Folgen und Grenzwerte **Zusammenfassung**

1. Folgen

Eine reelle Zahlenfolge (a_n) ist eine Abbildung, die jeder natürlichen Zahl n eine reelle Zahl zuordnet.

(a) $a_n = \dfrac{1}{n} \quad \Rightarrow \quad (a_n) = \left(1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{4}, \ldots\right)$

(b) $a_n = 7 \quad \Rightarrow \quad (a_n) = (7, 7, 7, \ldots)$

(c) $a_n = (-1)^{n+1} \quad \Rightarrow \quad (a_n) = (1, -1, 1, -1, \ldots)$

(d) $a_n = 2n - 1 \quad \Rightarrow \quad (a_n) = (1, 3, 5, 7, 9, \ldots)$

(e) $a_n = \left\lfloor \dfrac{n+1}{2} \right\rfloor \quad \Rightarrow \quad (a_n) = (1, 1, 2, 2, 3, 3, \ldots)$

(f) $a_n = 0.1^n \quad \Rightarrow \quad (a_n) = (0.1, 0.01, 0.001, 0.001, \ldots)$

2. Reihen

Ist (a_n) eine reelle Zahlenfolge, so wird die Folge (s_n) mit $s_n = \sum_{i=1}^{n} a_n$ die zu (a_n) gehörende *Reihe* oder *Teilsummenfolge* genannt.

(a) $a_n = \dfrac{1}{n} \quad \Rightarrow \quad (s_n) = \left(1, \dfrac{3}{2}, \dfrac{11}{6}, \dfrac{25}{12}, \ldots\right)$

(b) $a_n = 7 \quad \Rightarrow \quad (s_n) = (7, 14, 21, 28, \ldots)$

(c) $a_n = (-1)^{n+1} \quad \Rightarrow \quad (s_n) = (1, 0, 1, 0, 1, \ldots)$

(d) $a_n = 2n - 1 \quad \Rightarrow \quad (s_n) = (1, 4, 9, 16, 25, \ldots)$

(e) $a_n = \left\lfloor \dfrac{n+1}{2} \right\rfloor \quad \Rightarrow \quad (s_n) = (1, 2, 4, 6, 9, 12, \ldots)$

(f) $a_n = 0.1^n \quad \Rightarrow \quad (s_n) = (0.1, 0.11, 0.111, 0.111, 0.1111, \ldots)$

3. Alternierende Folgen

Eine Folge heisst *alternierend* wenn ihre Werte abwechselnd positiv und negativ oder abwechselnd negativ und positiv sind.

(a) $a_n = (-1)^n$ ist alternierend $\quad (a_n) = \big(-1, 1, -1, 1, \ldots\big)$

(b) $a_n = 7 + (-1)^n$ ist nicht alternierend $\quad (a_n) = \big(6, 8, 6, 8, \ldots\big)$

(c) $a_n = (-n)^n$ ist alternierend $\quad (a_n) = \big(-1, 4, -27, 256, \ldots\big)$

(d) $a_n = \sin\left(n \cdot \dfrac{\pi}{2}\right)$ ist nicht alternierend $\quad (a_n) = \big(1, 0, -1, 0, 1, \ldots\big)$

4. Monotone Folgen

Eine Folge (a_n) heisst ...

- *monoton wachsend*, wenn $a_n \leq a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.
- *monoton fallend*, wenn $a_n \geq a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.
- *streng monoton wachsend*, wenn $a_n < a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.
- *streng monoton fallend*, wenn $a_n > a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.
- *[streng] monoton*, wenn sie weder [streng] monoton wachsend noch [streng] monoton fallend ist.
- *nicht monoton*, wenn sie weder monoton wachsend noch monoton fallend ist.

(a) $a_n = -\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ monoton fallend

(b) $a_n = (-1)^n$ nicht monoton

(c) $a_n = \frac{n}{n+1}$ streng monoton wachsend

(d) $a_n = 3$ monoton wachsend und monoton fallend

5. Beschränke Folgen

Eine Folge (a_n) heisst ...

- *nach oben beschränkt*, wenn es eine Zahl S gibt, so dass $a_n \leq S$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.
- *nach unten beschränkt*, wenn es eine Zahl S gibt, so dass $a_n \geq S$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.
- *beschränkt*, wenn sie nach oben *und* nach unten beschränkt ist.

(a) $a_n = n$ nach unten beschränkt $[0 \leq a_n]$

(b) $a_n = -n$ nach oben beschränkt $[a_n \leq 0]$

(c) $a_n = n \cdot (-1)^n$ ist weder nach oben noch nach unten beschränkt

(d) $a_n = \cos(n^2)$ ist beschränkt $[-1 \leq \cos(x) \leq 1]$

6. Häufungspunkte von Folgen

Eine reelle Zahl h ist *Häufungspunkt* der reelle Zahlenfolge (a_n), wenn für jedes $\varepsilon > 0$ unendliche viele Folgeglieder innerhalb der ε-Umgebung $U(a, \varepsilon)$ von h liegen.

(a) $a_n = \frac{1}{n}$ Häufungspunkt $h = 0$

(b) $a_n = (-1)^n \quad \Rightarrow \quad h_1 = -1,\ h_2 = 1$

(c) $a_n = \sin(n) \quad \Rightarrow$ keine Häufungspunkte

(d) $a_n = \sin\left(n \cdot \frac{\pi}{4}\right) \quad \Rightarrow \quad h_1 = 0,\ h_2 = \frac{\sqrt{2}}{2},\ h_3 = 1,\ h_4 = -\frac{\sqrt{2}}{2},\ h_5 = -1$

7. Grenzwerte von Folgen

Eine reelle Zahlenfolge (a_n) *konvergiert gegen eine reelle Zahl* a, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ alle bis auf endliche viele Folgeglieder innerhalb der ε-Umgebung $U(a, \varepsilon)$ von a liegen. In diesem Fall wird a *Grenzwert* der Folge genannt und wir schreiben dafür

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a$$

In allen anderen Fällen wird die Folge *divergent* genannt. Zwei Arten divergenter Folgen erhalten jedoch eine zusätzliche Bezeichnung:

Eine reelle Zahlenfolge (a_n) ist *bestimmt divergent gegen* ∞, wenn für jede Zahl M alle bis auf endlich viele Folgeglieder grösser als M sind. Wir schreiben dann $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$.

Eine reelle Zahlenfolge (a_n) ist *bestimmt divergent gegen* $-\infty$, wenn für jedes Zahl M alle bis auf endlich viele Folgeglieder kleiner als M sind. Wir schreiben dann $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n$ existiert nicht

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4-2n}{3+n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4/n-2}{3/n+1} = \dfrac{-2}{1} = -2$

(d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2+n+1}{n^3+n^2} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1/n+1/n^2+1/n^3}{1+1/n} = \dfrac{0+0+0}{1+0} = 0$

(e) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2+1}\right) \overset{3BF}{=} \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n-1}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2+1}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{n+n} = \dfrac{1}{2}$

(f) $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n \cdot n$ existiert nicht

(g) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2}{n+1} = \infty$ (Zähler wächst schneller als Nenner)

(h) $\lim\limits_{n\to\infty} 2^n = \infty$

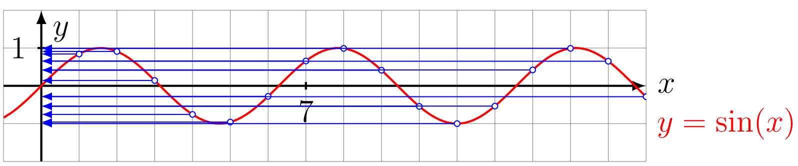
(i) $\lim\limits_{n\to\infty} 2^{-n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{2^n} = 0$

(j) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}^1 = \mathrm{e}$ (auswendig lernen)

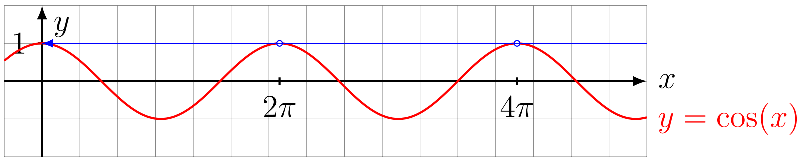
(k) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\dfrac{7}{n}\right)^n = \mathrm{e}^7$ (auswendig lernen)

(l) $\lim\limits_{n\to\infty} \ln\left(\dfrac{1}{n}\right) = -\infty$ (Siehe Graph in Formelsammlung auf S. 58)

(m) $\lim\limits_{n\to\infty} \sin(n)$ existiert nicht



(n) $\lim\limits_{n\to\infty} \cos\big(n \cdot 2\pi\big) = 1$



(o) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sin(n)}{n} = 0$

(p) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n}{n^9} = \infty$

Merke: Die Exponentialfunktion b^n mit $b > 1$ wächst „langfristig“ schneller als jede Potenzfunktion n^r mit $r > 0$.

(q) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^3}{1.1^n} = 0$

Merke: Die Exponentialfunktion b^n mit $b > 1$ wächst „langfristig“ schneller als jede Potenzfunktion n^r mit $r > 0$.

8. Grenzwerte von Funktionen

Ist f eine reelle Funktion mit dem Definitionsbereich D_f und a eine relle Zahl, dann ist der Ausdruck

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = a$$

genau dann definiert, wenn *für jede* Folge (x_n) mit $x_n \in D_f$, die gegen x_0 konvertiert (hier durch $x \to x_0$ abgekürzt), die Folge der Funktionswerte $\big(f(x_n)\big)$ gegen a konvergiert. Der Grenzwert kann auch *uneigentlich*, also ∞ oder $-\infty$ sein.

(a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x+3}{x+4} = \dfrac{4}{5}$

(b) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-5x+6}{x-2} = \dfrac{0}{0} \overset{\text{kürzen}}{\Longrightarrow} \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{(x-2)(x-3)}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2}(x-3) = -1$

(c) $\lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{1}{x-3} = -\infty$

x	2.9	2.99	...
$f(x)$	-10	-100	...

(d) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^4+x^3+x^2+x-4}{x^4+x^2+x-3} = \dfrac{0}{0}$

Offenbar ist $(x-1)$ ein Faktor beider Polynome. Daher können wir Zähler und Nenner z. B. mit dem Horner-Schema durch $(x-1)$ dividieren und es mit den gekürzten Quotienten erneut versuchen.

Zählerpolynom:

x_0	a_4	1	1	1	-4
1	1	2	3	4	0

Nennerpolynom:

x_0	b_4	0	1	1	-3
1	1	1	2	3	0

$$\dots = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(1x^3+2x^2+3x+4)}{(x-1)(1x^3+1x^2+2x+3)} = \lim_{x\to 1} \frac{x^3+2x^2+3x+4}{x^3+x^2+2x+3} = \frac{10}{7}$$

(e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1$

x_n	0.1	0.01	0.001	...
$f(x_n)$	0.998...	0.99998...	0.9999998...	...

(f) $\lim\limits_{x\to 0^+} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} = 0$

x_n	1	0.1	0.01	...
$f(x_n)$	$3.68 \cdot 10^{-1}$	$4.54 \cdot 10^{-5}$	$3.72 \cdot 10^{-44}$	...