Differenzialrechnung (Kapitel 5)

Prüfungsvorbereitung

Aufgabe 1

Bestimme formal die Ableitung der Funktion $f(x) = 3x + 4$ mit dem Differenzialquotienten. Achte auf die korrekte Darstellung der einzelnen Schritte.

Aufgabe 1

$$f(x) = 3x + 4$$

Aufgabe 1

$$f(x) = 3x + 4$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Aufgabe 1

$$f(x) = 3x + 4$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{3(x+h) + 4 - (3x+4)}{h}$$

Aufgabe 1

$$f(x) = 3x + 4$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{3(x+h) + 4 - (3x+4)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{3x + 3h + 4 - 3x - 4}{h}$$

Aufgabe 1

$$f(x) = 3x + 4$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{3(x+h) + 4 - (3x+4)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{3x + 3h + 4 - 3x - 4}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{3h}{h}$$

Aufgabe 1

$$f(x) = 3x + 4$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{3(x+h) + 4 - (3x+4)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{3x + 3h + 4 - 3x - 4}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{3h}{h} = \lim_{h \to 0} 3$$

Aufgabe 1

$$f(x) = 3x + 4$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{3(x+h) + 4 - (3x+4)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{3x + 3h + 4 - 3x - 4}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{3h}{h} = \lim_{h\to 0} 3 = 3$$

Aufgabe 2

Bestimme formal die Ableitung der Funktion $f(x) = \sqrt{x}$ mit dem Differenzialquotienten. Achte auf die korrekte Darstellung der einzelnen Schritte.

Aufgabe 2

$$f(x) = \sqrt{x}$$

Aufgabe 2

$$f(x) = \sqrt{x}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Aufgabe 2

$$f(x) = \sqrt{x}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h}$$

Aufgabe 2

$$f(x) = \sqrt{x}$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(\sqrt{x+h} - \sqrt{x})(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}$$

Aufgabe 2

$$f(x) = \sqrt{x}$$

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(\sqrt{x+h} - \sqrt{x})(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h) - x}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}
\end{aligned}$$

Aufgabe 2

$$f(x) = \sqrt{x}$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(\sqrt{x+h} - \sqrt{x})(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h) - x}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}$$

Aufgabe 2

$$f(x) = \sqrt{x}$$

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(\sqrt{x+h} - \sqrt{x})(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h) - x}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}
\end{aligned}
$$

Aufgabe 2

$$f(x) = \sqrt{x}$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(\sqrt{x+h} - \sqrt{x})(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h) - x}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x}}$$

Aufgabe 2

$$f(x) = \sqrt{x}$$

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(\sqrt{x+h} - \sqrt{x})(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h) - x}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}
\end{aligned}$$

Aufgabe 3

Gib jeweils die Ableitungsfunktion der gegebenen Funktion an und bestimme, ob die Tangente an den Graphen der Funktion f an der Stelle $x_0 = 1$ steigend, fallend oder horizontal ist.

(a) $f(x) = \frac{1}{x}$

(b) $f(x) = \ln(x)$

(c) $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 3$

(d) $f(x) = e^{-x}$

Aufgabe 3

(a) $$f(x) = \frac{1}{x} = x^{-2} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

$$m = f'(1) = -1 \quad \Rightarrow \quad t \text{ ist fallend}$$

Aufgabe 3

(a) $f(x) = \dfrac{1}{x} = x^{-2} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$

$m = f'(1) = -1 \quad \Rightarrow \quad t$ ist fallend

(b) $f(x) = \log_2(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \dfrac{1}{x \ln(2)}$

$m = f'(1) = \dfrac{1}{\ln(2)} \quad \Rightarrow \quad t$ ist wachsend

Aufgabe 3

(a) $f(x) = \frac{1}{x} = x^{-2} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = -\frac{1}{x^2}$
$m = f'(1) = -1 \quad \Rightarrow \quad t$ ist fallend

(b) $f(x) = \log_2(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{x \ln(2)}$

$m = f'(1) = \frac{1}{\ln(2)} \quad \Rightarrow \quad t$ ist wachsend

(c) $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 3 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 3x^2 - 4x + 1$
$m = f'(1) = 0 \quad \Rightarrow \quad t$ ist horizontal

Aufgabe 3

(a) $f(x) = \dfrac{1}{x} = x^{-2} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$

$m = f'(1) = -1 \quad \Rightarrow \quad t$ ist fallend

(b) $f(x) = \log_2(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \dfrac{1}{x \ln(2)}$

$m = f'(1) = \dfrac{1}{\ln(2)} \quad \Rightarrow \quad t$ ist wachsend

(c) $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 3 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 3x^2 - 4x + 1$

$m = f'(1) = 0 \quad \Rightarrow \quad t$ ist horizontal

(d) $f(x) = \mathrm{e}^{-x} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \mathrm{e}^{-x} \cdot (-1) = -\mathrm{e}^{-x}$

$m = f'(1) = -1 \quad \Rightarrow \quad t$ ist fallend

Aufgabe 4

Bestimme die Ableitungsfunktion $f'(x)$ und vereinfache sie so weit wie möglich. Potenzen von Summen müssen nicht ausnmultipliziert werden. *Hinweis:* Manchmal lohnt es sich, die Funktion vor dem Ableiten zu vereinfachen.

(a) $f(x) = ax^3 + x^b - 4c \qquad (a,\ b$ und c sind Konstanten$)$

(b) $f(x) = \dfrac{2x^3 + x - 3}{x}$

(c) $f(x) = \ln(x) \cdot \sin(x)$

(d) $f(x) = 5^x - x^5$

(e) $f(x) = \dfrac{x^2 + 3x - 4}{x - 1}$

(f) $f(x) = \mathrm{e}^{x^2}$

(g) $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x + 1}$

(h) $f(x) = (3x - 4)^7$

Aufgabe 4

(a) $f(x) = ax^3 + x^b - 4c \quad$ (a, b und c sind Konstanten)

Aufgabe 4

(a) $f(x) = ax^3 + x^b - 4c$ (a, b und c sind Konstanten)

$f'(x) = 3ax^2 + bx^{b-1}$

Aufgabe 4

(a) $f(x) = ax^3 + x^b - 4c \qquad (a,\ b$ und c sind Konstanten$)$

$f'(x) = 3ax^2 + bx^{b-1}$

(b) $f(x) = \dfrac{2x^3 + x - 3}{x} = 2x^2 + 1 - \dfrac{3}{x}$

Aufgabe 4

(a) $f(x) = ax^3 + x^b - 4c \qquad$ (a, b und c sind Konstanten)

$f'(x) = 3ax^2 + bx^{b-1}$

(b) $f(x) = \dfrac{2x^3 + x - 3}{x} = 2x^2 + 1 - \dfrac{3}{x}$

$f'(x) = 4x - \dfrac{3}{x^2}$

Aufgabe 4

(a) $f(x) = ax^3 + x^b - 4c \qquad (a,\ b$ und c sind Konstanten)

$f'(x) = 3ax^2 + bx^{b-1}$

(b) $f(x) = \dfrac{2x^3 + x - 3}{x} = 2x^2 + 1 - \dfrac{3}{x}$

$f'(x) = 4x - \dfrac{3}{x^2}$

(c) $f(x) = \ln(x) \cdot \sin(x)$

Aufgabe 4

(a) $f(x) = ax^3 + x^b - 4c \qquad$ (a, b und c sind Konstanten)

$$f'(x) = 3ax^2 + bx^{b-1}$$

(b) $f(x) = \dfrac{2x^3 + x - 3}{x} = 2x^2 + 1 - \dfrac{3}{x}$

$$f'(x) = 4x - \frac{3}{x^2}$$

(c) $f(x) = \ln(x) \cdot \sin(x)$

$$f'(x) = \frac{1}{x} \cdot \sin(x) + \ln(x) \cdot \cos(x)$$

Aufgabe 4

(a) $f(x) = ax^3 + x^b - 4c \qquad (a,\ b \text{ und } c \text{ sind Konstanten})$

$f'(x) = 3ax^2 + bx^{b-1}$

(b) $f(x) = \dfrac{2x^3 + x - 3}{x} = 2x^2 + 1 - \dfrac{3}{x}$

$f'(x) = 4x - \dfrac{3}{x^2}$

(c) $f(x) = \ln(x) \cdot \sin(x)$

$f'(x) = \dfrac{1}{x} \cdot \sin(x) + \ln(x) \cdot \cos(x)$

(d) $f(x) = 5^x - x^5$

Aufgabe 4

(a) $f(x) = ax^3 + x^b - 4c \quad$ (a, b und c sind Konstanten)

$f'(x) = 3ax^2 + bx^{b-1}$

(b) $f(x) = \dfrac{2x^3 + x - 3}{x} = 2x^2 + 1 - \dfrac{3}{x}$

$f'(x) = 4x - \dfrac{3}{x^2}$

(c) $f(x) = \ln(x) \cdot \sin(x)$

$f'(x) = \dfrac{1}{x} \cdot \sin(x) + \ln(x) \cdot \cos(x)$

(d) $f(x) = 5^x - x^5$

$f'(x) = \ln(5) \cdot 5^x - 5x^4$

Aufgabe 4

(a) $f(x) = ax^3 + x^b - 4c \qquad (a,\ b \text{ und } c \text{ sind Konstanten})$

$$f'(x) = 3ax^2 + bx^{b-1}$$

(b) $f(x) = \dfrac{2x^3 + x - 3}{x} = 2x^2 + 1 - \dfrac{3}{x}$

$$f'(x) = 4x - \frac{3}{x^2}$$

(c) $f(x) = \ln(x) \cdot \sin(x)$

$$f'(x) = \frac{1}{x} \cdot \sin(x) + \ln(x) \cdot \cos(x)$$

(d) $f(x) = 5^x - x^5$

$$f'(x) = \ln(5) \cdot 5^x - 5x^4$$

(e) $f(x) = \dfrac{x^2 + 3x - 4}{x - 1} = \dfrac{(x-1)(x+4)}{x-1} = x + 4$

Aufgabe 4

(a) $f(x) = ax^3 + x^b - 4c \qquad (a,\ b \text{ und } c \text{ sind Konstanten})$

$f'(x) = 3ax^2 + bx^{b-1}$

(b) $f(x) = \dfrac{2x^3 + x - 3}{x} = 2x^2 + 1 - \dfrac{3}{x}$

$f'(x) = 4x - \dfrac{3}{x^2}$

(c) $f(x) = \ln(x) \cdot \sin(x)$

$f'(x) = \dfrac{1}{x} \cdot \sin(x) + \ln(x) \cdot \cos(x)$

(d) $f(x) = 5^x - x^5$

$f'(x) = \ln(5) \cdot 5^x - 5x^4$

(e) $f(x) = \dfrac{x^2 + 3x - 4}{x - 1} = \dfrac{(x-1)(x+4)}{x-1} = x + 4$

$f'(x) = 1$

Aufgabe 4

(a) $f(x) = ax^3 + x^b - 4c \quad (a,\ b \text{ und } c \text{ sind Konstanten})$

$f'(x) = 3ax^2 + bx^{b-1}$

(b) $f(x) = \dfrac{2x^3 + x - 3}{x} = 2x^2 + 1 - \dfrac{3}{x}$

$f'(x) = 4x - \dfrac{3}{x^2}$

(c) $f(x) = \ln(x) \cdot \sin(x)$

$f'(x) = \dfrac{1}{x} \cdot \sin(x) + \ln(x) \cdot \cos(x)$

(d) $f(x) = 5^x - x^5$

$f'(x) = \ln(5) \cdot 5^x - 5x^4$

(e) $f(x) = \dfrac{x^2 + 3x - 4}{x - 1} = \dfrac{(x-1)(x+4)}{x-1} = x + 4$

$f'(x) = 1$

(f) $f(x) = e^{x^2}$

Aufgabe 4

(a) $f(x) = ax^3 + x^b - 4c \qquad (a,\ b \text{ und } c \text{ sind Konstanten})$

$f'(x) = 3ax^2 + bx^{b-1}$

(b) $f(x) = \dfrac{2x^3 + x - 3}{x} = 2x^2 + 1 - \dfrac{3}{x}$

$f'(x) = 4x - \dfrac{3}{x^2}$

(c) $f(x) = \ln(x) \cdot \sin(x)$

$f'(x) = \dfrac{1}{x} \cdot \sin(x) + \ln(x) \cdot \cos(x)$

(d) $f(x) = 5^x - x^5$

$f'(x) = \ln(5) \cdot 5^x - 5x^4$

(e) $f(x) = \dfrac{x^2 + 3x - 4}{x - 1} = \dfrac{(x-1)(x+4)}{x-1} = x + 4$

$f'(x) = 1$

(f) $f(x) = e^{x^2}$

$f'(x) = e^{x^2} \cdot 2x \qquad \text{(Kettenregel)}$

Aufgabe 4

(a) $f(x) = ax^3 + x^b - 4c \qquad (a,\ b \text{ und } c \text{ sind Konstanten})$

$f'(x) = 3ax^2 + bx^{b-1}$

(b) $f(x) = \dfrac{2x^3 + x - 3}{x} = 2x^2 + 1 - \dfrac{3}{x}$

$f'(x) = 4x - \dfrac{3}{x^2}$

(c) $f(x) = \ln(x) \cdot \sin(x)$

$f'(x) = \dfrac{1}{x} \cdot \sin(x) + \ln(x) \cdot \cos(x)$

(d) $f(x) = 5^x - x^5$

$f'(x) = \ln(5) \cdot 5^x - 5x^4$

(e) $f(x) = \dfrac{x^2 + 3x - 4}{x - 1} = \dfrac{(x-1)(x+4)}{x-1} = x + 4$

$f'(x) = 1$

(f) $f(x) = e^{x^2}$

$f'(x) = e^{x^2} \cdot 2x \qquad \text{(Kettenregel)}$

Aufgabe 4

(a) $f(x) = ax^3 + x^b - 4c \qquad (a,\ b \text{ und } c \text{ sind Konstanten})$

$f'(x) = 3ax^2 + bx^{b-1}$

(b) $f(x) = \dfrac{2x^3 + x - 3}{x} = 2x^2 + 1 - \dfrac{3}{x}$

$f'(x) = 4x - \dfrac{3}{x^2}$

(c) $f(x) = \ln(x) \cdot \sin(x)$

$f'(x) = \dfrac{1}{x} \cdot \sin(x) + \ln(x) \cdot \cos(x)$

(d) $f(x) = 5^x - x^5$

$f'(x) = \ln(5) \cdot 5^x - 5x^4$

(e) $f(x) = \dfrac{x^2 + 3x - 4}{x - 1} = \dfrac{(x-1)(x+4)}{x-1} = x + 4$

$f'(x) = 1$

(f) $f(x) = e^{x^2}$

$f'(x) = e^{x^2} \cdot 2x \qquad \text{(Kettenregel)}$

Aufgabe 4

(a) $f(x) = ax^3 + x^b - 4c \qquad (a,\ b$ und c sind Konstanten$)$

$f'(x) = 3ax^2 + bx^{b-1}$

(b) $f(x) = \dfrac{2x^3 + x - 3}{x} = 2x^2 + 1 - \dfrac{3}{x}$

$f'(x) = 4x - \dfrac{3}{x^2}$

(c) $f(x) = \ln(x) \cdot \sin(x)$

$f'(x) = \dfrac{1}{x} \cdot \sin(x) + \ln(x) \cdot \cos(x)$

(d) $f(x) = 5^x - x^5$

$f'(x) = \ln(5) \cdot 5^x - 5x^4$

(e) $f(x) = \dfrac{x^2 + 3x - 4}{x - 1} = \dfrac{(x-1)(x+4)}{x-1} = x + 4$

$f'(x) = 1$

(f) $f(x) = e^{x^2}$

$f'(x) = e^{x^2} \cdot 2x \qquad$ (Kettenregel)

Aufgabe 4

(a) $f(x) = ax^3 + x^b - 4c \quad (a,\ b \text{ und } c \text{ sind Konstanten})$

$f'(x) = 3ax^2 + bx^{b-1}$

(b) $f(x) = \dfrac{2x^3 + x - 3}{x} = 2x^2 + 1 - \dfrac{3}{x}$

$f'(x) = 4x - \dfrac{3}{x^2}$

(c) $f(x) = \ln(x) \cdot \sin(x)$

$f'(x) = \dfrac{1}{x} \cdot \sin(x) + \ln(x) \cdot \cos(x)$

(d) $f(x) = 5^x - x^5$

$f'(x) = \ln(5) \cdot 5^x - 5x^4$

(e) $f(x) = \dfrac{x^2 + 3x - 4}{x - 1} = \dfrac{(x-1)(x+4)}{x - 1} = x + 4$

$f'(x) = 1$

(f) $f(x) = e^{x^2}$

$f'(x) = e^{x^2} \cdot 2x \quad \text{(Kettenregel)}$

Aufgabe 5

Berechne die höheren Ableitungen.

(a) $f(x) = x^5$

$f^{(5)}(x) =$

(b) $f(x) = 2x^7 + 4x^6 - 5x^5 + x^3 - 8x^2 + 5x - 9$

$\frac{\mathrm{d}^8}{\mathrm{d}x^8} f(x) =$

(c) $f(x) = \sin(2x)$

$f^{(5)}(x) =$

Aufgabe 5

(a) $f(x) = x^5$

Aufgabe 5

(a) $f(x) = x^5$

$f^{(5)}(x) = (5x^4)^{(4)} = (20x^3)^{(3)} = (60x^2)^{(2)} = (120x)^{(1)} = 120x$

Aufgabe 5

(a) $f(x) = x^5$

$f^{(5)}(x) = (5x^4)^{(4)} = (20x^3)^{(3)} = (60x^2)^{(2)} = (120x)^{(1)} = 120x$

(b) $f(x) = 2x^7 + 4x^6 - 5x^5 + x^3 - 8x^2 + 5x - 9$

Aufgabe 5

(a) $f(x) = x^5$

$f^{(5)}(x) = (5x^4)^{(4)} = (20x^3)^{(3)} = (60x^2)^{(2)} = (120x)^{(1)} = 120x$

(b) $f(x) = 2x^7 + 4x^6 - 5x^5 + x^3 - 8x^2 + 5x - 9$

$$\frac{\mathrm{d}^8}{\mathrm{d}x^8} f(x) = \cdots = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7) = 0$$

Aufgabe 5

(a) $f(x) = x^5$

$f^{(5)}(x) = (5x^4)^{(4)} = (20x^3)^{(3)} = (60x^2)^{(2)} = (120x)^{(1)} = 120x$

(b) $f(x) = 2x^7 + 4x^6 - 5x^5 + x^3 - 8x^2 + 5x - 9$

$$\frac{\mathrm{d}^8}{\mathrm{d}x^8} f(x) = \cdots = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7) = 0$$

(c) $f(x) = \sin(2x)$

Aufgabe 5

(a) $f(x) = x^5$

$f^{(5)}(x) = (5x^4)^{(4)} = (20x^3)^{(3)} = (60x^2)^{(2)} = (120x)^{(1)} = 120x$

(b) $f(x) = 2x^7 + 4x^6 - 5x^5 + x^3 - 8x^2 + 5x - 9$

$$\frac{\mathrm{d}^8}{\mathrm{d}x^8} f(x) = \cdots = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7) = 0$$

(c) $f(x) = \sin(2x)$

$$\begin{aligned} f^{(5)}(x) &= 2\big(\cos(2x)\big)^{(4)} = 4\big(-\sin(2x)\big)^{(3)} = 8\big(-\cos(2x)\big)^{(2)} \\ &= 16\big(\sin(2x)\big)^{(1)} = 32\cos(2x) \end{aligned}$$

Aufgabe 6

Gegeben sind die Funktionen $f(x) = x^2 + 4x - 2$ und $g(x) = x^2 - 3x + 5$

(a) Bestimme den Schnittpunkt S der Graphen von f und g.

(b) Unter welchem spitzen Winkel schneiden sich die beiden Tangenten in S?

Aufgabe 6

Gegeben sind die Funktionen $f(x) = x^2 + 4x - 2$ und $g(x) = x^2 - 3x + 5$

(a) Schnittpunkt von f und g:

Aufgabe 6

Gegeben sind die Funktionen $f(x) = x^2 + 4x - 2$ und $g(x) = x^2 - 3x + 5$

(a) Schnittpunkt von f und g:

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x) \\ x^2 + 4x - 2 &= x^2 - 3x + 5 \\ 7x &= 7 \\ x_S &= 1 \quad \Rightarrow \quad y_S = f(1) = 3 \quad \Rightarrow \quad S(1,3) \end{aligned}$$

(b) Schnittwinkel:

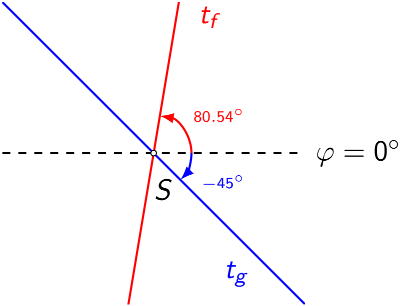
(b) Schnittwinkel:

$$f'(x) = 2x + 4 \quad \Rightarrow \quad f'(1) = 6 \quad \Rightarrow$$
$$\varphi_f = \arctan(6) = 80.54^\circ$$

(b) Schnittwinkel:

$$f'(x) = 2x + 4 \quad \Rightarrow \quad f'(1) = 6 \quad \Rightarrow$$
$$\varphi_f = \arctan(6) = 80.54^\circ$$

$$g'(x) = 2x - 3 \quad \Rightarrow \quad f'(1) = -1 \quad \Rightarrow$$
$$\varphi_g = \arctan(-1) = -45^\circ$$



$$\Delta\varphi = \varphi_f - \varphi_g = 125.54^\circ \text{ (stump}$$

$$\Delta\varphi' = 180^\circ - \Delta\varphi = 54.46^\circ$$

Aufgabe 7

In welchen Punkten hat der Graph der Funktion $f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 36x + 3$ eine horizontale Tangente?

Aufgabe 7

$$f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 36x + 3$$

$$f'(x) = 3x^2 - 3x - 36$$

Horizontale Tangente bedeutet $f'(x) = 0$:

$$3x^2 - 3x - 36 = 0$$

$$x^2 - x - 12 = 0$$

$$(x + 3)(x - 4) = 0$$

$$x_1 = -3 \quad \Rightarrow \quad y_1 = 70.5 \quad \Rightarrow \quad S_1(-3, 70.5)$$

$$x_2 = 4 \quad \Rightarrow \quad y_2 = -101 \quad \Rightarrow \quad S_2(4, -101)$$

Aufgabe 8

Berechne, an welchen Stellen die Tangenten an den Graphen von $f(x) = x^2 + x + 1$ und $g(x) = \frac{1}{2}x^2 - x$ senkrecht aufeinander stehen.

Aufgabe 8

$$f(x) = x^2 + x + 1 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 2x + 1 = m_f$$

Aufgabe 8

$$f(x) = x^2 + x + 1 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 2x + 1 = m_f$$

$$g(x) = \frac{1}{2}x^2 - x \quad \Rightarrow \quad g'(x) = x - 1 = m_g$$

Aufgabe 8

$$f(x) = x^2 + x + 1 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 2x + 1 = m_f$$

$$g(x) = \frac{1}{2}x^2 - x \quad \Rightarrow \quad g'(x) = x - 1 = m_g$$

$$m_f \perp m_g \quad \Leftrightarrow \quad m_f \cdot m_g = -1$$

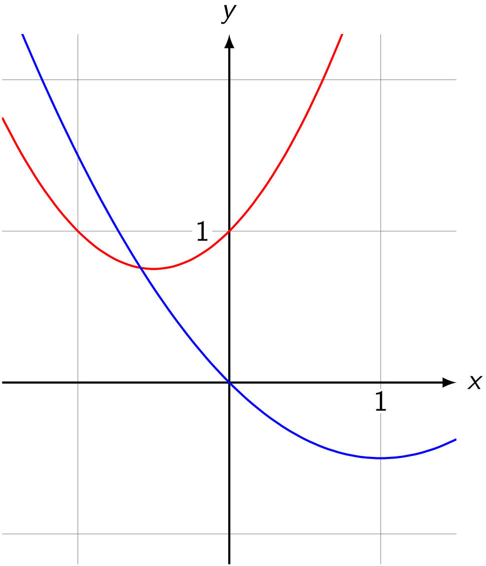
Aufgabe 8

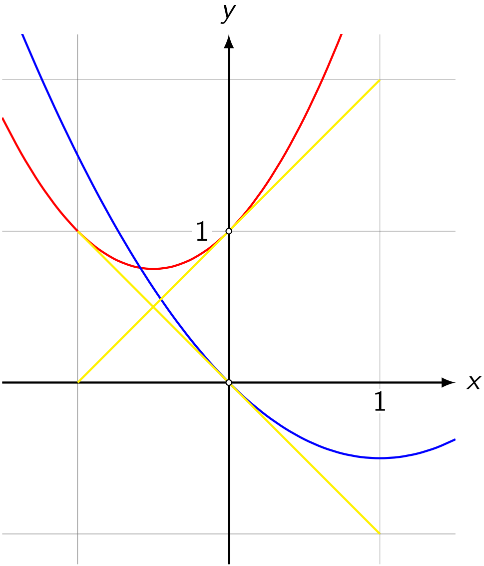
$$f(x) = x^2 + x + 1 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 2x + 1 = m_f$$

$$g(x) = \frac{1}{2}x^2 - x \quad \Rightarrow \quad g'(x) = x - 1 = m_g$$

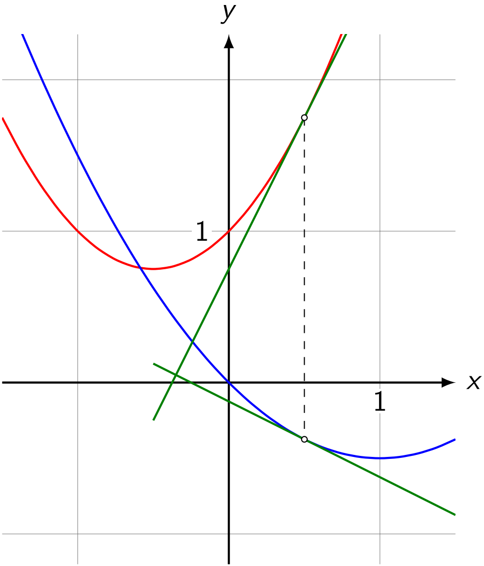
$$m_f \perp m_g \quad \Leftrightarrow \quad m_f \cdot m_g = -1$$

$$\begin{aligned} (2x+1)(x-1) &= -1 \\ 2x^2 - 2x + x - 1 &= -1 \\ 2x^2 - x &= 0 \\ x(2x-1) &= 0 \\ x_1 &= 0 \\ x_2 &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$


y
x
1
1



y
x
1
1


y
x
1
1

Aufgabe 9

Bestimmen den Flächeninhalt des Dreiecks, das von der Tangente an den Graphen der Funktion $f(x) = \ln(x)$ an der Stelle $x_0 = 1$ und den beiden Koordinatenachsen eingeschlossen wird.

Aufgabe 9

$$f(x) = \ln(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad m = f'(1) = \frac{1}{1} = 1$$

Aufgabe 9

$$f(x) = \ln(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad m = f'(1) = \frac{1}{1} = 1$$

$$y_0 = \ln(1) = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} y_0 &= m \cdot x_0 + q \\ 0 &= 1 \cdot 1 + q \\ q &= -1 \end{aligned}$$

Aufgabe 9

$$f(x) = \ln(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad m = f'(1) = \frac{1}{1} = 1$$

$$y_0 = \ln(1) = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} y_0 &= m \cdot x_0 + q \\ 0 &= 1 \cdot 1 + q \\ q &= -1 \end{aligned}$$

Tangente: $t\colon\ y = x - 1$

Nullstelle der Tangente: $x_1 = 1$

Ordinatenabschnitt der Tangente: $y_1 = -1$

Flächeninhalt des Dreiecks: $A = \frac{1}{2} \cdot |x_1 \cdot y_1| = \frac{1}{2}$