# Differenzialrechnung (Kapitel 3)

Prüfungsvorbereitung

# Aufgabe 3.1

Werte die Funktion an der Stelle $x_0$ aus und vereinfache das Ergebnis.

(a) $f(x) = \sqrt{2x - 3}$; $x_0 = 4 + h$

(b) $f(x) = x^2 - 2x + 5$; $x_0 = -1 + h$

(c) $f(x) = \dfrac{2x + 1}{3x + 2}$; $x_0 = 2 + h$

# Aufgabe 3.1

(a) $f(4+h) = \sqrt{2(4+h)-3} = \sqrt{8+2h-3} = \sqrt{2h+5}$

# Aufgabe 3.1

(a) $f(4+h) = \sqrt{2(4+h)-3} = \sqrt{8+2h-3} = \sqrt{2h+5}$

(b) $$\begin{aligned} f(-1+h) &= (-1+h)^2 - 2(-1+h) + 5 \\ &= 1 - 2h + h^2 + 2 - 2h + 5 = h^2 - 4h + 8 \end{aligned}$$

# Aufgabe 3.1

(a) $f(4+h) = \sqrt{2(4+h)-3} = \sqrt{8+2h-3} = \sqrt{2h+5}$

(b) $$\begin{aligned} f(-1+h) &= (-1+h)^2 - 2(-1+h) + 5 \\ &= 1 - 2h + h^2 + 2 - 2h + 5 = h^2 - 4h + 8 \end{aligned}$$

(c) $f(2+h) = \dfrac{2(2+h)+1}{3(2+h)+2} = \dfrac{4+2h+1}{6+3h+2} = \dfrac{2h+5}{3h+8}$

# Aufgabe 3.2

Bestimme die ausmultiplizierte Form der Potenzen.

(b) $(x + h)^4$

(c) $(x - 2)^5$

# Aufgabe 3.2

Der Binomialkoeffizient $\binom{n}{k}$ von $a^k b^{n-k}$ in der ausmultiplizierten Form von $(a+b)^n$ kann mit dem Pascalschen Dreieck oder mit der Taschenrechnerfunktion $n$ nCr $k$ bestimmt werden.

(b) $(x+h)^4 = x^4 + 4x^3h + 6x^2h^2 + 4xh^3 + h^4$

(c)

$$\begin{aligned}(x-2)^5 &= x^5 + 5x^4(-2)^1 + 10x^3(-2)^2 + 10x^2(-2)^3 + 5x^1(-2)^4 + (-2)^5 \\ &= x^5 - 10^4 + 40x^3 - 80x^2 + 80x - 32\end{aligned}$$

# Aufgabe 3.3

(a) Berechne den Koeffizienten des Monoms $x^3y^8$ in $(x+y)^{11}$.

(b) Berechne den Koeffizienten des Monoms $x^4$ von $(x-2)^9$.

# Aufgabe 3.3

(a) Koeffizient von $x^3y^8$ in $(x+y)^{11}$:

$$\binom{11}{3} = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 165 \quad \text{(oder mit TI30X: 11 nCr 3)}$$

(b) Koeffizient von $x^4$ in $(x-2)^9$:

$$\binom{9}{4} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 126 \quad \text{(oder mit TI30X: 9 nCr 4)}$$

$$126x^4(-2)^5 = -4032x^4 \quad \Rightarrow \quad \text{Koeffizient: } -4032$$

# Aufgabe 3.4

Bestimme die Ableitung der Funktion $f(x) = x^2 + 2x$ an der Stelle $x_0 = 1$ durch Berechnung des Differenzialquotienten.

# Aufgabe 3.4

Gegeben: $f(x) = x^2 + 2x$ und $x_0 = 1$

$f'(1)$

# Aufgabe 3.4

Gegeben: $f(x) = x^2 + 2x$ und $x_0 = 1$

$$f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$$

# Aufgabe 3.4

Gegeben: $f(x) = x^2 + 2x$ und $x_0 = 1$

$$f'(1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(1+h)^2 + 2(1+h) - 3}{h}$$

# Aufgabe 3.4

Gegeben: $f(x) = x^2 + 2x$ und $x_0 = 1$

$$
\begin{aligned}
f'(1) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(1+h)^2 + 2(1+h) - 3}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1 + 2h + h^2 + 2 + 2h - 3}{h}
\end{aligned}
$$

# Aufgabe 3.4

Gegeben: $f(x) = x^2 + 2x$ und $x_0 = 1$

$$\begin{aligned}
f'(1) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(1+h)^2 + 2(1+h) - 3}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1 + 2h + h^2 + 2 + 2h - 3}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{4h + h^2}{h}
\end{aligned}$$

# Aufgabe 3.4

Gegeben: $f(x) = x^2 + 2x$ und $x_0 = 1$

$$
\begin{aligned}
f'(1) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(1+h)^2 + 2(1+h) - 3}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1 + 2h + h^2 + 2 + 2h - 3}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{4h + h^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h(4+h)}{h}
\end{aligned}
$$

# Aufgabe 3.4

Gegeben: $f(x) = x^2 + 2x$ und $x_0 = 1$

$$f'(1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(1+h)^2 + 2(1+h) - 3}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1 + 2h + h^2 + 2 + 2h - 3}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{4h + h^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h(4+h)}{h} = \lim_{h\to 0} (4+h)$$

# Aufgabe 3.4

Gegeben: $f(x) = x^2 + 2x$ und $x_0 = 1$

$$f'(1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(1+h)^2 + 2(1+h) - 3}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1 + 2h + h^2 + 2 + 2h - 3}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{4h + h^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h(4+h)}{h} = \lim_{h\to 0} (4+h) = 4$$

# Aufgabe 3.5

Bestimme die Ableitung der Funktion $f(x) = \frac{2}{x}$ an der Stelle $x_0 = -2$ durch Berechnung des Differenzialquotienten.

# Aufgabe 3.5

Gegeben: $f(x) = \frac{2}{x}$; $x_0 = -2$.

$$f'(-2) = \lim_{h \to 0} \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h}$$

# Aufgabe 3.5

Gegeben: $f(x) = \dfrac{2}{x}$; $x_0 = -2$.

$$f'(-2) = \lim_{h \to 0} \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\big(f(-2+h) - f(-2)\big)$$

# Aufgabe 3.5

Gegeben: $f(x) = \dfrac{2}{x}$; $x_0 = -2$.

$$f'(-2) = \lim_{h\to 0} \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\big(f(-2+h) - f(-2)\big)$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{2}{-2+h} - \frac{2}{-2}\right)$$

# Aufgabe 3.5

Gegeben: $f(x) = \frac{2}{x}$; $x_0 = -2$.

$$
\begin{aligned}
f'(-2) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \big( f(-2+h) - f(-2) \big) \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \left( \frac{2}{-2+h} - \frac{2}{-2} \right) \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \left( \frac{2}{h-2} + 1 \right)
\end{aligned}
$$

# Aufgabe 3.5

Gegeben: $f(x) = \frac{2}{x}$; $x_0 = -2$.

$$f'(-2) = \lim_{h\to 0} \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\big(f(-2+h) - f(-2)\big)$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{2}{-2+h} - \frac{2}{-2}\right)$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{2}{h-2} + 1\right) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{2}{h-2} + \frac{h-2}{h-2}\right)$$

# Aufgabe 3.5

Gegeben: $f(x) = \dfrac{2}{x}$; $x_0 = -2$.

$$f'(-2) = \lim_{h\to 0} \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\big(f(-2+h) - f(-2)\big)$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{2}{-2+h} - \frac{2}{-2}\right)$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{2}{h-2} + 1\right) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{2}{h-2} + \frac{h-2}{h-2}\right)$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{2+h-2}{h-2}\right) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{h}{h-2}\right)$$

# Aufgabe 3.5

Gegeben: $f(x) = \frac{2}{x}$; $x_0 = -2$.

$$f'(-2) = \lim_{h\to 0} \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\big(f(-2+h) - f(-2)\big)$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{2}{-2+h} - \frac{2}{-2}\right)$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{2}{h-2} + 1\right) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{2}{h-2} + \frac{h-2}{h-2}\right)$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{2+h-2}{h-2}\right) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{h}{h-2}\right)$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h-2} = \frac{1}{0-2} = -\frac{1}{2}$$

# Aufgabe 3.6

Bestimme die Ableitung der Funktion $f(x) = \sqrt{x+2}$ an der Stelle $x_0 = 3$ durch Berechnung des Differenzialquotienten.

# Aufgabe 3.6

Gegeben: $f(x) = \sqrt{x+2}$ und $x_0 = 3$

$f'(3)$

# Aufgabe 3.6

Gegeben: $f(x) = \sqrt{x+2}$ und $x_0 = 3$

$$f'(3) = \lim_{h \to 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h}$$

# Aufgabe 3.6

Gegeben: $f(x) = \sqrt{x+2}$ und $x_0 = 3$

$$f'(3) = \lim_{h \to 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{(3+h)+2} - \sqrt{5}}{h}$$

# Aufgabe 3.6

Gegeben: $f(x) = \sqrt{x+2}$ und $x_0 = 3$

$$f'(3) = \lim_{h\to 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{(3+h)+2} - \sqrt{5}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{h+5} - \sqrt{5}}{h}$$

# Aufgabe 3.6

Gegeben: $f(x) = \sqrt{x+2}$ und $x_0 = 3$

$$f'(3) = \lim_{h\to 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{(3+h)+2} - \sqrt{5}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{h+5} - \sqrt{5}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(\sqrt{h+5} - \sqrt{5}) \cdot {\color{red}(\sqrt{h+5} + \sqrt{5})}}{h \cdot {\color{red}(\sqrt{h+5} + \sqrt{5})}}$$

# Aufgabe 3.6

Gegeben: $f(x) = \sqrt{x+2}$ und $x_0 = 3$

$$f'(3) = \lim_{h\to 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{(3+h)+2} - \sqrt{5}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{h+5} - \sqrt{5}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(\sqrt{h+5} - \sqrt{5}) \cdot (\sqrt{h+5} + \sqrt{5})}{h \cdot (\sqrt{h+5} + \sqrt{5})} \quad \text{(erweitern} \to \text{3. BF)}$$

# Aufgabe 3.6

Gegeben: $f(x) = \sqrt{x+2}$ und $x_0 = 3$

$$f'(3) = \lim_{h\to 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{(3+h)+2} - \sqrt{5}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{h+5} - \sqrt{5}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(\sqrt{h+5} - \sqrt{5}) \cdot (\sqrt{h+5} + \sqrt{5})}{h \cdot (\sqrt{h+5} + \sqrt{5})} \quad \text{(erweitern} \to \text{3. BF)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(h+5) - 5}{h(\sqrt{h+5} + \sqrt{5})} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h(\sqrt{h+5} + \sqrt{5})}$$

# Aufgabe 3.6

Gegeben: $f(x) = \sqrt{x+2}$ und $x_0 = 3$

$$f'(3) = \lim_{h\to 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{(3+h)+2} - \sqrt{5}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{h+5} - \sqrt{5}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(\sqrt{h+5} - \sqrt{5}) \cdot (\sqrt{h+5} + \sqrt{5})}{h \cdot (\sqrt{h+5} + \sqrt{5})} \quad \text{(erweitern} \to \text{3. BF)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(h+5) - 5}{h(\sqrt{h+5} + \sqrt{5})} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h(\sqrt{h+5} + \sqrt{5})}$$

# Aufgabe 3.6

Gegeben: $f(x) = \sqrt{x+2}$ und $x_0 = 3$

$$f'(3) = \lim_{h\to 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{(3+h)+2} - \sqrt{5}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{h+5} - \sqrt{5}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(\sqrt{h+5} - \sqrt{5}) \cdot (\sqrt{h+5} + \sqrt{5})}{h \cdot (\sqrt{h+5} + \sqrt{5})} \qquad \text{(erweitern} \to \text{3. BF)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(h+5) - 5}{h(\sqrt{h+5} + \sqrt{5})} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h(\sqrt{h+5} + \sqrt{5})}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{h+5} + \sqrt{5}}$$

# Aufgabe 3.6

Gegeben: $f(x) = \sqrt{x+2}$ und $x_0 = 3$

$$f'(3) = \lim_{h\to 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{(3+h)+2} - \sqrt{5}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{h+5} - \sqrt{5}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(\sqrt{h+5} - \sqrt{5}) \cdot (\sqrt{h+5} + \sqrt{5})}{h \cdot (\sqrt{h+5} + \sqrt{5})} \quad \text{(erweitern} \to \text{3. BF)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(h+5) - 5}{h(\sqrt{h+5} + \sqrt{5})} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h(\sqrt{h+5} + \sqrt{5})}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{h+5} + \sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{0+5} + \sqrt{5}}$$

# Aufgabe 3.6

Gegeben: $f(x) = \sqrt{x+2}$ und $x_0 = 3$

$$f'(3) = \lim_{h\to 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{(3+h)+2} - \sqrt{5}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{h+5} - \sqrt{5}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(\sqrt{h+5} - \sqrt{5}) \cdot (\sqrt{h+5} + \sqrt{5})}{h \cdot (\sqrt{h+5} + \sqrt{5})} \quad \text{(erweitern} \rightarrow \text{3. BF)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(h+5) - 5}{h(\sqrt{h+5} + \sqrt{5})} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h(\sqrt{h+5} + \sqrt{5})}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{h+5} + \sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{0+5} + \sqrt{5}} = \frac{1}{2\sqrt{5}}$$

# Aufgabe 3.6

Gegeben: $f(x) = \sqrt{x+2}$ und $x_0 = 3$

$$f'(3) = \lim_{h\to 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{(3+h)+2} - \sqrt{5}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{h+5} - \sqrt{5}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(\sqrt{h+5} - \sqrt{5}) \cdot (\sqrt{h+5} + \sqrt{5})}{h \cdot (\sqrt{h+5} + \sqrt{5})} \qquad (\text{erweitern} \to 3.\ \text{BF})$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(h+5) - 5}{h(\sqrt{h+5} + \sqrt{5})} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h(\sqrt{h+5} + \sqrt{5})}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{h+5} + \sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{0+5} + \sqrt{5}} = \frac{1}{2\sqrt{5}}$$

## Aufgabe 3.7

Leite die Ableitungsfunktion von $f(x) = x^3$ über den Differenzialquotienten her.

# Aufgabe 3.7

Gegeben: $f(x) = x^3$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h}$$

# Aufgabe 3.7

Gegeben: $f(x) = x^3$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^3}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3}{h}$$

# Aufgabe 3.7

Gegeben: $f(x) = x^3$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^3}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h(3x^2 + 3xh + h^2)}{h} = \lim_{h\to 0} \left(3x^2 + 3xh + h^2\right) = 3x^2$$

# Aufgabe 3.8

Bestimme die Gleichung der Tangente und der Normalen an den Graphen der Funktion mit der Gleichung $f(x) = \frac{1}{2}x^3$ an der Stelle $x_0 = 2$. Berechne den Differenzialquotienten mit dem Taschenrechner.

# Aufgabe 3.8

Für die Tangentengleichung sind die Koordinaten des Kurvenpunktes $(x_0, y_0)$ zusammen mit der Steigung $m$ in die Gleichung der Form $y = mx + q$ einzusetzen und nach $q$ aufzulösen:

Steigung: $m_t = f'(2) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{2}x^3\right)\Big|_{x=2} = 6$

# Aufgabe 3.8

Für die Tangentengleichung sind die Koordinaten des Kurvenpunktes $(x_0, y_0)$ zusammen mit der Steigung $m$ in die Gleichung der Form $y = mx + q$ einzusetzen und nach $q$ aufzulösen:

Steigung: $m_t = f'(2) = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\dfrac{1}{2}x^3\right)\Bigg|_{x=2} = 6$

$$x_0 = 2 \quad \Rightarrow \quad y_0 = f(x_0) = f(2) = \tfrac{1}{2} \cdot 2^3 = 4$$

# Aufgabe 3.8

Für die Tangentengleichung sind die Koordinaten des Kurvenpunktes $(x_0, y_0)$ zusammen mit der Steigung $m$ in die Gleichung der Form $y = mx + q$ einzusetzen und nach $q$ aufzulösen:

Steigung: $m_t = f'(2) = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\dfrac{1}{2}x^3\right)\Big|_{x=2} = 6$

$x_0 = 2 \quad \Rightarrow \quad y_0 = f(x_0) = f(2) = \frac{1}{2} \cdot 2^3 = 4$

$$y_0 = m_t x_0 + q$$

$$4 = 6 \cdot 2 + q$$

$$q = -8$$

*Gleichung der Tangente:* $t\colon\ y = 6x - 8$

Für die Gleichung der Normalen berechnet man deren Steigung $m_n$ aus der Steigung der Tangente $m_t$ und geht dann wie oben vor.

Steigung: $m_n = -\dfrac{1}{m_t} = -\dfrac{1}{6}$

$$y_0 = m_t x_0 + q$$

$$4 = -\frac{1}{6} \cdot 2 + q$$

$$4 = -\frac{1}{3} + q$$

$$12 = -1 + 3q$$

$$13 = 3q$$

$$q = \frac{13}{3}$$

*Gleichung der Normalen:* $t\colon\ y = -\dfrac{1}{6}x + \dfrac{13}{3}$

# Aufgabe 3.9

Bestimme die Gleichung der Tangente und der Normalen an den Graphen der Funktion mit der Gleichung $f(x) = \dfrac{x+3}{x+1}$ an der Stelle $x = 1$. Berechne den Differenzialquotienten mit dem Taschenrechner.

# Aufgabe 3.9

$$f(x) = \frac{x+3}{x+1}$$

- $x = 1 \quad \Rightarrow \quad f'(1) = -\frac{1}{2}$ (TR)

# Aufgabe 3.9

$$f(x) = \frac{x+3}{x+1}$$

- $x = 1 \quad \Rightarrow \quad f'(1) = -\frac{1}{2}$ (TR)

(b) $y_0 = f(x_0) = f(1) = \frac{4}{2} = 2$

# Aufgabe 3.9

$$f(x) = \frac{x+3}{x+1}$$

- $x = 1 \quad \Rightarrow \quad f'(1) = -\frac{1}{2}$ (TR)

(b) $y_0 = f(x_0) = f(1) = \frac{4}{2} = 2$

$$y_0 = m \cdot x_0 + q$$
$$2 = -\frac{1}{2} \cdot 1 + q$$
$$q = \frac{5}{2}$$

# Aufgabe 3.9

$$f(x) = \frac{x+3}{x+1}$$

- $x = 1 \quad \Rightarrow \quad f'(1) = -\frac{1}{2}$ (TR)

(b) $y_0 = f(x_0) = f(1) = \frac{4}{2} = 2$

$$y_0 = m \cdot x_0 + q$$

$$2 = -\frac{1}{2} \cdot 1 + q$$

$$q = \frac{5}{2}$$

$$t\colon y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$$

- $$\begin{aligned} m_t \cdot m_n &= -1 \\ -\tfrac{1}{2} \cdot m_n &= -1 \\ m_n &= 2 \end{aligned}$$

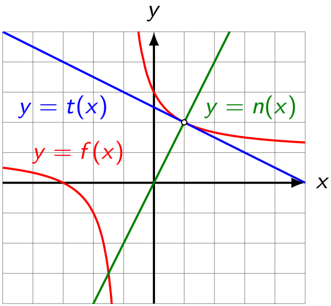
- $$m_t \cdot m_n = -1$$
  $$-\frac{1}{2} \cdot m_n = -1$$
  $$m_n = 2$$

  $$y_0 = m_t \cdot x_0 + q_t$$
  $$2 = 2 \cdot 1 + q$$
  $$q = 0$$

- $$\begin{aligned} m_t \cdot m_n &= -1 \\ -\tfrac{1}{2} \cdot m_n &= -1 \\ m_n &= 2 \end{aligned}$$

  $$y_0 = m_t \cdot x_0 + q_t$$
  $$2 = 2 \cdot 1 + q$$
  $$q = 0$$
  $$n\colon y = 2\,x$$

# Graphische Darstellung



# Aufgabe 3.10

Welchen Winkel (in Grad) schliesst die Tangente an den Graphen der Funktion mit der Gleichung $f(x) = \sqrt{x^2 + 4x + 11}$ an der Stelle $x = 1$ mit der positiven $x$-Achse ein? Verwende den Taschenrechner zur Bestimmung der Ableitung.

# Aufgabe 3.10

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 4x + 11}$$

# Aufgabe 3.10

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 4x + 11}$$

$$f'(1) = 0.75 \text{ (TR)}$$

# Aufgabe 3.10

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 4x + 11}$$

$$f'(1) = 0.75 \text{ (TR)}$$

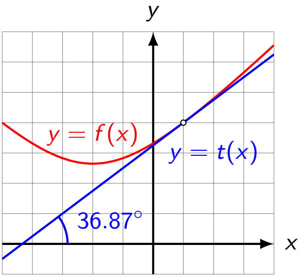
$$\alpha = \arctan(0.75) = 36.87^\circ$$

# Aufgabe 3.10

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 4x + 11}$$

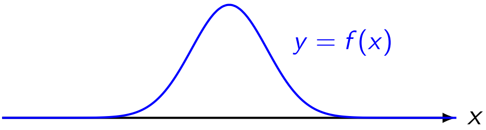
$$f'(1) = 0.75 \text{ (TR)}$$

$$\alpha = \arctan(0.75) = 36.87^\circ$$

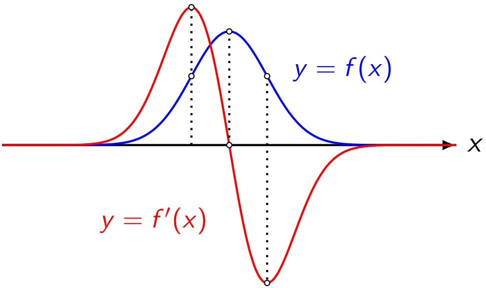


# Aufgabe 3.11

Skizziere den Graphen der Ableitungsfunktion von $f$ qualitativ korrekt in das bestehende Koordinatensystem.



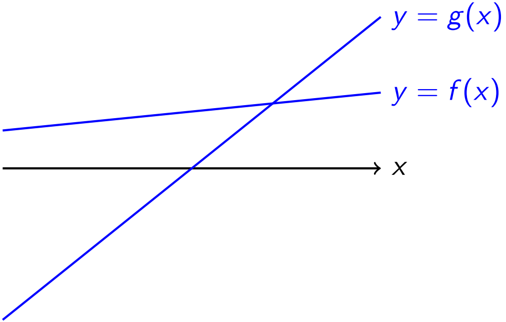
# Aufgabe 3.11



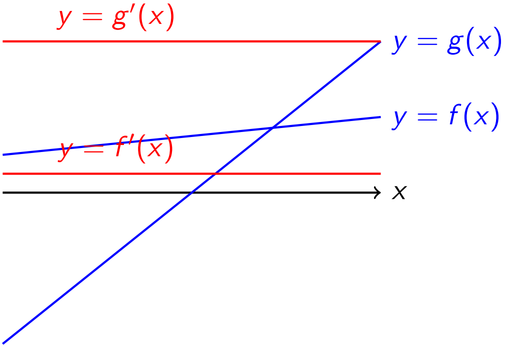

- Stellen von $f$ mit horizontaler Tangente werden Nullstellen von $f'$.
- Stellen von $f$ mit maximaler Steigung werden Hochstellen von $f'$.
- Stellen von $f$ mit minimaler Steigung werden Tiefstellen von $f'$.

# Aufgabe 3.12

Skizziere den Graphen der Ableitungsfunktionen von $f$ und $g$ qualitativ korrekt in das bestehende Koordinatensystem.



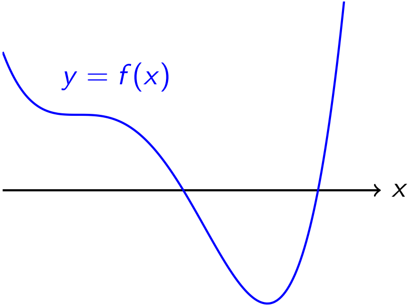
# Aufgabe 3.12



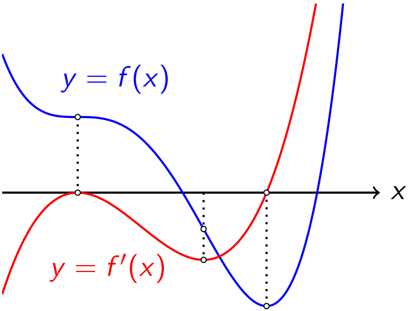

Wichtig ist nur, dass die beiden Ableitungsfunktionen parallel zur $x$-Achse sind und dass die Ableitung der Geraden mit der grösseren Steigung auch oberhalb der Ableitung der Geraden mit der kleineren Steigung liegt.

# Aufgabe 3.13

Skizziere den Graphen der Ableitungsfunktion von $f$ qualitativ korrekt in das bestehende Koordinatensystem.



# Aufgabe 3.13




- Stellen von $f$ mit horizontaler Tangente werden Nullstellen von $f'$.
- Stellen von $f$ mit maximaler Steigung werden Hochstellen von $f'$.
- Stellen von $f$ mit minimaler Steigung werden Tiefstellen von $f'$.