(1) = (1-2)\cdot \mathrm{e}^{\frac{1}{2}} \approx -\mathrm{e}^{\frac{1}{2}} = -1.65 \Rightarrow \mathrm{WeP}(1|-1.65)$

(h) Graph:



Beispiel 17.2

Diskutiere die Funktion mit der Gleichung $f(x) = \ln(2x - x^2)$.

(a) *Definitionsbereich:*

$$2x - x^2 > 0$$
$$x(2 - x) > 0$$

$D = (0, 2)$ [Das ist ein offenes Intervall; kein Punkt.]

(b) *Symmetrie:*

Die innere Funktion $2x - x^2$ ist weder gerade noch ungerade also auch $f(x)$ nicht.

(c) Asymptoten:

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$ und $\lim_{x \to 2^-} f(x) = -\infty$

(d) Nullstellen und Ordinatenabschnitt:

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ \ln(2x - x^2) &= 0 \\ 2x - x^2 &= 1 \\ 0 &= x^2 - 2x + 1 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

Der Ordinatenabschnitt $f(0)$ ist nicht definiert

(e) Ableitungen:

$$f'(x) = \frac{1}{2x - x^2} \cdot (2 - 2x) = \frac{2x - 2}{x^2 - 2x} = \frac{2x - 2}{x^2 - 2x}$$

$$\begin{aligned}
f''(x) &= \frac{2(x^2 - 2x) - (2x - 2)(2x - 2)}{(x^2 - 2x)^2} = \frac{2x^2 - 4x - (4x^2 - 8x + 4)}{(x^2 - 2x)^2} \\
&= \frac{-2x^2 + 4x - 4}{(x^2 - 2x)^2} = -\frac{2x^2 - 4x + 4}{(x^2 - 2x)^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f'''(x) &= -\frac{(4x - 4) \cdot (x^2 - 2x)^2 - (2x^2 - 4x + 4) \cdot 2(x^2 - 2x)^1(2x - 2)}{(x^2 - 2x)^4} \\
&= -\frac{(4x - 4) \cdot (x^2 - 2x) - (2x^2 - 4x + 4) \cdot 2(2x - 2)}{(x^2 - 2x)^3} \\
&= -\frac{4(x - 1) \cdot (x^2 - 2x) - (2x^2 - 4x + 4) \cdot 4(x - 1)}{(x^2 - 2x)^3} \\
&= -\frac{4(x - 1)\big[(x^2 - 2x) - (2x^2 - 4x + 4)\big]}{(x^2 - 2x)^3} \\
&= -\frac{4(x - 1)\big[-x^2 + 2x - 4\big]}{(x^2 - 2x)^3} = \frac{4(x - 1)\big(x^2 - 2x + 4\big)}{(x^2 - 2x)^3}
\end{aligned}$$

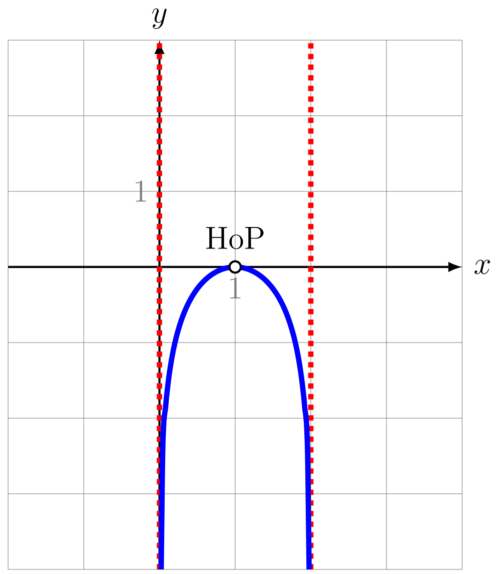
(f) Extrempunkte:

- Kandidaten: $$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ \frac{2x - 2}{x^2 - 2x} &= 0 \\ 2x - 2 &= 0 \\ x &= 1 \end{aligned}$$
- Test: $f''(1) = -\frac{2 - 4 + 4}{(1 - 2)^2} = -\frac{2}{1} = -2 < 0 \quad \Rightarrow \quad x = 1$ ist Hochstelle
- y-Koordinate:
  $y = f(1) = \ln(2 \cdot 1 - 1) = \ln(1) = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{HoP}(1|0)$

(g) Wendepunkte:

- Kandidaten: $$\begin{aligned} f''(x) &= 0 \\ -2x^2 + 4x - 4 &= 0 \end{aligned}$$
  keine Lösung $\quad \Rightarrow \quad$ keine Wendepunkte

(h) Graph:


y
x
1
1
HoP