Vektorgeometrie (Kapitel 5)

Prüfungsvorbereitung

Aufgabe 1

Berechne die Skalarprodukte in $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ und $\mathbb{R}^4$. Vereinfache Ausdrücke mit Parametern.

(a) $\begin{pmatrix} 8 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 2a \\ a \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ -a \\ a \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} x \\ \sqrt{2} \\ y \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ y \\ -\sqrt{2} \\ x \end{pmatrix}$

Aufgabe 1

(a) $\begin{pmatrix} 8 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ = \end{pmatrix} 0 - 4 = -4$

(b) $\begin{pmatrix} 2a \\ a \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ -a \\ a \end{pmatrix} = 2a^2 - a^2 + a = a^2 + a$

(c) $\begin{pmatrix} x \\ \sqrt{2} \\ y \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ y \\ -\sqrt{2} \\ x \end{pmatrix} = \sqrt{2}x + \sqrt{2}y - \sqrt{2}y - \sqrt{2}x = 0$

Aufgabe 2

Sind die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ orthogonal?

(a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$

(b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ p \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} q \\ -p \\ 0 \end{pmatrix}$

Aufgabe 2

(a) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 3 \cdot 1 + (-2) \cdot 5 + 8 \cdot 1 = 3 - 10 + 8 = 1$ (nicht senkrecht)

Aufgabe 2

(a) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 3 \cdot 1 + (-2) \cdot 5 + 8 \cdot 1 = 3 - 10 + 8 = 1$ (nicht senkrecht)

(b) $\vec{a} \cdot \vec{b} = p \cdot q + q \cdot (-p) + p \cdot 0 = pq - pq = 0$ (senkrecht)

Aufgabe 3

Bestimme den Wert des Parameters c so, dass die beiden Vektoren orthogonal sind.

(a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} c \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$

(b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} c \\ -11 \\ 6 \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} c \\ c \\ 4 \end{pmatrix}$

Aufgabe 3

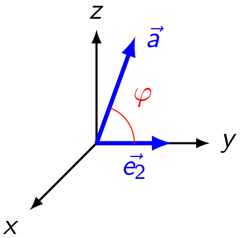
(a)
$$
\begin{aligned}
\vec{a} \cdot \vec{b} &= 0 \\
c \cdot 4 + 2 \cdot 3 + 6 \cdot 7 &= 0 \\
4c + 6 + 42 &= 0 \\
4c + 48 &= 0 \\
c &= -12
\end{aligned}
$$

(b)
$$
\begin{aligned}
\vec{a} \cdot \vec{b} &= 0 \\
c \cdot c + (-11) \cdot c + 6 \cdot 4 &= 0 \\
c^2 - 11c + 24 &= 0 \\
(c-3)(c-8) &= 0 \\
c_1 &= 3 \\
c_2 &= 8
\end{aligned}
$$

Aufgabe 4

Berechne den Winkel zwischen dem Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ 8 \end{pmatrix}$ und der y-Achse.

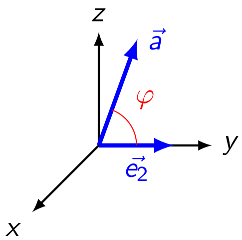
Aufgabe 4



$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ 8 \end{pmatrix}, \ \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\varphi = \arccos \frac{\vec{a} \cdot \vec{e}_2}{\left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{e}_2\right|} = \arccos \frac{9}{\sqrt{161} \cdot \sqrt{1}}$$

Aufgabe 4

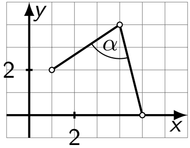


$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ 8 \end{pmatrix},\ \vec{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

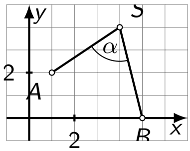
$$\varphi = \arccos \frac{\vec{a} \cdot \vec{e_2}}{\left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{e_2}\right|} = \arccos \frac{9}{\sqrt{161} \cdot \sqrt{1}} = 44.82^\circ$$

Aufgabe 5

Berechne den Winkel α.



Aufgabe 5



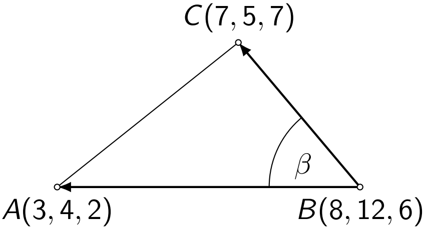
$$\vec{a} = \overrightarrow{SA} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}, \; \vec{b} = \overrightarrow{SB} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\cos\alpha = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{a \cdot b} = \frac{5}{\sqrt{13}\cdot\sqrt{17}} = 0.3363 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 70.35^\circ$$

Aufgabe 6

Berechne den Winkel β im Dreieck mit den Ecken $A(3, 4, 2)$, $B(8, 12, 6)$ und $C(7, 5, 7)$.

Aufgabe 6



Seitenvektoren von β: $\overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} -5 \\ -8 \\ -4 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -1 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\beta = \arccos \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{\left|\overrightarrow{BA}\right| \cdot \left|\overrightarrow{BC}\right|} = \arccos \frac{5 + 56 - 4}{\sqrt{25 + 64 + 16} \cdot \sqrt{1 + 49 + 1}}$$

$$= \arccos \frac{57}{\sqrt{105} \cdot \sqrt{51}} = 38.84^\circ$$

Aufgabe 7

Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ z \end{pmatrix}$. Welchen Wert muss die Komponente z haben, damit $\vec{a}$ und $\vec{b}$ einen Winkel von 45° einschliessen?

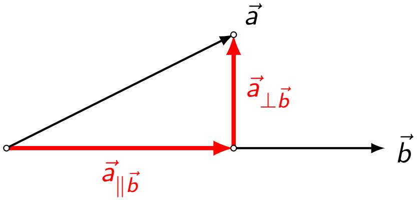
Aufgabe 7

$$
\begin{aligned}
\cos 45^\circ &= \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} \\
\frac{\sqrt{2}}{2} &= \frac{24+2z}{6\cdot\sqrt{36+z^2}} && || \cdot 6\sqrt{36+z^2} \\
\sqrt{2}\cdot 3\cdot\sqrt{36+z^2} &= 24+2z && ||^2 \\
18(36+z^2) &= 576+96z+4z^2 \\
648+18z^2 &= 576+96z+4z^2 \\
14z^2-96z+72 &= 0 \\
z_1 &= 6 \\
z_2 &= \tfrac{6}{7}
\end{aligned}
$$

Aufgabe 8

Zerlege den Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}$ in eine zu $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ parallele und eine zu $\vec{b}$ senkrechte Komponente.

Aufgabe 8



$$\vec{a}_{\parallel \vec{b}} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\vec{b} \cdot \vec{b}} \cdot \vec{b} = \frac{15}{30} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2.5 \\ 0.5 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a}_{\perp \vec{b}} = \vec{a} - \vec{a}_{\parallel \vec{b}} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2.5 \\ 0.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2.5 \\ 6.5 \end{pmatrix}$$

Insgesamt: $\vec{a} = \vec{a}_{\parallel \vec{b}} + \vec{a}_{\perp b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2.5 \\ 0.5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -2.5 \\ 6.5 \end{pmatrix}$ mit $\vec{a}_{\parallel \vec{b}} \perp \vec{a}_{\perp \vec{b}}$

Aufgabe 9

Vereinfache den Term $\left(3\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}-2\vec{b}\right)$, wenn $\left|\vec{a}\right|=4$, $\left|\vec{b}\right|=3$ und $\vec{a}\perp\vec{b}$ gilt.

Aufgabe 9

Voraussetzungen: $\left|\vec{a}\right| = 4$, $\left|\vec{b}\right| = 3$ und $\vec{a} \perp \vec{b}$

$$\left(3\vec{a} + \vec{b}\right) \cdot \left(\vec{a} - 2\vec{b}\right) = 3 \cdot \vec{a} \cdot \vec{a} - 6 \cdot \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{a} - 2 \cdot \vec{b} \cdot \vec{b}$$

$$= 3 \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \cdot \cos(0^\circ) - 5 \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(90^\circ) + 2 \cdot |\vec{b}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(0^\circ)$$

$$= 3 \cdot 4^2 \cdot 1 - 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 0 + 2 \cdot 3^2 \cdot 1 = 48 - 18 = 30$$

Aufgabe 10

Berechne.

(a) $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix}1\\-3\\4\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}2\\0\\5\end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix}2\\0\\5\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1\\-3\\4\end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}4\\6\\8\end{pmatrix}$

Aufgabe 10

(a) $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \qquad (\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \vec{e}_3)$

(b) $\begin{pmatrix}1\\-3\\4\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}2\\0\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-15\\3\\6\end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix}2\\0\\5\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1\\-3\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}15\\-3\\-6\end{pmatrix} \qquad (\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a})$

(d) $\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}4\\6\\8\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ (Faktoren sind kollinear)

Aufgabe 11

Bestimme alle Vektoren, die zu $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}$ senkrecht stehen und die Länge 30 haben.

Aufgabe 11

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 55 \\ -50 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left|\vec{c}\right| = \sqrt{10^2 + 55^2 + (-50)^2} = 75$$

Aufgabe 11

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 55 \\ -50 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left|\vec{c}\right| = \sqrt{10^2 + 55^2 + (-50)^2} = 75$$

geforderte Länge: 30 $\Rightarrow$ $\vec{c}$ muss mit dem Faktor $\pm\dfrac{30}{75} = \pm\dfrac{2}{5}$ skaliert werden:

Aufgabe 11

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 55 \\ -50 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left|\vec{c}\right| = \sqrt{10^2 + 55^2 + (-50)^2} = 75$$

geforderte Länge: 30 $\Rightarrow$ $\vec{c}$ muss mit dem Faktor $\pm\frac{30}{75} = \pm\frac{2}{5}$ skaliert werden:

$$\vec{c}_1 = \frac{2}{5} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 55 \\ -50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 22 \\ -20 \end{pmatrix} \qquad \vec{c}_2 = -\frac{2}{5} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 55 \\ -50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -22 \\ 20 \end{pmatrix}$$

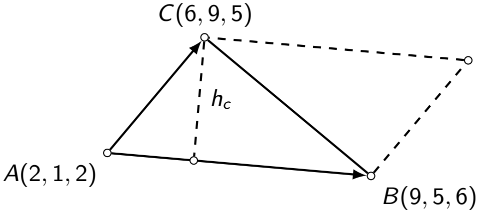
Aufgabe 12

Gegeben: Dreieck ΔABC mit $A(2,1,2)$, $B(9,5,6)$ und $C(6,9,5)$.
Gesucht:

(a) Flächeninhalt des Dreiecks ΔABC

(b) Höhe h_c des Dreiecks ΔABC

Aufgabe 12



$$\overrightarrow{AB} = \vec{r}_B - \vec{r}_A = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}; \; \overrightarrow{AC} = \vec{r}_C - \vec{r}_A = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix}$$

(a) $F_{ABC} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix} -20 \\ -5 \\ 40 \end{pmatrix}\right| = 22.5$

(b) $h_c = \dfrac{2F_{ABC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|} = \dfrac{45}{9} = 5$

Aufgabe 13

Die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} x \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ spannen ein Parallelogramm mit dem Flächeninhalt $A = 15$ auf. Bestimme die x-Komponente von $\vec{b}$.

Aufgabe 13

$$\left| \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 5 \\ 2x - 6 \\ 18 - x \end{pmatrix} \right| = 15$$

Aufgabe 13

$$\left|\begin{pmatrix}6\\1\\2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}x\\3\\1\end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix}5\\2x-6\\18-x\end{pmatrix}\right| = 15$$

$$\sqrt{25+(2x-6)^2+(18-x)^2} = 15 \quad ||\,^2$$

Aufgabe 13

$$\left|\begin{pmatrix}6\\1\\2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}x\\3\\1\end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix}5\\2x-6\\18-x\end{pmatrix}\right| = 15$$

$$\sqrt{25+(2x-6)^2+(18-x)^2} = 15 \quad ||^2$$

$$25+(4x^2-24x+36)+(324-36x+x^2) = 225$$

Aufgabe 13

$$\left| \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 5 \\ 2x-6 \\ 18-x \end{pmatrix} \right| = 15$$

$$\sqrt{25+(2x-6)^2+(18-x)^2} = 15 \quad ||^2$$

$$25+(4x^2-24x+36)+(324-36x+x^2) = 225$$

$$5x^2-60x+160 = 0$$

Aufgabe 13

$$\left| \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 5 \\ 2x-6 \\ 18-x \end{pmatrix} \right| = 15$$

$$\begin{aligned} \sqrt{25+(2x-6)^2+(18-x)^2} &= 15 \quad ||\,^2 \\ 25+(4x^2-24x+36)+(324-36x+x^2) &= 225 \\ 5x^2-60x+160 &= 0 \\ x_1 &= 8 \end{aligned}$$

Aufgabe 13

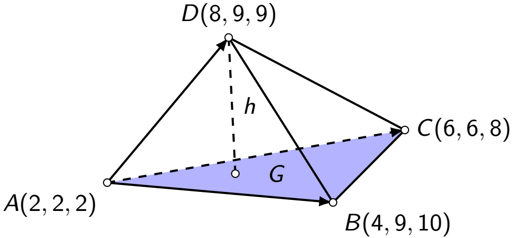
$$\left| \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 5 \\ 2x - 6 \\ 18 - x \end{pmatrix} \right| = 15$$

$$\begin{aligned} \sqrt{25 + (2x-6)^2 + (18-x)^2} &= 15 \quad ||\,^2 \\ 25 + (4x^2 - 24x + 36) + (324 - 36x + x^2) &= 225 \\ 5x^2 - 60x + 160 &= 0 \\ x_1 &= 8 \\ x_2 &= 4 \end{aligned}$$

Aufgabe 14

Bestimme im Tetraeder $ABCD$ mit $A(2,2,2)$, $B(4,9,10)$, $C(6,6,8)$ und $D(8,9,9)$ die Höhe h von D auf die gegenüberliegende Dreiecksfläche ABC.

Aufgabe 14



$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}, \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}, \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$V = V_{\text{Tetraeder}} = \frac{1}{6}\left|(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AD}\right| = \frac{1}{6}\left| \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ -20 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix} \right| = 10$$

$$G = \frac{1}{2} \cdot \left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = 15$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h \quad \Rightarrow \quad h = \frac{3V}{G} = 2$$

Aufgabe 15

Berechne möglichst effizient den Flächeninhalt des Polygons mit folgenden Ecken .

$P_1(3,1)$

$P_2(5,3)$

$P_3(7,2)$

$P_4(9,5)$

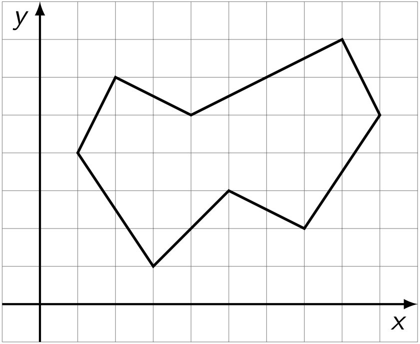
$P_5(8,7)$

$P_6(4,5)$

$P_7(2,6)$

$P_8(1,4)$

Aufgabe 15



Punkt	x	y	$x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i$	$(1 \leq i \leq 8)$
P_1	3	1	4	
P_2	5	3	-11	
P_3	7	2	17	
P_4	9	5	23	
P_5	8	7	12	
P_6	4	5	14	
P_7	2	6	2	