Quadratwurzeln

Theorie (L)

Inhaltsverzeichnis

Version vom 10. November 2020

1 Definition, Begriffe und Berechnung

Definition

Für eine nichtnegative Zahl a ist $b = \sqrt{a}$ die nichtnegative Zahl mit der Eigenschaft $b^2 = a$.

- a: Radikand
- b: (Quadrat)Wurzel aus a
- Wurzelziehen: Radizieren

Um $\sqrt{9}$ zu berechnen, suchen wir die Zahlen, deren Quadrat 9 ergeben. Dafür kommen $+3$ und -3 in Frage. Da es laut Definition die *nichtnegative* Zahl sein soll, gilt $\sqrt{9} = 3$.

Kopfrechnen

Lerne die folgenden Quadratzahlen auswendig. Sie sind eine wichtige Grundlage für das Rechnen mit Quadratwurzeln.

0^2	0	7^2	49	14^2	196	21^2	441
1^2	1	8^2	64	15^2	225	22^2	484
2^2	4	9^2	81	16^2	256	23^2	529
3^2	9	10^2	100	17^2	289	24^2	576
4^2	16	11^2	121	18^2	324	25^2	625
5^2	25	12^2	144	19^2	361	26^2	676
6^2	36	13^2	169	20^2	400	27^2	729

Zu welchem Zahlenbereichen gehören die Quadratwurzeln?

$\sqrt{49} = 7 \in \mathbb{N}_0$

natürliche Zahl

$\sqrt{9/4} = 3/2 = 1.5 \in \mathbb{Q}$

rationale Zahl mit abbrechender Dezimaldarstellung

$\sqrt{4/9} = 2/3 = 0.6\overline{6} \in \mathbb{Q}$

rationale Zahl mit nichtabbrechender periodischer Dezimaldarstellung

$\sqrt{2} = 1.41421\ldots \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

irrationale Zahl mit nichtabbrechender aperiodischer Dezimaldarstellung

Stellenzahl der Quadratwurzel

Wie lässt sich aus der Stellenzahl des Radikanden die Stellenzahl einer Quadratwurzel bestimmen, wenn diese eine endliche Dezimaldarstellung hat?

$\sqrt{17\,935\,225} = 4235 \quad 8\text{VKS} \to 4\,\text{VKS}$

$\sqrt{502.432225} = 22.415 \quad 3\,\text{VKS} \to 2\,\text{VKS},\ 6\,\text{NKS} \to 3\,\text{NKS}$

$\sqrt{214\,526.4489} = 463.17 \quad 6\,\text{VKS} \to 3\,\text{VKS},\ 4\,\text{NKS} \to 2\,\text{NKS}$

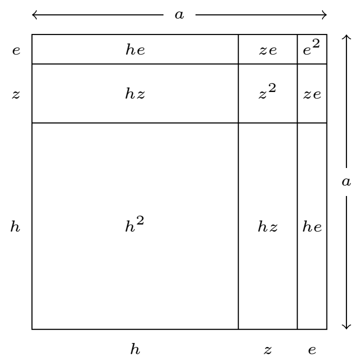
$\sqrt{0.0074545956} = 0.08634 \quad 10\,\text{NKS} \to 5\,\text{NKS}$

Vorkommastellen (VKS): halbieren und aufrunden

Nachkomastellen (NKS): halbieren

Schriftliches Wurzelziehen

$\sqrt{a}$ kann durch fortlaufendes Ausschöpfen von a bestimmt werden. Bei jedem Schritt sind weitere Mischprodukte zu berücksichtigen.



$a^2 = h^2 + (2hz + z^2) + (2he + 2ze + e^2) = h^2 + (2h + z)z + (2h + 2z + e)e$

Beispiel 1.1

$\sqrt{116\,281} = ?$

Teile die Ziffern des Radikanden von rechts in Zweiergruppen auf.

$$
\begin{array}{rrrrl}
 & 11 & 62 & 81 & = (300 + 40 + 1)^2 = 341^2 \\
- & 9 & \downarrow & \downarrow & \\
\hline
 & 2 & 62 & & \\
- & 2 & 56 & & {\scriptstyle (2 \cdot 30 + 4) \cdot 4} \\
\hline
 & & 6 & 81 & \\
 & - & 6 & 81 & {\scriptstyle (2 \cdot 300 + 2 \cdot 40 + 1) \cdot 1} \\
\hline
 & & & 0 &
\end{array}
$$

$\sqrt{116\,281} = 341$

Das Verfahren von Heron (babylonisches Wurzelziehen)

Gegeben: Radikand a, Mindestenauigkeit ε und Startwert x

Gesucht: Näherungslösung für $\sqrt{a}$

(1) Berechne $\frac{1}{2}\left(x+\frac{a}{x}\right) \to x'$. $\left(\text{Durchschnitt von } x \text{ und } \frac{a}{x}\right)$

(2) Ist $|x - x'| < \varepsilon$?

(2.1) *Ja:* Gehe zu (3).

(2.2) *Nein:* Setze $x' \to x$ und gehe zu (1).

(3) Gib x' als Näherungslösung aus. (Ende)

Begründung: x' und $\sqrt{a}$ liegen immer zwischen x und $\frac{a}{x}$.

Beispiel 1.2

$\sqrt{6} = ?$, Genauigkeit $\varepsilon = 0.1$, Startwert $x = 3$

(1) $\frac{1}{2}\left(3+\frac{6}{3}\right) = \frac{5}{2} \to x'$

(2) $|x - x'| = \left|3 - \frac{5}{2}\right| = \frac{1}{2} = 0.5 < 0.1?$ Nein $\Rightarrow \frac{5}{2} \to x$

(1) $\frac{1}{2}\left(\frac{5}{2}+\frac{6}{5/2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{5}{2}+\frac{12}{5}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{49}{10} = \frac{49}{20} \to x'$

(2) $|x - x'| = \left|\frac{5}{2} - \frac{49}{20}\right| = \frac{1}{20} = 0.05 < 0.1?$ Ja

(3) $\sqrt{6} \approx 49/20 = 2.45$ (cf. $\sqrt{6} = 2.44948974\ldots$)

2 Rechenregeln

Die Produktregel

$\sqrt{4\cdot 9} = \sqrt{36} = 6$

$\sqrt{4}\cdot\sqrt{9} = 2\cdot 3 = 6$

Behauptung: Für $a \geq 0$ und $b \geq 0$ gilt: $\sqrt{a\cdot b} = \sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$

Beweis: Sind $a \geq 0$ und $b \geq 0$ so gibt es Zahlen $x \geq 0$ und $y \geq 0$ mit $x^2 = a$ und $y^2 = b$.

$$\sqrt{a\cdot b} = \sqrt{x^2\cdot y^2} = \sqrt{x\cdot x\cdot y\cdot y} \overset{\text{K}}{=} \sqrt{x\cdot y\cdot x\cdot y}$$

$$\overset{\text{A}}{=} \sqrt{(x\cdot y)\cdot(x\cdot y)} = \sqrt{(x\cdot y)^2} \overset{\text{D}}{=} x\cdot y \overset{\text{D}}{=} \sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$$

(K: Kommutativgesetz, A: Assoziativgesetz, D: Definition der Quadratwurzel)

Beispiel 2.1

$\sqrt{160\,000} = \sqrt{16 \cdot 10\,000} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{10\,000} = 4 \cdot 100 = 400$

Beispiel 2.2

$\sqrt{200} = \sqrt{100 \cdot 2} = \sqrt{100} \cdot \sqrt{2} = 10\sqrt{2}$ *(teilweise Radizieren)*

Beispiel 2.3

$\sqrt{10} \cdot \sqrt{2.5} = \sqrt{10 \cdot 2.5} = \sqrt{25} = 5$

Die Quotientenregel

$\sqrt{100 : 25} = \sqrt{4} = 2$

$\sqrt{100} : \sqrt{25} = 10 : 5 = 2$

Behauptung: Für $a \geq 0$ und $b > 0$ gilt: $\sqrt{a : b} = \sqrt{a} : \sqrt{b}$

Beweis: Sind $a \geq 0$ und $b > 0$ so gibt es Zahlen $x \geq 0$ und $y > 0$ mit $x^2 = a$ und $y^2 = b$.

$$\begin{aligned}
\sqrt{a : b} &= \sqrt{x^2 : y^2} = \sqrt{(x \cdot x) : (y \cdot y)} = \sqrt{x \cdot x : y : y} \\
&\overset{\text{K}}{=} \sqrt{x : y \cdot x : y} \overset{\text{A}}{=} \sqrt{(x : y) \cdot (x : y)} = \sqrt{(x : y)^2} \\
&\overset{\text{D}}{=} x : y \overset{\text{D}}{=} \sqrt{a} : \sqrt{b}
\end{aligned}$$

Beispiel 2.4

$\sqrt{0.000144} = \sqrt{\dfrac{144}{1\,000\,000}} = \dfrac{\sqrt{144}}{\sqrt{1\,000\,000}} = \dfrac{12}{1000} = 0.012$

Beispiel 2.5

$\dfrac{\sqrt{147}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\dfrac{147}{3}} = \sqrt{49} = 7$

Die Potenzregel

$\sqrt{2^6} = \sqrt{64} = 8$

$\left(\sqrt{2}\right)^6 = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$

Behauptung: Für $a \geq 0$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\sqrt{a^n} = \left(\sqrt{a}\right)^n$

Beweis: Für $a \geq 0$ und $n \in \mathbb{N}$ folgt durch mehrfache Anwendung der Produktregel (P)

$$\sqrt{a^n} = \sqrt{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a} \overset{\text{P}}{=} \sqrt{a} \cdot \sqrt{a} \cdot \ldots \cdot \sqrt{a} = \left(\sqrt{a}\right)^n$$

Beispiel 2.6

$$\sqrt{3^{820}} = \left(\sqrt{3}\right)^{820} = \underbrace{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}_{3}\cdot\ldots\cdot\underbrace{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}_{3} = \underbrace{3\cdot\ldots\cdot 3}_{\text{410 Faktoren}} = 3^{410}$$

3 Die Normalform

Ist es möglich einen Wurzelterm in der Gestalt

$$q_0 + q_1\sqrt{n_1} + q_2\sqrt{n_2} + \ldots$$

darzustellen, wobei $q_0, q_1, q_2, \ldots$ rationale Zahlen und $n_1, n_2, \ldots$ verschiedene quadratfreie natürliche Zahlen sind, so spricht man von *der Normalform* dieses Wurzelterms.

Beispiel 3.1

$$\sqrt{8} = \sqrt{4\cdot 2} = \sqrt{4}\cdot\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$

Beispiel 3.2

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{3}\sqrt{3} \quad \text{(Nenner wurzelfrei machen)}$$

Beispiel 3.3

$$\sqrt{\frac{20}{7}} = \sqrt{\frac{4\cdot 5\cdot 7}{7\cdot 7}} = \sqrt{\frac{4}{49}\cdot 35} = \sqrt{\frac{4}{49}}\sqrt{35} = \frac{2}{7}\sqrt{35}$$

Beispiel 3.4

$$\sqrt{75} + \sqrt{72} - \sqrt{27} + \sqrt{2}$$

$$= \sqrt{25}\sqrt{3} + \sqrt{36}\sqrt{2} - \sqrt{9}\sqrt{3} + \sqrt{2}$$

$$= 5\sqrt{3} + 6\sqrt{2} - 3\sqrt{3} + \sqrt{2}$$

$$= 7\sqrt{2} + 2\sqrt{3}$$

Beispiel 3.5

$$\left(\sqrt{2} + \sqrt{3}\right)^2 = 2 + 2\sqrt{2}\sqrt{3} + 3 = 5 + 2\sqrt{6}$$

Beispiel 3.6

$$\frac{1}{3+\sqrt{2}} \overset{\text{3BF}}{=} \frac{1\cdot(3-\sqrt{2})}{(3+\sqrt{2})(3-\sqrt{2})} = \frac{3-\sqrt{2}}{9-2} = \frac{3-\sqrt{2}}{7}$$

$$= \frac{3}{7} - \frac{1}{7}\sqrt{2}$$

Beispiel 3.7

$$\frac{1-\sqrt{3}}{2-\sqrt{5}} \overset{\text{3BF}}{=} \frac{(1-\sqrt{3})(2+\sqrt{5})}{(2-\sqrt{5})(2+\sqrt{5})} = \frac{2+\sqrt{5}-2\sqrt{3}-\sqrt{15}}{4-5}$$

$$= \frac{2-2\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{15}}{-1} = -2+2\sqrt{3}-\sqrt{5}+\sqrt{15}$$

Beispiel 3.8

Ist die Aussage wahr oder falsch?

$\sqrt{3}+\sqrt{12}+\sqrt{18} = \sqrt{2}+\sqrt{8}+\sqrt{27}$

$\sqrt{3}+2\sqrt{3}+3\sqrt{2} = \sqrt{2}+2\sqrt{2}+3\sqrt{3}$

$3\sqrt{2}+3\sqrt{3} = 3\sqrt{2}+3\sqrt{3}$ wahr

Beispiel 3.9

$\sqrt{\sqrt{3}}$

kann nicht auf Normalform gebracht werden, da der Radikand irrational ist.

4 Wurzelterme mit Variablen

Überprüfe den Wahrheitsgehalt der Aussageform

$$\sqrt{a^2} = a,$$

indem du ...

- a durch 2 ersetzt: $\sqrt{2^2} = \sqrt{4} = 2$ (wahr)
- a durch -2 ersetzt: $\sqrt{(-2)^2} = \sqrt{4} = -2$ (falsch)

Mit dem Symbol

$$|a| := \sqrt{a^2} \quad \text{[lies: „Betrag von a“]}$$

zeigen wir an, dass $\sqrt{a^2}$ nichtnegativ ist, selbst wenn $a < 0$ gilt.

Beispiel 4.1

$\sqrt{x^2} = |x|$

Beispiel 4.2

$\sqrt{z^3} = \sqrt{z^2 \cdot z} = \sqrt{z^2} \cdot \sqrt{z} = |z|\sqrt{z}$

Beispiel 4.3

$\sqrt{c^4} = c^2$ Warum braucht es hier keine Betragszeichen?

c^2 kann nicht negativ sein

Beispiel 4.4

$\sqrt{y^2 - 8y + 16} = \sqrt{(y-4)^2} = |y-4|$

Beispiel 4.5

$\sqrt{m^2 + m^3} = \sqrt{m^2(1+m)} = \sqrt{m^2}\sqrt{1+m} = |m|\sqrt{1+m}$

Beispiel 4.6

$$\begin{aligned}\sqrt{(x+y)^2 - (x-y)^2} &= \sqrt{x^2 + 2xy + y^2 - (x^2 - 2xy + y^2)} \\ &= \sqrt{4xy} = 2\sqrt{xy}\end{aligned}$$

5 Lineare Gleichungen mit Wurzelkoeffizienten

Beispiel 5.1

$$x\sqrt{3} + \sqrt{2} = \sqrt{5} - x\sqrt{2} \quad || + x\sqrt{2} - \sqrt{2}$$

$$x\sqrt{3} + x\sqrt{2} = \sqrt{5} - \sqrt{2}$$

$$x\left(\sqrt{3} + \sqrt{2}\right) = \sqrt{5} - \sqrt{2}$$

$$x = \frac{\sqrt{5} - \sqrt{2}}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}$$

$$x = \frac{(\sqrt{5} - \sqrt{2})(\sqrt{3} - \sqrt{2})}{(\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} - \sqrt{2})}$$

$$x = \frac{\sqrt{15} - \sqrt{10} - \sqrt{6} + 2}{3 - 2}$$

$$x = 2 - \sqrt{6} - \sqrt{10} + \sqrt{15}$$

Beispiel 5.2

$$\left(\sqrt{2}-x\right)^2 = (4-x)(3-x)$$

$$2-2x\sqrt{2}+x^2 = 12-7x+x^2 \quad || -x^2$$

$$2-2x\sqrt{2} = 12-7x \quad || -2+7x$$

$$7x-2x\sqrt{2} = 10$$

$$x(7-2\sqrt{2}) = 10$$

$$x = \frac{10}{7-2\sqrt{2}}$$

$$x = \frac{10(7+2\sqrt{2})}{(7-2\sqrt{2})(7+2\sqrt{2})}$$

$$x = \frac{70+20\sqrt{2}}{49-8} = \frac{70}{41} + \frac{20}{41}\sqrt{2}$$

6 Quadrierte Gleichungen

Sind A und B zwei Polynome, so ist die Lösungsmenge der Gleichung

$$A^2 = B^2$$

die Vereinigungsmenge der Lösungsmengen von

$$A = B \quad \text{und} \quad A = -B$$

Beispiel 6.1

$\left(x-4\right)^2 = 144$

$x - 4 = 12 \quad \text{oder} \quad x - 4 = -12$

$x = 16 \qquad\qquad x = -8$

Beispiel 6.2

$\left(2x-12\right)^2 = (3x-15)^2$

$2x - 12 = 3x - 15 \quad \text{oder} \quad 2x - 12 = -(3x - 15)$

$3 = x \qquad\qquad 2x - 12 = -3x + 15$

$x = 3 \qquad\qquad 5x = 27$

$x = \frac{27}{5}$

7 Wurzelgleichungen

Eine Wurzelgleichung ist eine Gleichung, bei der *die Unbekannte* im Radikanden auftritt.

- $\sqrt{2}x + \sqrt{3}x = 5$ keine echte Wurzelgleichung
- $2\sqrt{x} + \sqrt{3x} = 5$ echte Wurzelgleichung

Beispiel 7.1

$\sqrt{2-x} = \sqrt{x-8} \quad ||^2$ (Gewinnumformung)

$2 - x = x - 8 \quad || + x + 8$

$10 = 2x \quad || : 2$

$x = 5$

Probe L: $\sqrt{2-5} = \sqrt{-3}$ nicht definiert

$L = \{\,\}$

Beispiel 7.2

$\sqrt{x+243} - \sqrt{x} = \sqrt{x} \quad || + \sqrt{x}$

$\sqrt{x+243} = 2\sqrt{x} \quad ||^2$ (Gewinnumformung)

$x + 243 = 4x$

$243 = 3x$

$x = 81$

Probe L: $\sqrt{81+243} - \sqrt{81} = \sqrt{324} - 9 = 18 - 9 = 9$

Probe R: $\sqrt{81} = 9$ (stimmt)

$L = \{81\}$

Beispiel 7.3

$$\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}=\sqrt{2x+3} \quad ||^2 \quad \text{(2BF)}$$

$$(x+2)+2\sqrt{x+2}\,\sqrt{x-2}+(x-2)=2x+3 \quad \text{(zusammenfassen)}$$

$$2x+2\sqrt{x+2}\,\sqrt{x-2}=2x+3 \quad ||-2x$$

$$2\sqrt{x+2}\,\sqrt{x-2}=3 \quad ||^2$$

$$4(x+2)(x-2)=9 \quad \text{(3BF)}$$

$$4(x^2-4)=9$$

$$4x^2-16=9$$

$$4x^2=25$$

$$x^2=\tfrac{25}{4}$$

$$x=\pm\tfrac{5}{2}$$

Probe für $x=\frac{5}{2}$:

L: $\sqrt{\frac{5}{2}+2}+\sqrt{\frac{5}{2}-2}=\sqrt{\frac{9}{2}}+\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{3}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{4}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$

R: $\sqrt{2\cdot\frac{5}{2}+2}=\sqrt{5+3}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

Probe für $x=-\frac{5}{2}$:

L: $\sqrt{-\frac{5}{2}+2}+\sqrt{-\frac{5}{2}-2}=\sqrt{-\frac{1}{2}}+\sqrt{-\frac{9}{2}}$ nicht definiert

$L=\left\{\frac{5}{2}\right\}$