

Folgen und Reihen

Prüfungsvorbereitung

Aufgabe 1

Was ist eine reelle Zahlenfolge?

Aufgabe 1

Eine reelle Zahlenfolge (a_n) ist eine Funktion, die jeder natürlichen Zahl $n \in \mathbb{N}$ eine reelle Zahl $a(n) = a_n$ zuordnet.

Aufgabe 2

(a) $a_n = 3n - 7$

(b) $b_n = 2^n + 1$

(c) $c_n = (-1)^{n+1}$

(d) $d_n = \frac{n-1}{n^2}$

(e) $e_n = (n-1)!$

$a_{12} = ?$

$b_5 = ?$

$c_{1234} = ?$

$d_{10} = ?$

$e_5 = ?$

Aufgabe 2

(a) $a_{12} = 3 \cdot 12 - 7 = 36 - 7 = 29$

(b) $b_5 = 2^5 + 1 = 32 + 1 = 33$

(c) $c_{1234} = (-1)^{1234+1} = (-1)^{1235} = -1$

(d) $d_{10} = \frac{10-1}{10^2} = \frac{9}{100} = 0.09$

(e) $e_5 = (5-1)! = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$

Aufgabe 3

Berechne den Wert des rechts angegebenen Folgeglieds.

(a) $a_1 = 5$; $a_{n+1} = 4 - 2a_n$ $a_4 = ?$

(b) $b_1 = 64$; $b_{n+1} = -\frac{1}{2}b_n$ $b_4 = ?$

(c) $c_1 = 1$; $c_{n+1} = 3c_n + n$ $c_4 = ?$

(d) $d_1 = 5$, $d_2 = 2$; $d_{n+2} = 2d_{n+1} - d_n$ $d_4 = ?$

Aufgabe 3

(a) $a_1 = 5; a_{n+1} = 4 - 2a_n$

Aufgabe 3

(a) $a_1 = 5; a_{n+1} = 4 - 2a_n$

$$a_2 = 4 - 2 \cdot a_1 = 4 - 2 \cdot 5 = -6$$

Aufgabe 3

(a) $a_1 = 5; a_{n+1} = 4 - 2a_n$

$$a_2 = 4 - 2 \cdot a_1 = 4 - 2 \cdot 5 = -6$$

$$a_3 = 4 - 2 \cdot a_2 = 4 - 2 \cdot (-6) = 16$$

Aufgabe 3

(a) $a_1 = 5; a_{n+1} = 4 - 2a_n$

$$a_2 = 4 - 2 \cdot a_1 = 4 - 2 \cdot 5 = -6$$

$$a_3 = 4 - 2 \cdot a_2 = 4 - 2 \cdot (-6) = 16$$

$$a_4 = 4 - 2 \cdot a_3 = 4 - 2 \cdot 16 = -28$$

Aufgabe 3

(a) $a_1 = 5; a_{n+1} = 4 - 2a_n$

$$a_2 = 4 - 2 \cdot a_1 = 4 - 2 \cdot 5 = -6$$

$$a_3 = 4 - 2 \cdot a_2 = 4 - 2 \cdot (-6) = 16$$

$$a_4 = 4 - 2 \cdot a_3 = 4 - 2 \cdot 16 = -28$$

(b) $b_1 = 64; b_{n+1} = -\frac{1}{2}$

Aufgabe 3

(a) $a_1 = 5; a_{n+1} = 4 - 2a_n$

$$a_2 = 4 - 2 \cdot a_1 = 4 - 2 \cdot 5 = -6$$

$$a_3 = 4 - 2 \cdot a_2 = 4 - 2 \cdot (-6) = 16$$

$$a_4 = 4 - 2 \cdot a_3 = 4 - 2 \cdot 16 = -28$$

(b) $b_1 = 64; b_{n+1} = -\frac{1}{2}$

$$b_2 = -\frac{1}{2} \cdot b_1 = -\frac{1}{2} \cdot 64 = -32$$

Aufgabe 3

(a) $a_1 = 5; a_{n+1} = 4 - 2a_n$

$$a_2 = 4 - 2 \cdot a_1 = 4 - 2 \cdot 5 = -6$$

$$a_3 = 4 - 2 \cdot a_2 = 4 - 2 \cdot (-6) = 16$$

$$a_4 = 4 - 2 \cdot a_3 = 4 - 2 \cdot 16 = -28$$

(b) $b_1 = 64; b_{n+1} = -\frac{1}{2}$

$$b_2 = -\frac{1}{2} \cdot b_1 = -\frac{1}{2} \cdot 64 = -32$$

$$b_3 = -\frac{1}{2} \cdot b_2 = -\frac{1}{2} \cdot (-32) = 16$$

Aufgabe 3

(a) $a_1 = 5; a_{n+1} = 4 - 2a_n$

$$a_2 = 4 - 2 \cdot a_1 = 4 - 2 \cdot 5 = -6$$

$$a_3 = 4 - 2 \cdot a_2 = 4 - 2 \cdot (-6) = 16$$

$$a_4 = 4 - 2 \cdot a_3 = 4 - 2 \cdot 16 = -28$$

(b) $b_1 = 64; b_{n+1} = -\frac{1}{2}$

$$b_2 = -\frac{1}{2} \cdot b_1 = -\frac{1}{2} \cdot 64 = -32$$

$$b_3 = -\frac{1}{2} \cdot b_2 = -\frac{1}{2} \cdot (-32) = 16$$

$$b_4 = -\frac{1}{2} \cdot b_3 = -\frac{1}{2} \cdot 16 = -8$$

(c) $c_1 = 1$ $c_{n+1} = 3c_n + n$

(c) $c_1 = 1$ $c_{n+1} = 3c_n + n$

$$c_2 = 3 \cdot c_1 + 1 = 3 \cdot 1 + 1 = 4$$

(c) $c_1 = 1$ $c_{n+1} = 3c_n + n$

$$c_2 = 3 \cdot c_1 + 1 = 3 \cdot 1 + 1 = 4$$

$$c_3 = 3 \cdot c_2 + 2 = 3 \cdot 4 + 2 = 14$$

(c) $c_1 = 1$ $c_{n+1} = 3c_n + n$

$$c_2 = 3 \cdot c_1 + 1 = 3 \cdot 1 + 1 = 4$$

$$c_3 = 3 \cdot c_2 + 2 = 3 \cdot 4 + 2 = 14$$

$$c_4 = 3 \cdot c_3 + 3 = 3 \cdot 14 + 3 = 45$$

(c) $c_1 = 1$ $c_{n+1} = 3c_n + n$

$$c_2 = 3 \cdot c_1 + 1 = 3 \cdot 1 + 1 = 4$$

$$c_3 = 3 \cdot c_2 + 2 = 3 \cdot 4 + 2 = 14$$

$$c_4 = 3 \cdot c_3 + 3 = 3 \cdot 14 + 3 = 45$$

(d) $d_1 = 5$, $d_2 = 2$; $d_{n+2} = 2d_{n+1} - d_n$

(c) $c_1 = 1$ $c_{n+1} = 3c_n + n$

$$c_2 = 3 \cdot c_1 + 1 = 3 \cdot 1 + 1 = 4$$

$$c_3 = 3 \cdot c_2 + 2 = 3 \cdot 4 + 2 = 14$$

$$c_4 = 3 \cdot c_3 + 3 = 3 \cdot 14 + 3 = 45$$

(d) $d_1 = 5$, $d_2 = 2$; $d_{n+2} = 2d_{n+1} - d_n$

$$d_3 = 2d_2 - d_1 = 2 \cdot 2 - 5 = -1$$

(c) $c_1 = 1$ $c_{n+1} = 3c_n + n$

$$c_2 = 3 \cdot c_1 + 1 = 3 \cdot 1 + 1 = 4$$

$$c_3 = 3 \cdot c_2 + 2 = 3 \cdot 4 + 2 = 14$$

$$c_4 = 3 \cdot c_3 + 3 = 3 \cdot 14 + 3 = 45$$

(d) $d_1 = 5$, $d_2 = 2$; $d_{n+2} = 2d_{n+1} - d_n$

$$d_3 = 2d_2 - d_1 = 2 \cdot 2 - 5 = -1$$

$$d_4 = 2d_3 - d_2 = 2 \cdot (-1) - 2 = -4$$

Aufgabe 4

Gib eine explizite Formel an, die zu den Folgegliedern passt.

(a) $a_1 = 9, a_2 = 13, a_3 = 17, a_4 = 21, \dots$

(b) $b_1 = \frac{1}{4}, b_2 = \frac{1}{9}, b_3 = \frac{1}{16}, b_4 = \frac{1}{25}, \dots$

Aufgabe 4

(a) $a_1 = 9$, $a_2 = 13$, $a_3 = 17$, $a_4 = 21$, ...

Aufgabe 4

(a) $a_1 = 9, a_2 = 13, a_3 = 17, a_4 = 21, \dots$

Da sich die Folgeglieder um jeweils 4 unterscheiden, handelt es sich um eine AF. Entweder passt man die explizite Definitionsgleichung der AF $[a_n = a_1 + (n - 1)d]$ an die gegebenen Zahlen an und vereinfacht die Formel:

$$a_n = 9 + (n - 1) \cdot 4 = 9 + 4n - 4 = 4n + 5$$

oder man macht direkt den Ansatz

$$a_n = 4n + x$$

wobei sich bei genauerem Hinsehen die Wahl von $x = 5$ als richtig erweist.

(b) $b_1 = \frac{1}{4}, b_2 = \frac{1}{9}, b_3 = \frac{1}{16}, b_4 = \frac{1}{25}, \dots$

(b) $b_1 = \frac{1}{4}, b_2 = \frac{1}{9}, b_3 = \frac{1}{16}, b_4 = \frac{1}{25}, \dots$

Da es sich um die Kehrwerte von $2^2, 3^2, 4^2, 5^2, \dots$ handelt, eine Folge (b_n) aber normalerweise mit b_1 beginnt, müssen wir die Indizes $1, 2, 3, \dots$ zuerst um 1 „verschieben“, bevor wir sie quadrieren und ihre Kehrwerte bilden:

$$b_n = \frac{1}{(n+1)^2}$$

Aufgabe 5

Gib eine rekursive Formel an, die zu den Folgegliedern passt.

(a) $a_1 = 10$ $a_2 = 20$, $a_3 = 40$, $a_4 = 80$, $a_5 = 160$, ...

(b) $b_1 = 3$, $b_2 = 4$, $b_3 = 7$, $b_4 = 11$, $b_5 = 18$, ...

Aufgabe 5

(a) $a_1 = 10$ $a_2 = 20$, $a_3 = 40$, $a_4 = 80$, $a_5 = 160$, ...

Aufgabe 5

(a) $a_1 = 10$ $a_2 = 20$, $a_3 = 40$, $a_4 = 80$, $a_5 = 160$, ...

Da jedes Folgeglied (bis auf das erste) jeweils das Doppelte seines Vorgängers ist, können wir die rekursive Formel direkt angeben:

$$a_1 = 10; \quad a_{n+1} = 2 \cdot a_n$$

Achtung: ohne Angabe des Anfangsglieds a_1 ist die Formel „wertlos“.

Aufgabe 5

(a) $a_1 = 10$, $a_2 = 20$, $a_3 = 40$, $a_4 = 80$, $a_5 = 160$, ...

Da jedes Folgeglied (bis auf das erste) jeweils das Doppelte seines Vorgängers ist, können wir die rekursive Formel direkt angeben:

$$a_1 = 10; \quad a_{n+1} = 2 \cdot a_n$$

Achtung: ohne Angabe des Anfangsglieds a_1 ist die Formel „wertlos“.

(b) $b_1 = 3$, $b_2 = 4$, $b_3 = 7$, $b_4 = 11$, $b_5 = 18$, ...

Aufgabe 5

(a) $a_1 = 10$ $a_2 = 20$, $a_3 = 40$, $a_4 = 80$, $a_5 = 160$, ...

Da jedes Folgeglied (bis auf das erste) jeweils das Doppelte seines Vorgängers ist, können wir die rekursive Formel direkt angeben:

$$a_1 = 10; \quad a_{n+1} = 2 \cdot a_n$$

Achtung: ohne Angabe des Anfangsglieds a_1 ist die Formel „wertlos“.

(b) $b_1 = 3$, $b_2 = 4$, $b_3 = 7$, $b_4 = 11$, $b_5 = 18$, ...

Offenbar ist jedes Folgeglied (bis auf die ersten beiden) die Summe seiner zwei Vorgänger. Somit müssen wir die ersten beiden Folgeglieder und eine Formel für die Berechnung des Nachfolgers aus den beiden Vorgängern angeben:

$$b_1 = 3, \quad b_2 = 4; \quad b_{n+2} = b_{n+1} + b_n$$

Aufgabe 6

Bestimme die ersten vier Glieder der Teilsummenfolge.

(a) $a_1 = 9, a_2 = -3, a_3 = 5, a_4 = 0, \dots$

(b) $a_1 = 4, a_2 = 4, a_3 = 4, a_4 = 4, \dots$

Aufgabe 6

(a) $a_1 = 9$, $a_2 = -3$, $a_3 = 5$, $a_4 = 0$, $\dots$

Aufgabe 6

(a) $a_1 = 9, a_2 = -3, a_3 = 5, a_4 = 0, \dots$

$$s_1 = a_1 = 9$$

$$s_2 = a_1 + a_2 = 9 + (-3) = 6$$

$$s_3 = a_1 + a_2 + a_3 = s_2 + a_3 = 6 + 5 = 11$$

$$s_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = s_3 + a_4 = 11 + 0 = 11$$

$$s_5 = \dots$$

Aufgabe 6

(a) $a_1 = 9, a_2 = -3, a_3 = 5, a_4 = 0, \dots$

$$s_1 = a_1 = 9$$

$$s_2 = a_1 + a_2 = 9 + (-3) = 6$$

$$s_3 = a_1 + a_2 + a_3 = s_2 + a_3 = 6 + 5 = 11$$

$$s_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = s_3 + a_4 = 11 + 0 = 11$$

$$s_5 = \dots$$

(b) $a_1 = 4, a_2 = 4, a_3 = 4, a_4 = 4, \dots$

Aufgabe 6

(a) $a_1 = 9, a_2 = -3, a_3 = 5, a_4 = 0, \dots$

$$s_1 = a_1 = 9$$

$$s_2 = a_1 + a_2 = 9 + (-3) = 6$$

$$s_3 = a_1 + a_2 + a_3 = s_2 + a_3 = 6 + 5 = 11$$

$$s_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = s_3 + a_4 = 11 + 0 = 11$$

$$s_5 = \dots$$

(b) $a_1 = 4, a_2 = 4, a_3 = 4, a_4 = 4, \dots$

$$s_1 = a_1 = 4$$

$$s_2 = a_1 + a_2 = s_1 + a_2 = 4 + 4 = 8$$

$$s_3 = a_1 + a_2 + a_3 = s_2 + a_3 = 8 + 4 = 12$$

$$s_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = s_3 + a_4 = 12 + 4 = 16$$

$$s_5 = \dots$$

Aufgabe 7

Berechne die Summen.

$$(a) \sum_{i=1}^5 (3i + 1)$$

$$(b) \sum_{j=-2}^4 j^2$$

$$(c) \sum_{k=1}^7 a$$

$$(d) \sum_{i=1}^{1000} (i - 500)$$

Aufgabe 7

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad \sum_{i=1}^5 (3i + 1) &= (3 \cdot 1 + 1) + (3 \cdot 2 + 1) + \cdots + (3 \cdot 5 + 1) \\ &= 4 + 7 + 10 + 13 + 16 = 50 \end{aligned}$$

Aufgabe 7

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad \sum_{i=1}^5 (3i + 1) &= (3 \cdot 1 + 1) + (3 \cdot 2 + 1) + \cdots + (3 \cdot 5 + 1) \\ &= 4 + 7 + 10 + 13 + 16 = 50 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(b)} \quad \sum_{j=-2}^4 j^2 &= (-2)^2 + (-1)^2 + 0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 \\ &= 4 + 1 + 0 + 1 + 4 + 9 + 16 = 35 \end{aligned}$$

Aufgabe 7

$$(a) \sum_{i=1}^5 (3i + 1) = (3 \cdot 1 + 1) + (3 \cdot 2 + 1) + \cdots + (3 \cdot 5 + 1)$$

$$= 4 + 7 + 10 + 13 + 16 = 50$$

$$(b) \sum_{j=-2}^4 j^2 = (-2)^2 + (-1)^2 + 0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2$$

$$= 4 + 1 + 0 + 1 + 4 + 9 + 16 = 35$$

$$(c) \sum_{k=1}^7 a = a + a + a + a + a + a + a = 7a$$

Aufgabe 7

$$(a) \sum_{i=1}^5 (3i + 1) = (3 \cdot 1 + 1) + (3 \cdot 2 + 1) + \cdots + (3 \cdot 5 + 1)$$

$$= 4 + 7 + 10 + 13 + 16 = 50$$

$$(b) \sum_{j=-2}^4 j^2 = (-2)^2 + (-1)^2 + 0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2$$

$$= 4 + 1 + 0 + 1 + 4 + 9 + 16 = 35$$

$$(c) \sum_{k=1}^7 a = a + a + a + a + a + a + a = 7a$$

$$(d) \sum_{i=1}^{1000} (i - 500) = -499 + (-498) + \cdots + 498 + 499 + 500$$

$$= 500$$

Aufgabe 8

Schreibe die Summen mit dem Summenzeichen. Die Berechnung ist nicht verlangt.

(a) $2 + 3 + 4 + \cdots + 75 + 76$

(b) $12 + 14 + 16 + \cdots + 100 + 102$

(c) $1 + 3 + 5 + \cdots + 49 + 51$

(d) $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \cdots + \frac{998}{999} + \frac{999}{1000}$

Aufgabe 8

Beachte, dass die Laufvariable (i oder j oder k) immer nur in *Einerschritten* hochgezählt wird. Will man die Werte der Folgenglieder um einen anderen Wert vergrößern oder verkleinern, so muss eine passende arithmetische Operation (z. B. Multiplizieren, Dividieren) auf die Laufvariable angewendet werden.

$$(a) \quad 2 + 3 + 4 + \cdots + 75 + 76 = \sum_{i=1}^{75} (i + 1) = \sum_{k=2}^{76} k$$

$$(b) \quad 12 + 14 + 16 + \cdots + 100 + 102 = \sum_{i=1}^{46} (2i + 10)$$

$$(c) \quad 1 + 3 + 5 + \cdots + 49 + 51 = \sum_{i=1}^{26} (2i - 1)$$

$$(d) \quad \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \cdots + \frac{998}{999} + \frac{999}{1000} = \sum_{i=1}^{999} \frac{i}{i+1}$$

Aufgabe 9

Berechne die Produkte.

$$(a) \prod_{i=1}^4 (i + 1)$$

$$(b) \prod_{j=1}^5 2x$$

$$(c) \prod_{k=1}^3 (k - 8)$$

$$(d) \prod_{i=1}^{1000} \frac{i}{i + 1}$$

Aufgabe 9

$$(a) \prod_{i=1}^4 (i+1) = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$$

$$(b) \prod_{j=1}^5 2x = 2x \cdot 2x \cdot 2x \cdot 2x \cdot 2x = 32x^5$$

$$(c) \prod_{k=1}^3 (k-8) = (-7) \cdot (-6) \cdot (-5) = -210$$

$$(d) \prod_{i=1}^{1000} \frac{i}{i+1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \dots \cdot \frac{999}{1000} \cdot \frac{1000}{1001} = \frac{1}{1001}$$

Aufgabe 10

Schreibe die Produkte mit dem Produktzeichen. Die Berechnung ist nicht verlangt.

(a) $7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11$

(b) $2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 24 \cdot 26$

(c) $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{7} \cdot \dots \cdot \frac{1}{17} \cdot \frac{1}{19}$

Aufgabe 10

$$(a) \quad 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 = \prod_{k=7}^{11} k = \prod_{i=1}^5 (i + 6)$$

$$(b) \quad 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 24 \cdot 26 = \prod_{k=1}^{13} 2k$$

$$(c) \quad \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{7} \cdot \dots \cdot \frac{1}{17} \cdot \frac{1}{19} = \prod_{k=1}^9 \frac{1}{2k+1}$$

Aufgabe 11

Handelt es sich um eine arithmetische Folge?

(a) $a_n = 4 - 5n$

(b) $a_1 = 2, d_{n+1} = 2 \cdot a_n$

Aufgabe 11

(a) $a_1 = -1, a_2 = -6, a_3 = -11, \dots \Rightarrow$ ja ($d = -5$)

(b) $a_1 = 2, a_2 = 4, a_3 = 8, \dots \Rightarrow$ nein (d ist nicht konstant)

Aufgabe 12

Bestimme die gesuchten Größen der arithmetischen Folge (a_n) .

- (a) $a_{14} = 102$, $d = 7$, $a_1 = ?$
- (b) $a_1 = 3$, $a_7 = 33$, $d = ?$, $a_5 = ?$
- (c) $a_1 = 8$, $a_n = -32$, $d = -2$, $n = ?$
- (d) $a_1 = -7$, $d = \frac{3}{2}$, $s_n = 246$, $n = ?$

Aufgabe 12

(a) $a_{14} = 102$, $d = 7$, $a_1 = ?$

$$a_1 = a_{14} - 13 \cdot d = 102 - 13 \cdot 7 = 11$$

Aufgabe 12

(a) $a_{14} = 102$, $d = 7$, $a_1 = ?$

$$a_1 = a_{14} - 13 \cdot d = 102 - 13 \cdot 7 = 11$$

(b) $a_1 = 3$, $a_7 = 33$, $d = ?$, $a_5 = ?$

$$a_7 = a_1 + 6d$$

$$33 = 3 + 6d$$

$$d = 5$$

Aufgabe 12

(a) $a_{14} = 102$, $d = 7$, $a_1 = ?$

$$a_1 = a_{14} - 13 \cdot d = 102 - 13 \cdot 7 = 11$$

(b) $a_1 = 3$, $a_7 = 33$, $d = ?$, $a_5 = ?$

$$a_7 = a_1 + 6d$$

$$33 = 3 + 6d$$

$$d = 5$$

$$a_5 = a_1 + 4 \cdot d = 3 + 4 \cdot 5 = 23$$

(c) $a_1 = 8, a_n = -32, d = -2, n = ?$

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$$

$$-32 = 8 + (n - 1) \cdot (-2)$$

$$-40 = -2n + 2$$

$$-42 = -2n$$

$$n = 21$$

(d) $a_1 = -7$, $d = \frac{3}{2}$, $s_n = 246$, $n = ?$

$$s_n = a_1 n + \frac{n(n-1)}{2} \cdot d$$

$$246 = -7 \cdot n + \frac{n(n-1)}{2} \cdot \frac{3}{2}$$

$$246 = -7n + \frac{3}{4}(n^2 - n) \quad || \cdot 4$$

$$984 = -28n + 3n^2 - 3n$$

$$0 = 3n^2 - 31n - 984$$

$$n_1 = -\frac{41}{3} \quad (\text{keine Lösung})$$

$$n_2 = 24$$

Aufgabe 13

Berechne die Summen.

(a) $100 + 102 + 104 + \cdots + 998 + 1000$

(b) $\sum_{i=1}^{100} (3i + 1)$

Aufgabe 13

(a) $100 + 102 + 104 + \cdots + 998 + 1000 = ?$

Anzahl Folgeglieder: $a_1 + (n - 1)d = a_n$

$$100 + (n - 1) \cdot 2 = 1000$$

$$(n - 1) \cdot 2 = 900$$

$$n - 1 = 450$$

$$n = 451$$

$$s_n = \frac{451}{2}(100 + 1000) = 248\,050$$

Aufgabe 13

(a) $100 + 102 + 104 + \cdots + 998 + 1000 = ?$

Anzahl Folgeglieder: $a_1 + (n - 1)d = a_n$

$$100 + (n - 1) \cdot 2 = 1000$$

$$(n - 1) \cdot 2 = 900$$

$$n - 1 = 450$$

$$n = 451$$

$$s_n = \frac{451}{2}(100 + 1000) = 248\,050$$

(b) $\sum_{i=1}^{100} (3i + 1) = ?$

Anzahl Folgeglieder: $n = 100$

$$s_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n \quad \Rightarrow \quad s_{100} = \frac{100}{2}(4 + 301) = 15\,250$$

Aufgabe 14

Bestimme die gesuchten Größen der geometrischen Folge (a_n) .

(a) $a_1 = 0.25$, $q = 2$; $a_6 = ?$

(b) $a_5 = 405$, $q = 3$; $a_1 = ?$

(c) $a_1 = 7$, $a_5 = 1792$; $q = ?$, $a_3 = ?$

Aufgabe 14

(a) $a_1 = 0.25$, $q = 2$; $a_6 = ?$

$$a_6 = a_1 \cdot q^5 \quad \Rightarrow \quad a_6 = 0.25 \cdot 2^5 = 0.25 \cdot 32 = 8$$

Aufgabe 14

(a) $a_1 = 0.25$, $q = 2$; $a_6 = ?$

$$a_6 = a_1 \cdot q^5 \Rightarrow a_6 = 0.25 \cdot 2^5 = 0.25 \cdot 32 = 8$$

(b) $a_5 = 405$, $q = 3$; $a_1 = ?$

$$a_5 = a_1 \cdot q^4 \Rightarrow 405 = a_1 \cdot 81 \Rightarrow a_1 = 5$$

Aufgabe 14

(a) $a_1 = 0.25$, $q = 2$; $a_6 = ?$

$$a_6 = a_1 \cdot q^5 \Rightarrow a_6 = 0.25 \cdot 2^5 = 0.25 \cdot 32 = 8$$

(b) $a_5 = 405$, $q = 3$; $a_1 = ?$

$$a_5 = a_1 \cdot q^4 \Rightarrow 405 = a_1 \cdot 81 \Rightarrow a_1 = 5$$

(c) $a_1 = 7$, $a_5 = 1792$; $q = ?$, $a_3 = ?$

$$a_5 = a_1 \cdot q^4$$

$$q^4 = a_5 / a_1$$

$$q^4 = 256$$

$$q = \pm 4$$

$$a_3 = a_1 \cdot q^2 \Rightarrow a_3 = 7 \cdot 16 = 112$$

Aufgabe 15

Berechne die Summen.

(a) $a_n = 4 \cdot 2^{n-1}; s_{10} = ?$

(b) $a_n = \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}; s_5 = ?$

Aufgabe 15

(a) $a_n = 4 \cdot 2^{n-1}$; $s_{10} = ?$

Aufgabe 15

(a) $a_n = 4 \cdot 2^{n-1}$; $s_{10} = ?$

$$s_{10} = a_1 \cdot \frac{q^{10} - 1}{q - 1} = 4 \cdot \frac{2^{10} - 1}{1} = 4 \cdot (1024 - 1) = 4092$$

Aufgabe 15

(a) $a_n = 4 \cdot 2^{n-1}$; $s_{10} = ?$

$$s_{10} = a_1 \cdot \frac{q^{10} - 1}{q - 1} = 4 \cdot \frac{2^{10} - 1}{1} = 4 \cdot (1024 - 1) = 4092$$

(b) $a_n = \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$; $s_5 = ?$

Aufgabe 15

(a) $a_n = 4 \cdot 2^{n-1}$; $s_{10} = ?$

$$s_{10} = a_1 \cdot \frac{q^{10} - 1}{q - 1} = 4 \cdot \frac{2^{10} - 1}{1} = 4 \cdot (1024 - 1) = 4092$$

(b) $a_n = \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$; $s_5 = ?$

$$s_5 = a_1 \cdot \frac{1 - q^5}{1 - q}$$

$$s_5 = 1 \cdot \frac{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^5}{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)} = \frac{1 + \frac{1}{243}}{\frac{4}{3}}$$

$$s_5 = \frac{\frac{244}{243}}{\frac{4}{3}} = \frac{244}{243} \cdot \frac{3}{4} = \frac{61}{81}$$

Aufgabe 16

Berechne die Summe s der nichtabbrechenden geometrischen Folge mit a_1 und q .

(a) $a_1 = 15, q = \frac{1}{3}$

(b) $a_1 = 2, q = -\frac{3}{4}$

Aufgabe 16

Summenformel der nichtabbrechenden GR: $s = a_1 \cdot \frac{1}{1-q} = \frac{a_1}{1-q}$

(a) $a_1 = 15, q = \frac{1}{3}$

Aufgabe 16

Summenformel der nichtabbrechenden GR: $s = a_1 \cdot \frac{1}{1-q} = \frac{a_1}{1-q}$

(a) $a_1 = 15, q = \frac{1}{3}$

$$s = 15 \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = 15 \cdot \frac{1}{\frac{2}{3}} = 15 \cdot \frac{3}{2} = \frac{45}{2}$$

Aufgabe 16

Summenformel der nichtabbrechenden GR: $s = a_1 \cdot \frac{1}{1-q} = \frac{a_1}{1-q}$

(a) $a_1 = 15, q = \frac{1}{3}$

$$s = 15 \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = 15 \cdot \frac{1}{\frac{2}{3}} = 15 \cdot \frac{3}{2} = \frac{45}{2}$$

(b) $a_1 = 2, q = -\frac{3}{4}$

Aufgabe 16

Summenformel der nichtabbrechenden GR: $s = a_1 \cdot \frac{1}{1-q} = \frac{a_1}{1-q}$

(a) $a_1 = 15, q = \frac{1}{3}$

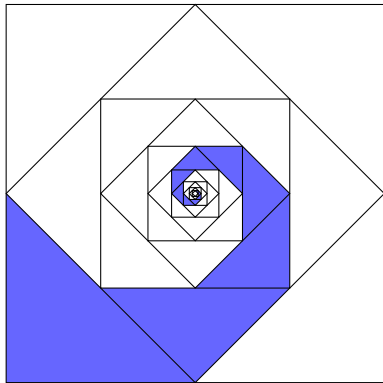
$$s = 15 \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = 15 \cdot \frac{1}{\frac{2}{3}} = 15 \cdot \frac{3}{2} = \frac{45}{2}$$

(b) $a_1 = 2, q = -\frac{3}{4}$

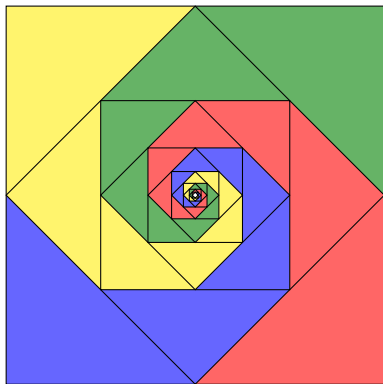
$$s = 2 \cdot \frac{1}{1 - \left(-\frac{3}{4}\right)} = 2 \cdot \frac{1}{\frac{7}{4}} = 2 \cdot \frac{4}{7} = \frac{8}{7}$$

Aufgabe 17

Das äusserste Quadrat hat eine Seitenlänge von 8. Bestimme die Summe der Flächeninhalte der nichtabbrechenden Folge der schraffierten Dreiecke.



Aufgabe 17



Flächeninhalt des grössten Dreiecks: $A_1 = \frac{4 \cdot 4}{2} = 8 \text{ cm}^2$

Flächeninhalt des nächstkleineren Dreiecks: $A_2 = \frac{A_1}{2} = 4 \text{ cm}^2$

$$q = \frac{1}{2} \Rightarrow A = A_1 \cdot \frac{1}{1 - q} = 8 \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 16 \text{ cm}^2$$