Logarithmen

Prüfungsvorbereitung

Aufgabe 1

$\log_2 8$

Aufgabe 1

$$\log_2 8 = \log_2(2^3) = 3$$

Aufgabe 2

$\log_5 125$

Aufgabe 2

$$\log_5 125 = \log_5 5^3 = 3$$

Aufgabe 3

$\log_7 1$

Aufgabe 3

$$\log_7 1 = \log_7 7^0 = 0$$

Aufgabe 4

$\log_3(-81)$

Aufgabe 4

Logarithmen sind nur für positive Numeri definiert.

Aufgabe 5

$$\log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{16}$$

Aufgabe 5

$$\log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{16} = \log_{\frac{1}{4}} \left(\frac{1}{4}\right)^2 = 2$$

Aufgabe 6

$$\log_{\frac{4}{7}} \frac{49}{16}$$

Aufgabe 6

$$\log_{\frac{4}{7}} \frac{49}{16} = \log_{\frac{4}{7}} \left(\frac{7}{4}\right)^2 = \log_{\frac{4}{7}} \left(\frac{4}{7}\right)^{-2} = -2$$

Aufgabe 7

$$\log_{10}\left(\log_{10} 10^{1000}\right)$$

Aufgabe 7

$$\log_{10}\left(\log_{10} 10^{1000}\right) = \log_{10} 1000 = \log_{10} 10^3 = 3$$

Aufgabe 8

$$\log_{\sqrt{2}}\left(\log_{\sqrt{2}}\sqrt{2}\right)$$

Aufgabe 8

$$\log_{\sqrt{2}}\left(\log_{\sqrt{2}}\sqrt{2}\right) = \log_{\sqrt{2}} 1 = \log_{\sqrt{2}} \sqrt{2}^0 = 0$$

Aufgabe 9

$\log_{\sqrt{5}}(5\sqrt{5})$

Aufgabe 9

$$\log_{\sqrt{5}}(5\sqrt{5}) = \log_{\sqrt{5}}(\sqrt{5}^2\sqrt{5}^1) = \log_{\sqrt{5}}\sqrt{5}^3 = 3$$

Aufgabe 10

$\log_3 \sqrt{3}$

Aufgabe 10

$$\log_3 \sqrt{3} = \log_3 3^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

Aufgabe 11

$\log_{49} 7$

Aufgabe 11

$$\log_{49} 7 = \log_{49} \sqrt{49} = \log_{49} 49^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

Aufgabe 12

$\log_4 \sqrt{2}$

Aufgabe 12

$$\log_4 \sqrt{2} = x \Rightarrow 4^x = \sqrt{2} \Rightarrow 2^{2x} = 2^{\frac{1}{2}} \Rightarrow 2x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{1}{4}$$

Aufgabe 13

$$\log_9 \frac{1}{3}$$

Aufgabe 13

$$\log_9 \frac{1}{3} = \log_9 \frac{1}{\sqrt{9}} = \log_9 \left(\sqrt{9}\right)^{-1} = \log_9 \left(9^{\frac{1}{2}}\right)^{-1} = \log_9 9^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}$$

Aufgabe 14

$$\log_{\frac{3}{4}} \sqrt[3]{\frac{4}{3}}$$

Aufgabe 14

$$\log_{\frac{3}{4}} \sqrt[3]{\frac{4}{3}} = x \Rightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^{x} = \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{3}} \Rightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^{x} = \left(\frac{3}{4}\right)^{-\frac{1}{3}} \Rightarrow x = -\frac{1}{3}$$

Aufgabe 15

$\log_{1000} 100\,000$

Aufgabe 15

$\log_{1000} 100\,000 = x \Rightarrow 1000^x = 100\,000 \Rightarrow 10^{3x} = 10^5 \Rightarrow 3x = 5 \Rightarrow x = \frac{5}{3}$

Aufgabe 16

$\log_4 \frac{1}{8}$

Aufgabe 16

$$\log_4 \frac{1}{8} = x \Rightarrow 4^x = 8^{-1} \Rightarrow 2^{2x} = 2^{-3} \Rightarrow 2x = -3 \Rightarrow x = -\tfrac{3}{2}$$

Aufgabe 17

$$\log_x 64 = 2$$

Aufgabe 17

$\log_x 64 = 2 \Rightarrow x^2 = 64 \Rightarrow x = 8$ (für $x = -8$ ist $\log_x 64$ nicht definiert)

Aufgabe 18

$\log_x 100 = 4$

Aufgabe 18

$$\log_x 100 = 4 \Rightarrow x^4 = 100 \Rightarrow x^4 = 10^2 \Rightarrow x^4 = \left(10^{\frac{1}{2}}\right)^4 \Rightarrow x = \sqrt{10}$$

Aufgabe 19

$$\log_x 1 = 1$$

Aufgabe 19

$$\log_x 1 = 1 \Rightarrow x^1 = 1^1 \Rightarrow x = 1$$

Aufgabe 20

Für welche x gilt $\log_x 1 = 0$?

Aufgabe 20

$$\log_x 1 = 0 \Rightarrow x^0 = 1 \Rightarrow L = \mathbb{R}^+$$

Aufgabe 21

Für welche x gilt $\log_x 5 = \frac{1}{2}$?

Aufgabe 21

$$\log_x 5 = \frac{1}{2} \Rightarrow x^{\frac{1}{2}} = 5 \Rightarrow \sqrt{x} = 5 \Rightarrow x = 25$$

Aufgabe 22

Für welche x gilt $\log_x 4 = -2$?

Aufgabe 22

$$\log_x 4 = -2 \Rightarrow x^{-2} = 4 \Rightarrow x^{-2} = 2^2 \Rightarrow x^{-2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

Aufgabe 23

$2^{\log_2 8}$

Aufgabe 23

$$2^{\log_2 8} = 2^3 = 8$$

Aufgabe 24

$$5^{\log_5 7}$$

Aufgabe 24

$$5^{\log_5 7} = 7$$

Aufgabe 25

Zerlege den Term $\log_a \frac{xy}{z}$ mit Hilfe der Logarithmengesetze und vereinfache das Resultat so weit wie möglich.

Aufgabe 25

$$\log_a \frac{xy}{z} = \log_a x + \log_a y - \log_a z$$

Aufgabe 26

Zerlege den Term $\log_a \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ mit Hilfe der Logarithmengesetze und vereinfache das Resultat so weit wie möglich.

Aufgabe 26

$$\log_a \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = \log_a 1 - \log_a x^{\frac{1}{3}} = -\frac{1}{3} \log_a x$$

Aufgabe 27

Fasse den Term $-2\log_a x + \frac{1}{2}\log_a y$ zu *einem* Logarithmus zusammen.

Aufgabe 27

$$-2\log_a x + \frac{1}{2}\log_a y = \log_a x^{-2} + \log_a y^{\frac{1}{2}} = \log_a\left(x^{-2}\cdot\sqrt{y}\right) =$$
$$\log_a \frac{\sqrt{y}}{x^2}$$

Aufgabe 28

Fasse den Term $4 + 3\big(\log_a b - 2\log_a c\big)$ zu *einem* Logarithmus zusammen.

Aufgabe 28

$$4 + 3\big(\log_a b - 2\log_a c\big) = \log_a a^4 + 3\log_a b - 6\log_a c$$

$$= \log_a a^4 + \log_a b^3 - \log_a c^6 = \log_a \frac{a^4 \cdot b^3}{c^6}$$

Aufgabe 29

$$\log_{10}(x-1)+\log_{10}(x-2)=\log_{10}(x+1)+\log_{10}(x+3)$$

Aufgabe 29

$$\log_{10}(x-1) + \log_{10}(x-2) = \log_{10}(x+1) + \log_{10}(x+3)$$

Aufgabe 29

$$\log_{10}(x-1)+\log_{10}(x-2)=\log_{10}(x+1)+\log_{10}(x+3)$$

$$\log_{10}(x-1)(x-2)=\log_{10}(x+1)(x+3)$$

Aufgabe 29

$$\log_{10}(x-1)+\log_{10}(x-2)=\log_{10}(x+1)+\log_{10}(x+3)$$

$$\log_{10}(x-1)(x-2)=\log_{10}(x+1)(x+3)$$

$$(x-1)(x-2)=(x+1)(x+3)$$

Aufgabe 29

$$\log_{10}(x-1)+\log_{10}(x-2)=\log_{10}(x+1)+\log_{10}(x+3)$$

$$\log_{10}(x-1)(x-2)=\log_{10}(x+1)(x+3)$$

$$(x-1)(x-2)=(x+1)(x+3)$$

$$x^2-3x+2=x^2+4x+3$$

Aufgabe 29

$$\log_{10}(x-1) + \log_{10}(x-2) = \log_{10}(x+1) + \log_{10}(x+3)$$

$$\log_{10}(x-1)(x-2) = \log_{10}(x+1)(x+3)$$

$$(x-1)(x-2) = (x+1)(x+3)$$

$$x^2 - 3x + 2 = x^2 + 4x + 3$$

$$-7x = 1$$

Aufgabe 29

$$\begin{aligned}
\log_{10}(x-1)+\log_{10}(x-2) &= \log_{10}(x+1)+\log_{10}(x+3)\\
\log_{10}(x-1)(x-2) &= \log_{10}(x+1)(x+3)\\
(x-1)(x-2) &= (x+1)(x+3)\\
x^2-3x+2 &= x^2+4x+3\\
-7x &= 1\\
x &= -1/7
\end{aligned}$$

Aufgabe 29

$$\log_{10}(x-1)+\log_{10}(x-2)=\log_{10}(x+1)+\log_{10}(x+3)$$

$$\log_{10}(x-1)(x-2)=\log_{10}(x+1)(x+3)$$

$$(x-1)(x-2)=(x+1)(x+3)$$

$$x^2-3x+2=x^2+4x+3$$

$$-7x=1$$

$$x=-1/7$$

$$\log_{10}\frac{-8}{7}+\log_{10}\frac{-15}{7}=\log_{10}\frac{6}{7}+\log_{10}\frac{20}{7}\quad\text{(Probe)}$$

Aufgabe 29

$$\log_{10}(x-1)+\log_{10}(x-2)=\log_{10}(x+1)+\log_{10}(x+3)$$

$$\log_{10}(x-1)(x-2)=\log_{10}(x+1)(x+3)$$

$$(x-1)(x-2)=(x+1)(x+3)$$

$$x^2-3x+2=x^2+4x+3$$

$$-7x=1$$

$$x=-1/7$$

$$\log_{10}\frac{-8}{7}+\log_{10}\frac{-15}{7}=\log_{10}\frac{6}{7}+\log_{10}\frac{20}{7}\quad\text{(Probe)}$$

$$L=\{\,\}$$

Aufgabe 30

$$3^{x-1} = 2^{x+1}$$

Aufgabe 30

$$
\begin{aligned}
3^{x-1} &= 2^{x+1} \\
\lg 3^{x-1} &= \lg 2^{x+1} \\
(x-1)\lg 3 &= (x+1)\lg 2 \\
x\lg 3 - x\lg 2 &= \lg 2 + \lg 3 \\
x\cdot(\lg 3 - \lg 2) &= \lg 6 \\
x &= \lg 6/\lg 1.5 = \log_{1.5} 6 \\
x &= \log_{1.5} 6 \quad \text{[Endresultat ohne TR]} \\
x &\approx 4.42
\end{aligned}
$$

Aufgabe 31

$$9^x - 10 = 9 \cdot 3^x$$

Aufgabe 31

$$
\begin{aligned}
9^x - 10 &= 9 \cdot 3^x \\
(3^x)^2 - 10 &= 9 \cdot 3^x \\
a^2 - 10 &= 9a \\
a^2 - 9a - 10 &= 0 \\
(a+1)(a-10) &= 0 \\
a_1 &= -1 = 3^x && \text{keine Lösung} \\
a_2 &= 10 = 3^x \\
x &= \lg 10 / \lg 3 = \log_3 10 && \text{[falls kein TR erlaubt ist]} \\
x &= 2.10
\end{aligned}
$$

Aufgabe 32

Stelle $\dfrac{\ln 11}{\ln 7}$ durch einen Logarithmus dar.

Aufgabe 32

$$\frac{\ln 11}{\ln 7} = \log_7 11$$

Aufgabe 33

Vereinfache $\log_a b \cdot \log_b a$ so weit wie möglich.

Aufgabe 33

$$\log_a b \cdot \log_b a =$$

Aufgabe 33

$$\log_a b \cdot \log_b a = \frac{\log_c b}{\log_c a} \cdot \frac{\log_c a}{\log_c b} =$$

Aufgabe 33

$$\log_a b \cdot \log_b a = \frac{\log_c b}{\log_c a} \cdot \frac{\log_c a}{\log_c b} = 1$$

Aufgabe 34

Vereinfache $\dfrac{\log_7 32 \cdot \log_9 \sqrt{7}}{\log_3 4}$ weit wie möglich.

Aufgabe 34

$$\frac{\log_7 32 \cdot \log_9 \sqrt{7}}{\log_3 4} = \frac{\frac{\lg 2^5}{\lg 7} \cdot \frac{\lg 7^{\frac{1}{2}}}{\lg 3^2}}{\frac{\lg 2^2}{\lg 3}} = \frac{5 \cdot \lg 2 \cdot \frac{1}{2} \lg 7 \cdot \lg 3}{\lg 7 \cdot 2 \cdot \lg 3 \cdot 2 \cdot \lg 2}$$

$$= \frac{5/2}{4} = \frac{5}{8}$$

Aufgabe 35

Stelle $\frac{\lg 9}{\lg \sqrt{2}}$ durch einen Logarithmus dar.

Aufgabe 35

$$\frac{\lg 9}{\lg \sqrt{2}} = \frac{\lg 3^2}{\lg 2^{\frac{1}{2}}} = \frac{2 \cdot \lg 3}{\frac{1}{2} \lg 2} = 4 \cdot \log_2 3 = \log_2 81$$

Aufgabe 36

Stelle $\dfrac{\log_2 a^3}{\log_4 b}$ durch einen Logarithmus dar.

Aufgabe 36

$$\frac{\log_2 a^3}{\log_4 b} = \frac{3\log_2 a}{\log_2 \sqrt{b}} = \frac{3\log_2 a}{\frac{1}{2}\log_2 b} = 6\log_b a = \log_b a^6$$

Aufgabe 37

Bestimme die Umkehrfunktion von $f : y = \log_2 x$.

Aufgabe 37

$f: y = \log_2 x$ Variablen vertauschen

$x = \log_2 y$ Gleichung nach y auflösen$2^x \quad = y \quad \Rightarrow \quad f^{-1}: y = 2^x$

Aufgabe 38

Bestimme die Umkehrfunktion von $f\colon y = \ln(x+3)$.

Aufgabe 38

$$f\colon y = \ln(x+3) \qquad \text{Varibln vertauschen}$$

$$f^{-1}\colon x = \ln(y+3) \qquad \text{nach } y \text{ auflösen}$$

$$\mathrm{e}e^{x} = \mathrm{e}\ln(y+3) = y+3$$

$$f^{-1}\colon y = \mathrm{e}^{x} - 3$$

Aufgabe 39

Bestimme die Umkehrfunktion von $f\colon y = 3^{x-1}$.

Aufgabe 39

$$f: y = 3^{x-1} \quad \text{Variablen vertauschen}$$

$$x = 3^{y-1}$$

$$\log_3 x = y - 1$$

$$\log_3 x = y - 1 f^{-1} \qquad : y = \log_3 y + 1$$

Aufgabe 40

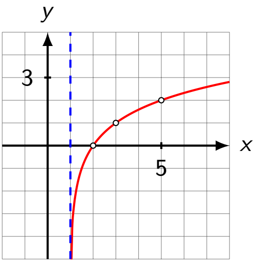
Zähle fünf Eigenschaften einer Logarithmusfunktion $f : y = \log_a x$ auf $(a > 1)$.

Aufgabe 40

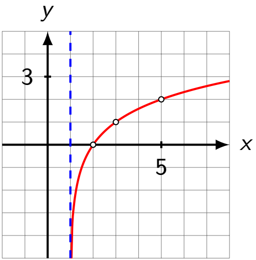
- Definitionsbereich $D = \mathbb{R}^+$
- Wertebereich $W = \mathbb{R}$
- $(1, 0) \in G_f$
- y-Achse ist Asymptote
- G_f ist monoton steigend

Aufgabe 41

Gib die Gleichung der Logarithmusfunktion an. Asymptoten sind als unterbrochene Linie gezeichnet.



Aufgabe 41

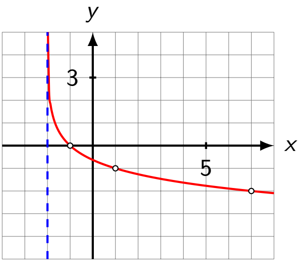


- Da die Asymptote nicht bei $x = 0$ sondern bei $x = 1$ liegt, können wir wir von einer Verschiebung $x \to x - 1$ ausgehen.
- Da der horizontale Abstand zwischen der Asymptote und der Nullstelle 1 beträgt, muss keine Streckung an der y-Achse berücksichtigt werden.
- Wenn man die Verschiebung in x-Richtung korrigiert, erhält man $\log_? 2 = 1$ und $\log_? 4 = 2$. Das bedeutet, dass die Basis des Logarithmus 2 ist.

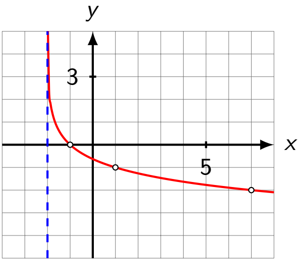
$$y = \log_2(x - 1).$$

Aufgabe 42

Gib die Gleichung der Logarithmusfunktion an. Asymptoten sind als unterbrochene Linie gezeichnet.



Aufgabe 42



- Da die Asymptote nicht bei $x = 0$ sondern bei $x = -2$ liegt, können wir wir von einer Verschiebung $x \to x + 2$ ausgehen.
- Wenn wir von einer Logarithmusfunktion mit einer Basis $a > 0$ ausgehen, muss der Graph an der x-Achse gespiegelt worden sein: $y \to -y$.
- Wenn man die Verschiebung in x-Richtung und die Spiegelung korrigiert, erhält man $\log_a 3 = 1$ und damit die Basis $a = 3$.

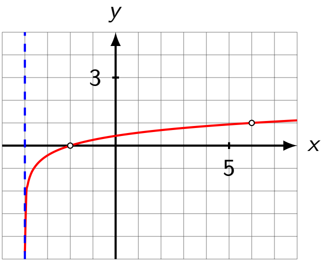
$$-y = \log_3(x+2) \quad \Rightarrow \quad y = -\log_3(x+2)$$

Für die Lösung gibt es alternative Darstellungsformen:

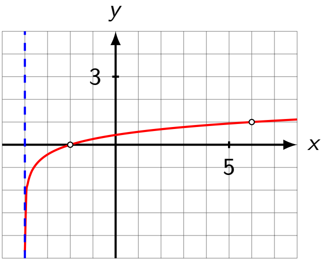
$$y = -\log_3(x+2) = \log_3(x+2)^{-1} = \log_{\frac{1}{3}}(x+2)$$

Aufgabe 43

Gib die Gleichung der Logarithmusfunktion an. Asymptoten sind als unterbrochene Linie gezeichnet.



Aufgabe 43



- Da die Asymptote nicht bei $x = 0$ sondern bei $x = -4$ liegt, können wir wir von einer Verschiebung $x \to x + 4$ ausgehen.
- Da der horizontale Abstand zwischen der Asymptote und der Nullstelle 2 beträgt, muss eine Streckung an der y-Achse mit dem Faktor $\frac{1}{2}$ berücksichtigt werden: $(x + 4) \to \frac{1}{2}(x + 4)$.
- Wenn man die Verschiebung und die Streckung korrigiert, erhält man $\log_? \frac{1}{2}(6 + 4) = \log_? 5 = 1$. Das bedeutet, dass die Basis des Logarithmus 5 sein muss.

$$y = \log_5 \frac{1}{2}(x + 4)$$

Aufgabe 44

Welche Zahl ist grösser: 2^{2000} oder 3^{1200}?

Aufgabe 44

400 ist der grösste gemeinsame Teiler von 2000 und 1200:

$$2^{2000} = 2^{5\cdot 400} = (2^5)^{400} = 32^{400}$$

$$3^{1200} = 3^{3\cdot 400} = (3^3)^{400} = 27^{400}$$

Da beide Zahlen denselben Exponenten und Basen grösser als 1 haben, ist 2^{2000} die grössere Zahl.

Lösung mit TR/Tabelle:

$$\lg 2^{2000} = 2000 \cdot \lg 2 \overset{\text{Tab}}{=} 2000 \cdot 0.301 = 602$$

$$\lg 3^{1200} = 1200 \cdot \lg 3 \overset{\text{Tab}}{=} 1200 \cdot 0.4771 \overset{*}{=} 572.52 \qquad (^{*}\text{schriftlich gerechnet})$$

Da beide Logarithmen dieselbe Basis haben, $\lg 2^{2000} > \lg 3^{1200}$ gilt und $\lg x$ monoton wachsend ist, muss 2^{2000} die grössere Zahl sein.

Aufgabe 45

Von dem im Zehnersystem geschriebenen ausgerechneten Wert der Zahl 837^{59} sind die erste Ziffer, die letzte Ziffer und die Anzahl der Ziffern anzugeben.

Aufgabe 45

$$837^{59} = 10^{\log_{10} 837^{59}} = 10^{59 \cdot \log_{10} 837} = 10^{172.4408} = 10^{0.4408+172}$$
$$= 10^{0.4408} \cdot 10^{172} = 2.7593 \cdot 10^{172}$$

Somit ist die erste Ziffer eine 2 und die Zahl hat 173 Stellen.

Um die letzte Ziffer von 837^{59} zu bestimmen genügt es, die letzte Ziffer von 7^{59} zu ermitteln. Dazu verwenden wir, dass die letzten Ziffern der Potenzen 7^1, 7^2, 7^3, ... periodisch auftreten.

$$7^1 = \underline{7},\ 7^2 = 4\underline{9},\ 7^3 = 34\underline{3},\ 7^4 = \ldots\underline{1},\ 7^5 = \ldots\underline{7},\ \text{usw.}$$

Um herauszufinden, in welcher der vier *Restklassen* 7^{59} liegt, berechnen wir $59 \bmod 4 = 3$. Dies bedeutet, dass 7^{59} bezüglich der letzten Ziffer in der gleichen Restklasse wie $7^3 = 343$ liegt.

Also ist die letzte Ziffer von 837^{59} eine 3.

Maxima:
```
zahl: 837**59;
slength(string(zahl));
```

2759319700176373769098981415099499088117218592763511850852718660143758028018314203000472282428279970
76277577952047208959965576460142887719349203097745210087992869969152 10973

Aufgabe 46

Berechne 147^{100} mit Hilfe der Logarithmentabelle.

Aufgabe 46

$$147^{100} = ?$$

$$\begin{aligned}
\lg 147^{100} &= 100 \cdot \lg 147 = 100 \cdot \lg(10^2 \cdot 1.47) \\
&= 100 \cdot (\lg 10^2 + \log 1.47) \overset{\text{Tab}}{=} 100 \cdot (2 + 0.1673) \\
&= 100 \cdot 2.1673 = 216.73 = 216 + 0.73 \\
&= \lg 10^{216} + \lg 10^{0.73} = \lg(10^{216} \cdot 10^{0.73}) \\
&\overset{\text{Tab}}{=} \lg(5.37 \cdot 10^{216})
\end{aligned}$$

$$147^{100} \approx 5.37 \cdot 10^{216}$$

Aufgabe 47

$25^{\log_5 7}$

Aufgabe 47

$$25^{\log_5 7} = \left(5^2\right)^{\log_5 7} = 5^{2\log_5 7} = 5^{\log_5 7^2} = 7^2 = 49$$

Aufgabe 48

Bestimme von 837^{100} die erste Ziffer, die letzte Ziffer und die Anzahl der Ziffern.

Aufgabe 48

$$\begin{aligned}\lg 837^{100} &= 100 \cdot \lg 837 = 100 \cdot \lg(8.37 \cdot 10^2)\\ &\overset{\text{Tab}}{=} 100 \cdot (0.9227 + 2) = 292.27 = \lg 10^{292.27}\\ &= \lg(10^{292} \cdot 10^{0.27}) \overset{\text{Tab}}{=} \lg 1.86 \cdot 10^{292}\end{aligned}$$

erste Ziffer: 1; Anzahl Ziffern: $292 + 1 = 293$

Um die letzte Ziffer von 837^{100} zu bestimmen genügt es, die letzte Ziffer von 7^{100} zu ermitteln. Dazu verwenden wir, dass die letzten Ziffern der Potenzen 7^1, 7^2, 7^3, ... periodisch auftreten.

$7^1 = \underline{7}$, $7^2 = 4\underline{9}$, $7^3 = 34\underline{3}$, $7^4 = \ldots\underline{1}$, $7^5 = \ldots\underline{7}$, usw.

Um herauszufinden, in welcher der vier *Restklassen* 7^{100} liegt, berechnen wir $100 \bmod 4 = 0$. Dies bedeutet, dass 7^{100} bezüglich der letzten Ziffer in der gleichen Restklasse wie $4 \bmod 4 = 0$ liegt.

Somit ist die letzte Ziffer von 7^{100} die 1.

Maxima:
```
zahl: 837**100;
slength(string(zahl));
```