
Logarithmen

Theorie

Inhaltsverzeichnis

1	Der Logarithmusbegriff	3
2	Logarithmengesetze	3
3	Logarithmensysteme	4
4	Die Logarithmusfunktion	4
5	Exponential- und Logarithmusgleichungen	5
6	Logarithmenpapiere	7
7	Berechnung von Logarithmen	9

1 Der Logarithmusbegriff

Das Logarithmieren ist neben dem Radizieren die zweite Umkehrung des Potenzierens:

$$\log_2 8 = 3 \quad \Leftrightarrow \quad 2^3 = 8 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt[3]{8} = 2$$

Allgemein:

$$a^x = b \quad \Leftrightarrow \quad x = \log_a b \text{ für } a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}, b \in \mathbb{R}^+$$

Der Logarithmus von b zur Basis a ist der Exponent, mit dem man a potenzieren muss, um b zu erhalten.

Wenn es schwieriger wird:

2 Logarithmengesetze

3 Logarithmensysteme

Alle Logarithmen zu einer bestimmten Basis bilden ein *Logarithmensystem*.

$\log_{10} x = \lg x$: Zehnerlogarithmus (dekadischer Logarithmus)

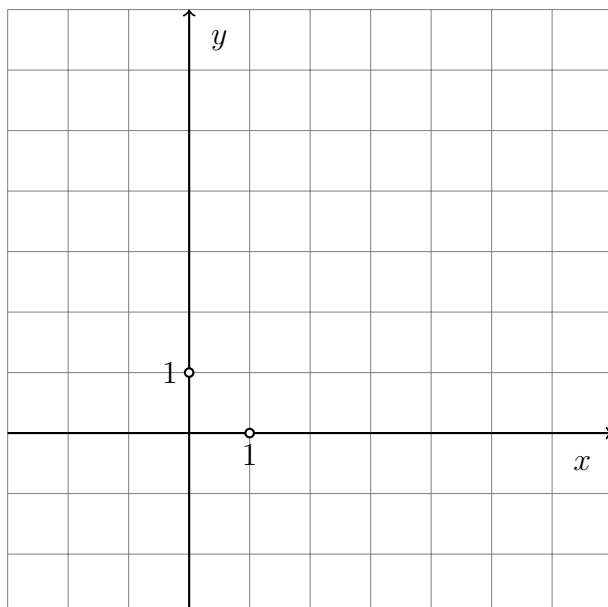
$\log_2 x = \lg x$: Zweierlogarithmus (binärer Logarithmus)

$\log_e x = \ln x$: natürlicher Logarithmus (Basis $e = 2.7182\dots$)

Basiswechsel

4 Die Logarithmusfunktion

Skizziere die Graphen der Funktionen $y = \log_2 x$, $y = \ln x$ und $y = \lg x$ und ihre Umkehrfunktionen ins gleiche Koordinatensystem.



Eigenschaften

-
-
-
-
-
-

5 Exponential- und Logarithmusgleichungen

In einer Exponentialgleichung kommt die Variable mindestens einmal im Exponenten vor.

Beispiel 5.1

$$2^{x+2} - 2^{x+1} + 2^x = 9$$

Beispiel 5.2

$$25^x + 3 \cdot 5^{x-1} + 2 \cdot 5^{-2} = 0$$

In einer Logarithmusgleichung kommt die Variable mindestens einmal im Numerus vor.

Beispiel 5.3

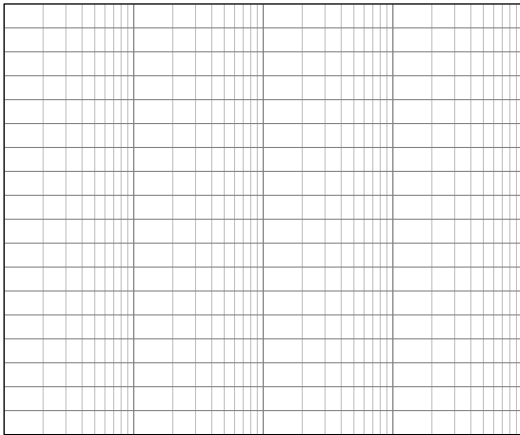
$$\lg(x+1) - 2\lg x = \lg 6$$

Beispiel 5.4

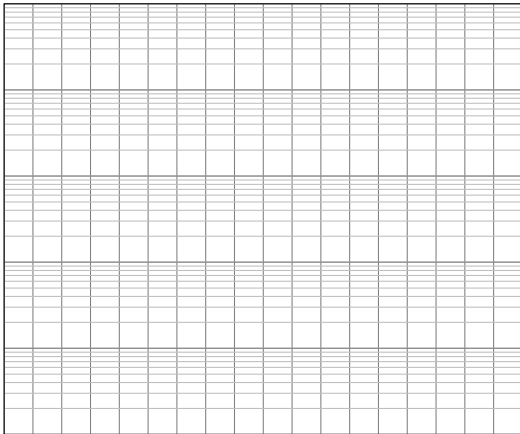
$$2(\lg x)^2 - 5\lg x - 3 = 0$$

6 Logarithmenpapiere

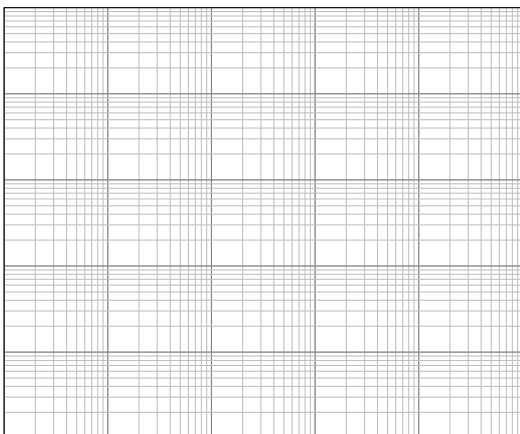
abzissenlogarithmische Skala



ordinatenlogarithmische Skala



doppellogarithmische Skala

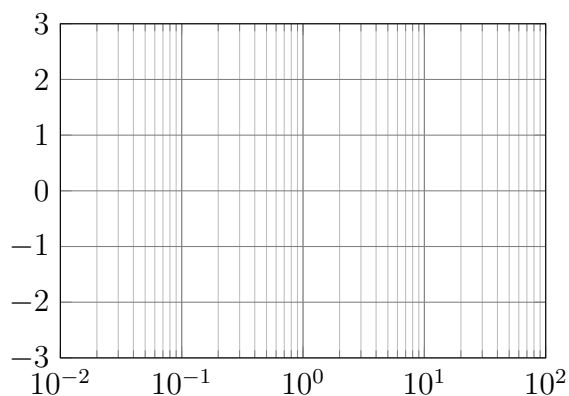


Eigenschaften

- Durch die breitesten Linien wird das Logarithmuspapier in *Dekaden* eingeteilt.
- Durch geeignete Beschriftung kann das Logarithmuspapier an eine beliebige Basis angepasst werden.
- Man kann die Logarithmusskala bei einer beliebigen *positiven* Potenz der gegebenen Basis beginnen lassen. Aber nie bei Null!
- Verdoppelung des Abstandes von der Startlinie bedeutet Multiplikation des Wertes mit der gewählten Basis usw.

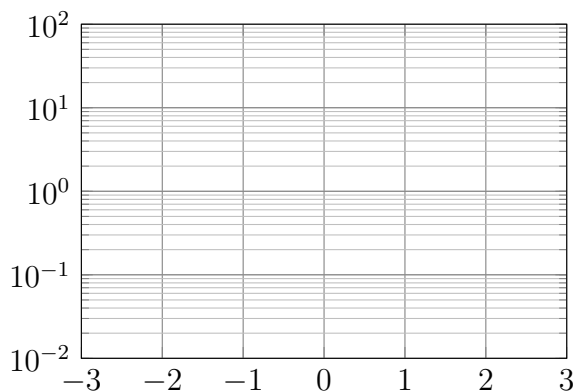
Beispiel 6.1

Skizziere $y = \log_{10} x$, $y = \log_5 x$ und $y = \log_{0.1} x$ in das abszissenlogarithmische Koordinatensystem.



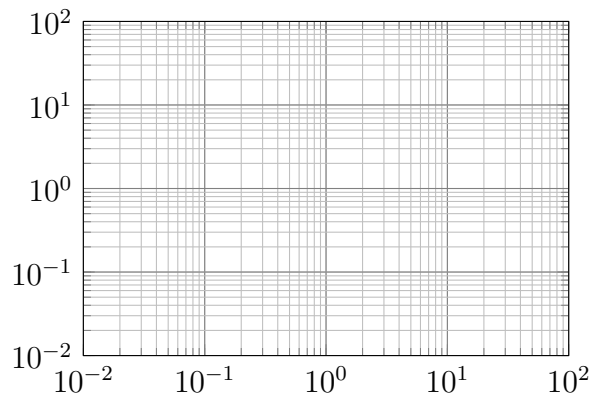
Beispiel 6.2

Skizziere $y = 3^x$, $y = 10^x$ und $y = 0.1^x$ in das ordinatenlogarithmische Koordinatensystem.



Beispiel 6.3

Skizziere $y = x^2$, $y = x^{-1}$ und $y = \sqrt{x}$ für $x > 0$ in das doppellogarithmische Koordinatensystem.



7 Berechnung von Logarithmen

Taylorreihe des natürlichen Logarithmus

Die Werte des natürlichen Logarithmus lassen sich für $-1 < x \leq 1$ durch folgende Potenzreihe approximieren (annähern):

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \quad (-1 < x \leq 1)$$

Das Verfahren eignet sich in dieser Form nur bedingt für die effiziente Berechnung von Logarithmen.

Beispiel 7.1

$\ln 2$

Beispiel 7.2

$\ln 1.1$

Beispiel 7.3

$\ln 0.5$