Aufgabe 1

(a) $f(x) = 4x^2 - 7x + 3$
$f'(x) = 8x - 7$

(b) $f(x) = 13x^4 + 9x^3 - 15$
$f'(x) = 52x^3 + 27x^2$

(c) $f(x) = 4.5x^8 + 16x^5 - 23$
$f'(x) = 36x^7 + 80x^4$

(d) $f(x) = x^4(2x-3)^2 = x^4(4x^2 - 12x + 9) = 4x^6 - 12x^5 + 9x^4$
$f'(x) = 24x^5 - 60x^4 + 36x^3$

(e) $f(x) = x^2(x-1)^3 = \cdots = x^5 - 3x^4 + 3x^3 - x^2$
$f'(x) = 5x^4 - 12x^3 + 9x^2 - 2x$

(f) $f(x) = (x+3)(3x-2)^2 = \cdots = 9x^3 + 15x^2 - 32x + 12$
$f'(x) = 27x^2 + 30x - 32$

Aufgabe 2

(a) $f(x) = 3x^3 - 8x + 10;\ P(1, y_P)$

$y_P = f(1) = 3 - 8 + 10 = 5$

$f'(x) = 9x^2 - 8$

$m = f'(1) = 9 - 8 = 1$

$y_P = m \cdot x_P + q$
$5 = 1 \cdot 1 + q$
$q = 4$

Tangentengleichung t: $y = x + 4$

(b) $f(x) = 3x^5 - 8x^3 + 14x - 7;\ P(1, y_P)$

$y_P = f(1) = 3 - 8 + 14 - 7 = 2$

$f'(x) = 15x^4 - 24x^2 + 14$

$m = f'(1) = 15 - 24 + 14 = 5$

$y_P = m \cdot x_P + q$
$2 = 5 \cdot 1 + q$
$q = -3$

Tangentengleichung t: $y = 5x - 3$

Aufgabe 3

(a) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 7$

$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ 3x^2 - 6x - 9 &= 0 \\ 3(x^2 - 2x - 3) &= 0 \\ 3(x+1)(x-3) &= 0 \\ x_1 &= -1 \quad \Rightarrow \quad P_1(-1, 12) \\ x_2 &= 3 \quad \Rightarrow \quad P_2(3, 20) \end{aligned}$$

(b) $f(x) = x^4 + 4x^3 + 10$

$f'(x) = 4x^3 + 12x^2$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ 4x^3 + 12x^2 &= 0 \\ 4x^2(x+3) &= 0 \\ x_1 &= 0 \quad \Rightarrow \quad P_1(0, 10) \\ x_2 &= -3 \quad \Rightarrow \quad P_2(-3, -17) \end{aligned}$$

Aufgabe 4

(a) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 2x + 8$

$f'(x) = 3x^2 - 12x + 2$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2 \\ 3x^2 - 12x + 2 &= 2 \\ 3x(x-4) &= 0 \\ x_1 &= 0 \quad \Rightarrow \quad P_1(0, 8) \\ x_2 &= 4 \quad \Rightarrow \quad P_2(4, -16) \end{aligned}$$

(b) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 - x^2 - x + 3$

$f'(x) = x^3 - 2x^2 - 2x - 1$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2 \\ x^3 - 2x^2 - 2x - 1 &= 2 \\ x^3 - 2x^2 - 2x - 3 &= 0 \\ \text{(TR)} \quad x_1 &= 0 \quad \Rightarrow \quad P_1(3, -6.75) \end{aligned}$$

Aufgabe 5

$f(x) = x^4 - 7x^2 + ax$

$f'(x) = 4x^3 - 14x + a$

$$\begin{aligned} f'(2) &= 3 \\ 4 \cdot 8 - 14 \cdot 2 + a &= 3 \\ 4 + a &= 3 \\ a &= -1 \end{aligned}$$

Aufgabe 6

$f(x) = ax^3 + bx$

$f'(x) = 3ax^2 + b$

$f'(2) = 3 \quad \Rightarrow \quad 12a + b = 3 \quad (1)$

$P(2, -10)$ liegt auf dem Graphen von f: $x = 2$, $y = -10$

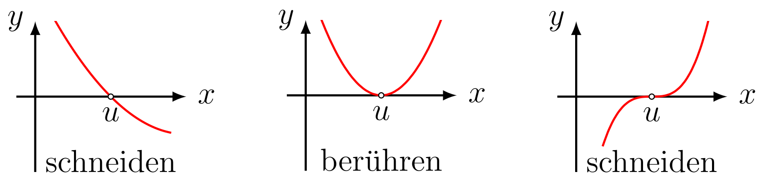
$8a + 2b = -10 \quad (2)$

Lösung von (1) und (2): ($a = 1$, $b = -9$)

Aufgabe 7

Berührt die Kurve p die x-Achse an der Stelle u, so sind zwei Bedingungen erfüllt:

- u ist eine Nullstelle; d. h. $f(u) \overset{(1)}{=} 0$.
- Für die Tangente im Berührpunkt gilt $f'(u) \overset{(2)}{=} 0$.



Vorsicht: eine horizontale Tangente bei einer Nullstelle bedeutet noch nicht, dass der Graph die x-Achse berührt. Es könnte sich auch um einen „schleifenden" Schnitt handeln (Bild rechts). Um diese Situation zu erkennen, müsste überprüft werden, of für eine kleine Zahl $\varepsilon > 0$ die Funktionswerte an den Stellen $u - \varepsilon$ und $u + \varepsilon$ unterschiedliche Vorzeichen haben.

(a) $p(x) = x^2 - 2ax - 7a$

$p'(x) = 2x - 2a$

$$x^2 - 2ax - 7a = 0 \quad (1)$$
$$2x - 2a = 0 \quad (2)$$

(2) nach x auflösen: $x = a$ $(*)$

$x = a$ in (1) einsetzen:

$$a^2 - 2a^2 - 7a = 0$$
$$a^2 + 7a = a(a+7) = 0$$
$$a_1 = 0$$
$$a_2 = -7$$

$(*)$ Wir hätten (2) auch nach a auflösen und das Ergebnis in (1) einsetzen können. Dies hätte zu den Lösungen $x_1 = 0$ und $x_2 = -7$ geführt. Diese Lösungen müssten wir dann in die Gleichung $a = x$ einsetzen, die Resultate (für a) zu bekommen.

(b) $p(x) = ax^2 + ax - 3$

$p'(x) = 2ax + a$

$$ax^2 + ax - 3 = 0 \quad (1)$$
$$2ax + a = 0 \quad (2)$$

(2) nach x auflösen: $x = -\frac{1}{2}$

$x = \frac{1}{2}$ in (1) einsetzen:

$$\tfrac{1}{4}a - \tfrac{1}{2}a - 3 = 0$$
$$a - 2a - 12 = 0$$
$$-a - 12 = 0$$
$$a = -12$$

Aufgabe 8

$f(x) = x^5 - 3x^4 + 5x^2 + 2$

$y_0 = f(1) = 5$

$f'(x) = 5x^4 - 12x^3 + 10x$

$m = f'(1) = 3$

$$\begin{aligned} y_0 &= m \cdot x_0 + q \\ 5 &= 3 \cdot 1 + q \\ q &= 2 \end{aligned}$$

$t\colon y = 3x + 2$

Aufgabe 9

(a) $f(x) = 2x^2 - 5$

$x_0 = 2 \quad \Rightarrow \quad y_0 = f(2) = 3$

$f'(x) = 4\,x$

$m_t = f'(2) = 8$

$$\begin{aligned} y_0 &= m_t \cdot x_0 + q_t \\ 3 &= 8 \cdot 2 + q_t \\ q_t &= -13 \quad \Rightarrow \quad t\colon y = 8x - 13 \end{aligned}$$

$m_t \cdot m_n = -1 \quad \Rightarrow \quad 8 \cdot m_n = -1 \quad \Rightarrow \quad m_n = -\frac{1}{8}$

$$\begin{aligned} y_0 &= m_n \cdot x_0 + q_n \\ 3 &= -\tfrac{1}{8} \cdot 2 + q \\ q &= \tfrac{13}{4} \end{aligned}$$

$n\colon y = -\frac{1}{8}x + \frac{13}{4}$

(b) $f(x) = x^3 - 3\,x^2 + 4$

$x_0 = 1 \quad \Rightarrow \quad y_0 = f(1) = 2$

$f'(x) = 3\,x^2 - 6\,x$

$m_t = f'(1) = -3$

$$\begin{aligned} y_0 &= m_t \cdot x_0 + q_t \\ 2 &= -3 \cdot 1 + q_t \\ q_t &= 5 \quad \Rightarrow \quad t\colon y = -3\,x + 5 \end{aligned}$$

$m_n = -1/m_t = \frac{1}{3}$

$$\begin{aligned} y_0 &= m_t \cdot x_0 + q_t \\ 2 &= \tfrac{1}{3} \cdot 1 + q \\ q &= \tfrac{5}{3} \quad \Rightarrow \quad n\colon y = \tfrac{1}{3}x + \tfrac{5}{3} \end{aligned}$$

Aufgabe 10

$f(x) = \frac{1}{2}x^3 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{3}{2}x^2$

$g\colon 6x + y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad g\colon y = -6x$

da die Gerade $g\colon y = -6x$ die Steigung $m_g = -6$ hat, muss die senkrecht zu g stehenden Tangente die Steigung $m = \frac{1}{6}$ haben.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \tfrac{1}{6} \\ \tfrac{3}{2}x^2 &= \tfrac{1}{6} \\ x^2 &= \tfrac{1}{9} \\ x_{1,2} &= \pm\tfrac{1}{3} \end{aligned}$$

Gleichung der Tangente an der Stelle $x_1 = \frac{1}{3}$:

$y_1 = f(x_1) = \frac{1}{2}x_1^3 = \frac{1}{54}$

$$\begin{aligned} y_1 &= m \cdot x_1 + q_1 \\ \tfrac{1}{54} &= \tfrac{1}{6} \cdot \tfrac{1}{3} + q_1 \\ \tfrac{1}{54} - \tfrac{1}{18} &= q_1 \\ q_1 &= -\tfrac{1}{27} \end{aligned}$$

$\boxed{t_1\colon y = \frac{1}{6}x - \frac{1}{27}}$

Gleichung der Tangente an der Stelle $x_2 = -\frac{1}{3}$:

$y_2 = f(x_2) = \frac{1}{2}x_2^3 = -\frac{1}{54}$

$$\begin{aligned} y_2 &= m \cdot x_2 + q_2 \\ -\tfrac{1}{54} &= \tfrac{1}{6} \cdot \tfrac{-1}{3} + q_2 \\ \tfrac{1}{54} + \tfrac{1}{18} &= q_2 \\ q_2 &= \tfrac{1}{27} \end{aligned}$$

$\boxed{t_2\colon y = \frac{1}{6}x + \frac{1}{27}}$

Aufgabe 11

Die gesuchte Gerade h steht senkrecht zur Geraden $g\colon y = -\frac{1}{5}x + 1$ und hat somit die Steigung $m_h = 5$. $(g \perp h \;\Leftrightarrow\; m_g \cdot m_h = -1)$

$h(x) = 5x + q$

An welcher Stelle hat p dieselbe Steigung wie h?

$p'(x) = 4x - 3 = 5 \quad \Rightarrow \quad x = 2$

$y = p(2) = 8 - 6 = 2$

$P(2,2)$ liegt auf der Parabel und der Geraden h:

$2 = 5 \cdot 2 + q \quad \Rightarrow \quad q = -8$

$h\colon y = 5x - 8$