

Aufgabe 1

$$(a) \begin{pmatrix} 8 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} = 0 - 4 = -4$$

$$(b) \begin{pmatrix} 2a \\ a \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ -a \\ a \end{pmatrix} = 2a^2 - a^2 + a = a^2 + a$$

$$(c) \begin{pmatrix} x \\ \sqrt{2} \\ y \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ y \\ -\sqrt{2} \\ x \end{pmatrix} = \sqrt{2}x + \sqrt{2}y - \sqrt{2}y - \sqrt{2}x = 0$$

Aufgabe 2

$$(a) \vec{a} \cdot \vec{b} = 3 \cdot 1 + (-2) \cdot 5 + 8 \cdot 1 = 3 - 10 + 8 = 1 \text{ (nicht senkrecht)}$$

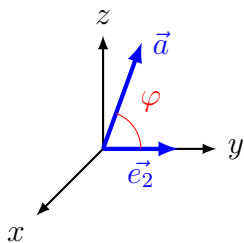
$$(b) \vec{a} \cdot \vec{b} = p \cdot q + q \cdot (-p) + p \cdot 0 = pq - pq = 0 \text{ (senkrecht)}$$

Aufgabe 3

$$(a) \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \\ c \cdot 4 + 2 \cdot 3 + 6 \cdot 7 = 0 \\ 4c + 6 + 42 = 0 \\ 4c + 48 = 0 \\ c = -12$$

$$(b) \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \\ c \cdot c + (-11) \cdot c + 6 \cdot 4 = 0 \\ c^2 - 11c + 24 = 0 \\ (c - 3)(c - 8) = 0 \\ c_1 = 3 \\ c_2 = 8$$

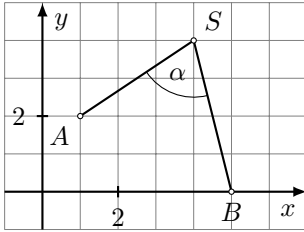
Aufgabe 4



$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ 8 \end{pmatrix}, \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\varphi = \arccos \frac{\vec{a} \cdot \vec{e}_2}{|\vec{a}| \cdot |\vec{e}_2|} = \arccos \frac{9}{\sqrt{161} \cdot \sqrt{1}} = 44.82^\circ$$

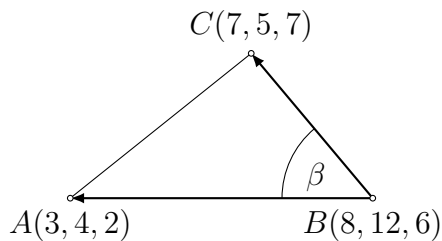
Aufgabe 5



$$\vec{a} = \overrightarrow{SA} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}, \vec{b} = \overrightarrow{SB} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{a \cdot b} = \frac{5}{\sqrt{13} \cdot \sqrt{17}} = 0.3363 \Rightarrow \alpha = 70.35^\circ$$

Aufgabe 6



$$\text{Seitenvektoren von } \beta: \overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} -5 \\ -8 \\ -4 \end{pmatrix}; \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -1 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \beta &= \arccos \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}| \cdot |\overrightarrow{BC}|} = \arccos \frac{5 + 56 - 4}{\sqrt{25 + 64 + 16} \cdot \sqrt{1 + 49 + 1}} \\ &= \arccos \frac{57}{\sqrt{105} \cdot \sqrt{51}} = 38.84^\circ \end{aligned}$$

Aufgabe 7

$$\cos 45^\circ = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{24 + 2z}{6 \cdot \sqrt{36 + z^2}} \quad || \cdot 6\sqrt{36 + z^2}$$

$$\sqrt{2} \cdot 3 \cdot \sqrt{36 + z^2} = 24 + 2z \quad ||^2$$

$$18(36 + z^2) = 576 + 96z + 4z^2$$

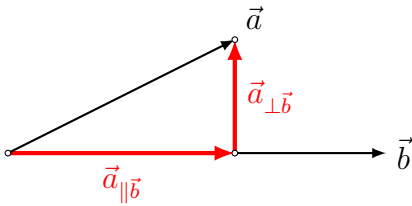
$$648 + 18z^2 = 576 + 96z + 4z^2$$

$$14z^2 - 96z + 72 = 0$$

$$z_1 = 6$$

$$z_2 = \frac{6}{7}$$

Aufgabe 8



$$\vec{a}_{\parallel\vec{b}} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\vec{b} \cdot \vec{b}} \cdot \vec{b} = \frac{15}{30} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2.5 \\ 0.5 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a}_{\perp\vec{b}} = \vec{a} - \vec{a}_{\parallel\vec{b}} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2.5 \\ 0.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2.5 \\ 6.5 \end{pmatrix}$$

$$\text{Insgesamt: } \vec{a} = \vec{a}_{\parallel\vec{b}} + \vec{a}_{\perp\vec{b}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2.5 \\ 0.5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -2.5 \\ 6.5 \end{pmatrix} \text{ mit } \vec{a}_{\parallel\vec{b}} \perp \vec{a}_{\perp\vec{b}}$$

Aufgabe 9

Voraussetzungen: $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 3$ und $\vec{a} \perp \vec{b}$

$$\begin{aligned} (3\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - 2\vec{b}) &= 3 \cdot \vec{a} \cdot \vec{a} - 6 \cdot \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{a} - 2 \cdot \vec{b} \cdot \vec{b} \\ &= 3 \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \cdot \cos(0^\circ) - 5 \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(90^\circ) + 2 \cdot |\vec{b}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(0^\circ) \\ &= 3 \cdot 4^2 \cdot 1 - 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 0 + 2 \cdot 3^2 \cdot 1 = 48 - 18 = 30 \end{aligned}$$

Aufgabe 10

$$(a) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \vec{e}_3)$$

$$(b) \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$(c) \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix} \quad (\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a})$$

$$(d) \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{Faktoren sind kollinear})$$

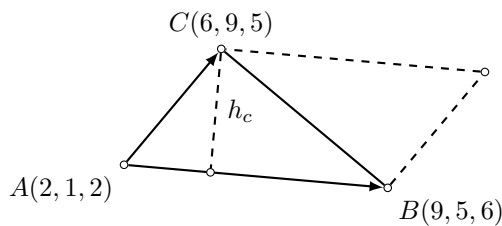
Aufgabe 11

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 55 \\ -50 \end{pmatrix} \Rightarrow |\vec{c}| = \sqrt{10^2 + 55^2 + (-50)^2} = 75$$

geforderte Länge: 30 $\Rightarrow \vec{c}$ muss mit dem Faktor $\pm \frac{30}{75} = \pm \frac{2}{5}$ skaliert werden:

$$\vec{c}_1 = \frac{2}{5} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 55 \\ -50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 22 \\ -20 \end{pmatrix} \quad \vec{c}_2 = -\frac{2}{5} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 55 \\ -50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -22 \\ 20 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 12



$$\vec{AB} = \vec{r}_B - \vec{r}_A = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}; \quad \vec{AC} = \vec{r}_C - \vec{r}_A = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$(a) F_{ABC} = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}| = \frac{1}{2} \left| \begin{pmatrix} -20 \\ -5 \\ 40 \end{pmatrix} \right| = 22.5$$

$$(b) h_c = \frac{2F_{ABC}}{|\vec{AB}|} = \frac{45}{9} = 5$$

Aufgabe 13

$$\left| \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 5 \\ 2x - 6 \\ 18 - x \end{pmatrix} \right| = 15$$

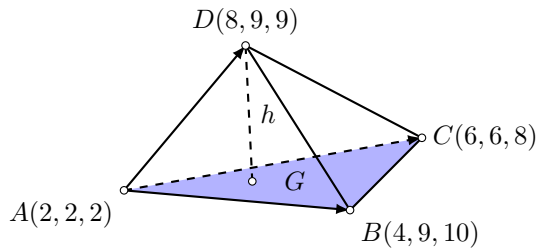
$$\sqrt{25 + (2x - 6)^2 + (18 - x)^2} = 15 \quad ||^2$$
$$25 + (4x^2 - 24x + 36) + (324 - 36x + x^2) = 225$$

$$5x^2 - 60x + 160 = 0$$

$$x_1 = 8$$

$$x_2 = 4$$

Aufgabe 14



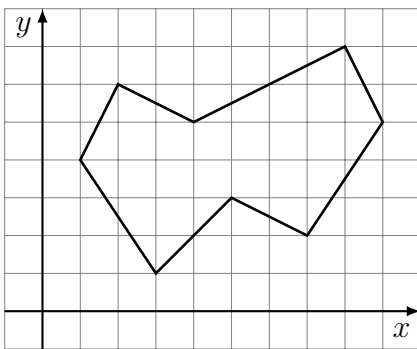
$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}, \vec{AC} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}, \vec{AD} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$V = V_{\text{Tetraeder}} = \frac{1}{6} |(\vec{AB} \times \vec{AC}) \cdot \vec{AD}| = \frac{1}{6} \left| \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ -20 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} \right| = 10$$

$$G = \frac{1}{2} \cdot |\vec{AB} \times \vec{AC}| = 15$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h \Rightarrow h = \frac{3V}{G} = 2$$

Aufgabe 15



Punkt	x	y	$x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i$	$(1 \leq i \leq 8)$
P_1	3	1	4	
P_2	5	3	-11	
P_3	7	2	17	
P_4	9	5	23	
P_5	8	7	12	
P_6	4	5	14	
P_7	2	6	2	
P_8	1	4	-11	
$P_9 = P_1$	3	1	-	
Summe			50	
Flächeninhalt			25	