Differenzialrechung (Kapitel 5) Lösungen+ Standardaufgaben

Bei Aufgaben 1–7 genügt jeweils die Angabe *einer* Schreibweise.

Aufgabe 1

$D = \{x \in \mathbb{R}\colon x \neq -9\} = \mathbb{R} \setminus \{9\}$

Aufgabe 2

$D = \{x \in \mathbb{R}\colon x \neq \frac{3}{2}\} = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{3}{2}\right\}$

Aufgabe 3

$D = \{x \in \mathbb{R}\colon x \neq \pm\sqrt{5}\}$

Aufgabe 4

$D = \{x \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R} = (-\infty, \infty)$

Aufgabe 5

$D = \{x \in \mathbb{R}\colon x \geq 3\} = [3, \infty)$

Aufgabe 6

$D = \{x \in \mathbb{R}\colon x \leq -1 \leq \ \wedge x \geq 1\} = (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$

Aufgabe 7

$D = \{x \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R} = (-\infty, \infty)$

Aufgabe 8

$\lim\limits_{x \to -2} (x - 5) = -2 - 5 = -7$

Aufgabe 9

$\lim\limits_{x \to 0} (3x^2 + x + 1) = 0 + 0 + 1 = 1$

Aufgabe 10

$$\lim_{x \to 1} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2}$$

Aufgabe 11

$$\lim_{x \to -2} \sqrt{x+2} = \sqrt{-2+2} = \sqrt{0} = 0$$

Aufgabe 12

$$\lim_{x \to 2} \left(\mathrm{e}^x + 3 \right) = \mathrm{e}^2 + 3$$

Aufgabe 13

$$\lim_{x \to 0} \ln(x+1) = \ln(1) = 0$$

Aufgabe 14

$$\lim_{x \to 0} \tan(x) = 0$$

Aufgabe 15

$$f(x) = \begin{cases} x - 3 & \text{wenn } x \leq 0 \\ 4x - 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$f(0) = 0 - 3 = -3$$

Aufgabe 16

$$f(x) = \begin{cases} -2x + 3 & \text{wenn } x < 1 \\ x^2 - x & \text{sonst} \end{cases}$$

$$f(3) = 3^2 - 3 = 6$$

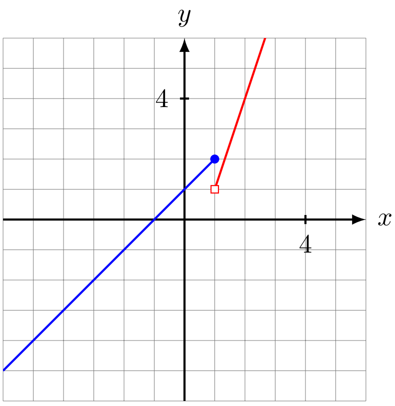
Die Skizzen dienen nur der Veranschaulichung und sind nicht Gegenstand der Aufgabe.

Aufgabe 17

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{wenn } x < 1 \\ 3x-2 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} (x+1) = 2$$
$$f(1) = 3\cdot 1 - 2 = 1$$

$\Rightarrow f$ ist an der Stelle $x_0 = 1$ nicht stetig.

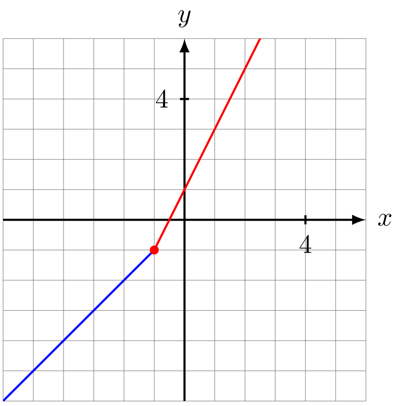


Aufgabe 18

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{wenn } x < -1 \\ 2x+1 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-} x = -1$$
$$f(-1) = 2\cdot(-1) + 1 = -1$$

$\Rightarrow f$ ist an der Stelle $x_0 = -1$ stetig.



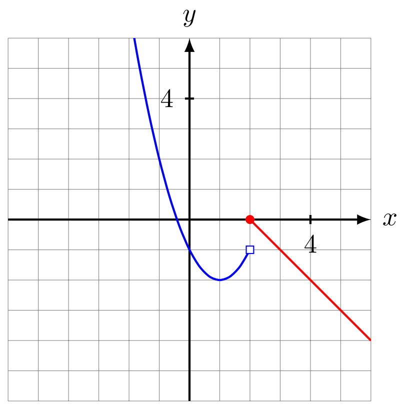
Aufgabe 19

$$f(x) = \begin{cases} -x+2 & \text{wenn } x \geq 2 \\ x^2-2x-1 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} (x^2-2x-1) = 4-4-1 = -1$$

$$f(2) = -2+2 = 0$$

f ist an der Stelle $x_0 = 2$ nicht stetig.

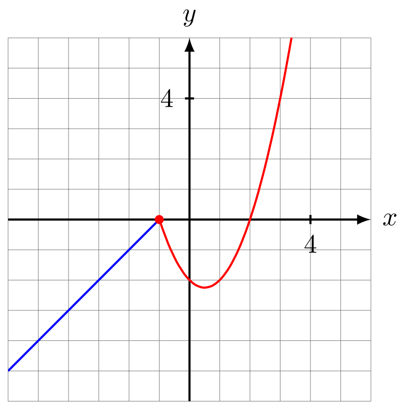


Aufgabe 20

$$f(x) = \begin{cases} x^2-x-2 & \text{wenn } x \geq -1 \\ x+1 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$f(-1) = (-1)^2 - (-1) - 2 = 1+1-2 = 0$$
$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^-} (x+1) = -1+1 = 0$$

f ist an der Stelle $x_0 = -1$ stetig.



Aufgabe 21

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 1 & \text{wenn } x \geq -1 \\ 2x + a & \text{sonst} \end{cases}$$

$$f(-1) = 3 \cdot (-1) - 1 = -4$$

$$\lim_{x \to -1} f(x) = \lim_{x \to -1} (2x + a) = -2 + a$$

$$\begin{aligned} f(-1) &= \lim_{x \to -1} f(x) \\ -4 &= -2 + a \\ a &= -2 \end{aligned}$$

Aufgabe 22

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2x + 2 & \text{wenn } x \geq 0 \\ x^2 - 2x & \text{sonst} \end{cases}$$

$$f(0) = -0 + 0 + 2 = 2$$

$$\lim_{x \to -1} f(x) = \lim_{x \to -1} (x^2 - 2x - 3) = 0$$

f ist an der Stelle $x_0 = -1$ nicht stetig und somit auch nicht differenzierbar.

Aufgabe 23

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 - x - 1 & \text{wenn } x \geq -1 \\ x^2 + 2x & \text{sonst} \end{cases}$$

$$f(-1) = -(-1)^2 - (-1) - 1 = -1$$

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^-} (x^2 + 2x) = 1 + (-2) = -1$$

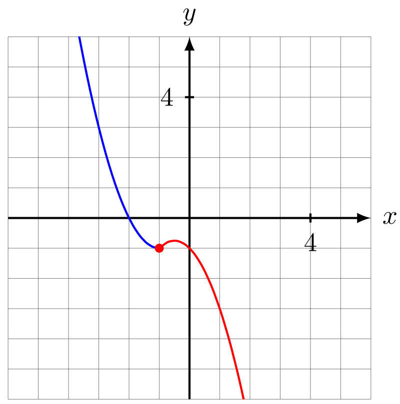
f ist an der Stelle $x = -1$ stetig.

$$f'(x) = \begin{cases} -2x - 1 & \text{wenn } x \geq -1 \\ 2x + 2 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$f'(-1) = -2 \cdot (-1) - 1 = 1$$

$$\lim_{x \to -1^-} f'(x) = \lim_{x \to -1^-} (2x + 2) = -2 + 2 = 0$$

f ist an der Stelle $x_0 = -1$ stetig aber nicht differenzierbar.



Aufgabe 24

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 - 2x - 3 & \text{wenn } x \geq -1 \\ x^2 + 2x - 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

$f(-1) = -(-1)^2 - 2(-1) - 3 = -1 + 2 - 3 = -2$

$\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^-} (x^2 + 2x - 1) = (-1)^2 + 2(-1) - 1 = 1 - 2 - 1 = -2$

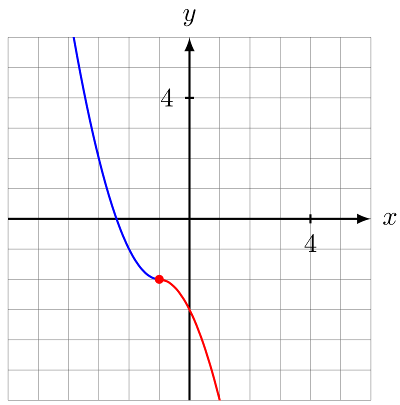
f ist an der Stelle $x_0 = -1$ stetig.

$$f'(x) = \begin{cases} -2x - 2 & \text{wenn } x \geq -1 \\ 2x + 2 & \text{sonst} \end{cases}$$

$f'(-1) = -2(-1) - 2 = 2 - 2 = 0$

$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} (2x + 2) = 2(-1) + 2 = 0$

f ist an der Stelle $x_0 = -1$ stetig und differenzierbar.



Aufgabe 25

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x + a & \text{wenn } x < 1 \\ -x^2 + bx - 3 & \text{sonst} \end{cases}$$

Stetigkeit:

$f(1) = -1^2 + b \cdot 1 - 3 = b - 4$

$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} (x^2 - x + a) = -1 + 1 + a = a$

f ist bei $x = 1$ stetig, wenn $f(1) = \lim\limits_{x \to 1} f(x)$

$$b - 4 \overset{(1)}{=} a$$

Differenzierbarkeit:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{wenn } x < 1 \\ -2x + b & \text{sonst} \end{cases}$$

$f'(1) = -2 \cdot 1 + b = b - 2$

$\lim\limits_{x \to 1^-} f'(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} (2x - 1) = 2 - 1 = 1$

f ist bei $x = 1$ differenzierbar, wenn $f'(1) = \lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$

$$b - 2 \overset{(2)}{=} 1$$

Aus (2) folgt $b = 3$. Setzt man dies in (1) ein, erhält man $3 - 4 = a$ und damit $a = -1$

Kontrolle mit Skizze: