Wachstum und Zerfall

Prüfungsvorbereitung

Aufgabe 1

Löse die vier Grundaufgaben der Zinseszinsrechnung. (p ist jeweils ein Jahreszinfuss.)

(a) *Gegeben:* $K_0 = \text{CHF } 12\,000$, $p = 1\%$, $n = 8$ Jahre; *Gesucht:* K_n

(b) *Gegeben:* $K_n = \text{USD } 700\,000$, $p = 0.5\%$, $n = 20$ Jahre
Gesucht: K_0

(c) *Gegeben:* $K_0 = \text{EUR } 46\,000$, $K_n = \text{EUR } 57\,511$, $n = 15$ Jahre
Gesucht: p

(d) *Gegeben:* $K_0 = \text{CNY } 970\,000$, $K_n = \text{CNY } 1\,115\,000$, $p = 2\%$
Gesucht: n

Aufgabe 1

(a) $K_n = 12\,000 \cdot 1.01^8 = 12\,994\,\text{CHF}$

(b) $K_n = K_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$

$$K_0 = \frac{K_n}{\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n}$$

$$K_0 = \frac{700\,000}{1.005^{20}} = 633\,544\,\text{USD}$$

(c)
$$K_n = K_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$

$$\frac{K_n}{K_0} = \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$

$$1 + \frac{p}{100} = \sqrt[n]{\frac{K_n}{K_0}}$$

$$\frac{p}{100} = \sqrt[n]{\frac{K_n}{K_0}} - 1$$

Aufgabe 2

In einem Land betrage die durchschnittliche jährliche Inflation 5%. Wie viele Jahre würde es dauern, bis dort das Geld nur noch 70% seines ursprünglichen Wertes hat?

Aufgabe 2

Die Inflationsrate entspricht einem negativen Zinssatz.

$$K(n) = K(0) \cdot \left(1 - \frac{p}{100}\right)^n \qquad \text{Endkapital} = 0.7 \cdot \text{Anfangskapital}$$

$$0.7 \cdot K(0) = K(0) \cdot \left(1 - \frac{5}{100}\right)^n \qquad || : K(0)$$

$$0.7 = 0.95^n \qquad || \ \lg, \text{ Logarithmengesetze}$$

$$\lg 0.7 = n \cdot \lg 0.95$$

$$n = \lg 0.7 / \lg 0.95 = 6.953$$

Es dauert etwa 7 Jahre.

Aufgabe 3

Nach wie vielen Jahren hat sich ein Kapitel verdoppelt, wenn es zu 6% pro Jahr verzinst wird?

Aufgabe 3

$$\begin{aligned} K_0 \cdot 1.06^t &= 2 \cdot K_0 \quad || : K_0 \\ 1.06^t &= 2 \quad \text{(Gleichung logarithmieren)} \\ t \cdot \log_{10} 1.06 &= \log_{10} 2 \\ t &= \frac{\log_{10} 2}{\log_{10} 1.06} = 11.9 \text{ Jahre} \end{aligned}$$

Aufgabe 4

In einer Bakterienkultur ohne Raum- und Nahrungsmangel wächst die Bakterienzahl exponentiell. Um 8:00 Uhr hat es 2000 Bakterien, um 12:00 Uhr bereits 36 000.

(a) Wie viele Bakterien hat es um 13:00 Uhr?

(b) Wie viele Bakterien hatte es um 07:30 Uhr?

(c) Um wie viel Uhr werden es 100 000 Bakterien sein?

Aufgabe 4

Zuerst muss die Konstante k der Wachstumsgleichung bestimmt werden.

Dazu wählen wir willkürlich den „bequemen“ Startzeitpunkt $t = 0$ und eine sinnvolle Einheit für die Zeit: $[t] =$ Minuten.

$$\begin{aligned}
A(t) &= A(0) \cdot \mathrm{e}^{kt} \\
A(4) &= A(0) \cdot \mathrm{e}^{k \cdot 240} \\
36000 &= 2000 \cdot \mathrm{e}^{240k} \\
18 &= \mathrm{e}^{240k} \\
\ln 18 &= 240k \\
k &= (\ln 18)/240 = 0.012043 (\xrightarrow{\text{STO}} K) \\
A(t) &= 2000 \cdot \mathrm{e}^{0.012043\, t}
\end{aligned}$$

Mit $A(t)$ können die gesuchten Werte bestimmt werden, wobei die Minuten jeweils vom gewählten Startzeitpunkt an gerechnet werden. Dabei werden Zeitpunkte nach dem Startzeitpunkt positiv und Zeitpunkte vor dem Startzeitpunkt einfach negativ gerechnet

Aufgabe 5

Die Anzahl der radioaktiven Atomkerne eines Präparats nimmt innerhalb von 7 Jahren von $5.1 \cdot 10^{20}$ auf $4.34 \cdot 10^{20}$ ab. Berechne die Halbwertszeit $T_{\frac{1}{2}}$ des Präparats und bestimme mit Hilfe der Formelsammlung, um welches Nuklid es sich handelt.

Aufgabe 5

Zerfallsgleichung:

$$N(t) = N(0) \cdot \mathrm{e}^{-k \cdot t} \qquad \text{bekannte Grössen einsetzen}$$

$$4.34 \cdot 10^{20} = 5.1 \cdot 10^{20} \cdot \mathrm{e}^{-k \cdot 7} \qquad || \ : 5.1 \cdot 10^{20}$$

$$\frac{4.34 \cdot 10^{20}}{5.1 \cdot 10^{20}} = \mathrm{e}^{-7k} \qquad \text{kürzen}$$

$$4.34/5.1 = \mathrm{e}^{-7k} \qquad || \ \ln(= \log_{\mathrm{e}})$$

$$\ln(4.34/5.1) = -7k$$

$$k = -\ln(4.34/5.1)/7$$

$$k = 0.02305231 \xrightarrow{\text{STO}} K$$

Gleichung für die Halbwertszeit $T_{1/2}$:

$$0.5 \cdot N(0) = N(0) \cdot \mathrm{e}^{-K \cdot T_{1/2}}$$

$$0.5 = \mathrm{e}^{-K \cdot T_{1/2}} \qquad || \ \ln(= \log_{\mathrm{e}})$$

Aufgabe 6

Ein Land hat zu Beginn des Jahres 2006 eine Bevölkerungszahl von 50 Millionen Einwohnern. In welchem Jahr übersteigt die Einwohnerzahl dieses Landes die 60 Millionen-Grenze, wenn das durchschnittliche Bevölkerungswachstum konstant 5% pro Jahr beträgt?

Aufgabe 6

$$\begin{aligned}
50 \cdot 10^6 \cdot 1.05^t &= 60 \cdot 10^6 \\
1.05^t &= 1.2 \\
\log_{10} 1.05^t &= \log_{10} 1.2 \\
t \cdot \log_{10} 1.05 &= \log_{10} 1.2 \\
t &= \frac{\log_{10} 1.2}{\log_{10} 1.05} = 3.74 \quad \Rightarrow \quad \text{im Jahr 2009}
\end{aligned}$$