Die quadratische Gleichung

Theorie

1 Begriffe

Die formale Gleichung

$$ax^2 + bx + c = 0$$

heisst *quadratische Gleichung* in der Variablen x mit den *Koeffizienten* a, b und c.

Stehen die drei Monome ax^2, bx und c nach absteigenden Exponenten sortiert auf einer Seite des Gleicheitszeichens und die Null auf der anderen, so ist die quadratische Gleichung in der *allgemeinen Form*.

a	Koeffizient des quadratischen Monoms ($a \neq 0$)
b	Koeffizient des linearen Monoms
c	Koeffizient des konstanten Monoms

Es ist sinnvoll, $a \neq 0$ vorauszusetzen, denn wenn wir $a = 0$ in die Gleichung $ax^2+bx+c = 0$ einsetzen, so erhalten wir $bx + c = 0$ und damit eine *lineare* Gleichung.

Gilt in der allgemeinen Form $a = 1$, so ist die quadratische Gleichung in der *Normalform*.

Erfüllt eine Zahl x_0 die quadratische Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ so wird diese Zahl *Lösung* der Gleichung genannt. Eine quadratische Gleichung kann *keine*, *eine* oder *zwei* reelle Lösungen haben.

Beispiele

(a) Gib die Koeffizienten der quadratischen Gleichung $x^2 - 5x + \frac{2}{7} = 0$ an.

(b) Ist die Gleichung $x^4 + x^2 + 5 = 0$ eine quadratische Gleichung?

(c) Ist die Gleichung $x^2 - 4 = 5x$ in der allgemeinen Form?

(d) Welches ist die Lösungsvariable der Gleichung $5z^2 + 3z + 18 = 0$?

(e) Ist die Gleichung $2x^2 + 3z = 0$ eine quadratische Gleichung?

(f) Ist die Gleichung $-x^2 + 9x - 5 = 0$ in der Normalform?

(g) Ist $x = 1$ eine Lösung der Gleichung $x^2 - 3x + 2 = 0$?

(h) Ist $x = 2$ eine Lösung der Gleichung $x^2 - 3x + 2 = 0$?

2 Spezialfälle

Ist $b = 0$, so lautet die allgemeine Form der quadratischen Gleichung $ax^2 + c = 0$. Die Lösungen werden durch Umformung bestimmt. Gilt $c > 0$, so gibt es keine (reelle) Lösung.

Beispiele

(a) $9x^2 - 25 = 0$

(b) $x^2 + 16 = 0$

(c) $x^2 - 17 = 0$

Ist $c = 0$, so lautet die allgemeine Form der quadratischen Gleichung $ax^2 + bx = 0$. In diesem Fall erhalten wir immer zwei Lösungen, die durch Faktorisieren gewonnen werden.

Beispiele

(d) $x^2 - 2x = 0$

(e) $3x^2 + x = 0$

(f) $2x^2 - 5x = 0$

Hat keiner der Koeffizienten den Wert Null, so untersuchen wir zuerst, ob der Term $ax^2 + bx + c$ als binomische Formel dargestellt werden kann oder ob er sich in ein Produkt von Linearfaktoren zerlegen lässt.

Beispiele

(g) $x^2 + 18x + 81 = 0$

(h) $4x^2 - 20x + 25 = 0$

(i) $x^2 + 4x - 21 = 0$

3 Lösung mit quadratischer Ergänzung

Die Spezialfälle aus dem letzten Abschnitt konnten mit bekannten algebraischen Methoden (Umformung, Faktorisierung, Zerlegung in Linearfaktoren) gelöst werden. Handelt es sich bei einer quadratischen Gleichung aber nicht um einen Spezialfall, so benötigt man die folgende Lösungstechnik, die *quadratische Ergänzung* genannt wird:

(1) Achte darauf, dass die quadratische Gleichung in der Normalform steht. Andernfalls dividiere die Gleichung durch den Koeffizienten a.

(2) Isoliere das quadratische und das lineare Monom auf der linken Seite der Gleichung.

(3) Addiere auf beiden Seiten der Gleichung das Quadrat des halben Koeffizienten des linearen Monoms.

(4) Die linke Seite der Gleichung lässt sich nun mit Hilfe der ersten oder zweiten binomische Formel als Quadrat eines einzelnen Linearfaktors schreiben.

(5) Falls die Zahl rechts nicht negativ ist, können die Wurzeln bestimmt und die Gleichung nach der Variablen aufgelöst werden. Andernfalls ist die Lösungsmenge leer.

Beispiele

(a) $x^2 - 6x + 7 = 0$

(b) $x^2 - 4x + 8 = 0$

(c) $x^2 - 3x - 1 = 0$

(d) $2x^2 - 5x + 2 = 0$

4 Die Lösungsformel

Wir werden nun die quadratische Ergänzung rein formal durchführen und erhalten so eine Formel, mit der wir jede quadratische Gleichung lösen oder ihre Unlösbarkeit feststellen können.

$ax^2 + bx + c = 0$

5 Substitution

(a) $(x-8)^2+3(x-8)-28=0$

(b) $\left(\frac{y}{2}\right)^2+3\left(\frac{y}{2}\right)-28=0$

(c) $\left(\frac{z+2}{3}\right)^2+3\left(\frac{z+2}{3}\right)-28=0$

(d) $x^4 - 11x^2 + 18 = 0$ (biquadratische Gleichung)

(e) $x^4 - 9x^2 + 8 = 0$

(f) $x^4 - 5x^2 - 36 = 0$

6 Der Satz von Vieta

Im Abschnitt 4 haben wir gelernt, wie wir aus den Koeffizienten einer quadratischen Gleichung a, b und c deren Lösungen x_1 und x_2 bestimmt (sofern es Lösungen gibt).

Wir fragen uns nun, ob wir auch das Umgekehrte tun können: Lassen sich aus den Lösungen x_1 und x_2 die Koeffizienten a, b und c zurückgewinnen?

Der Satz von Vieta beantwortet diese Frage, indem er die Beziehung zwischen den Lösungen und den Koeffizienten einer quadratischen Gleichung in Form von Gleichungen ausdrückt.

Gleichung	Lösungen		Summe	Produkt	Koeffizienten		
$ax^2 + bx + c = 0$	x_1	x_2	$x_1 + x_2$	$x_1 \cdot x_2$	a	b	c
$x^2 - 5\,x + 6 = 0$	2	3					
$x^2 + 3\,x - 28 = 0$	4	-7					
$x^2 + 14\,x + 45 = 0$	-5	-9					
$2x^2 + 6\,x - 20 = 0$	2	-5					
$3x^2 - 12\,x + 12 = 0$	2	2					
$5x^2 - 30\,x = 0$	0	6					
$-x^2 - 4\,x + 32 = 0$	-8	4					

Der Satz von Vieta

Sind x_1 und x_2 Lösungen der quadratischen Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$, so gilt:

$x_1 + x_2 =$

$x_1 \cdot x_2 =$

Beispiele

(a) Von einer quadratischen Gleichung sind die Lösungen $x_1 = 3$, $x_2 = 7$ und der Koeffizient $a = 1$ bekannt. Bestimme die beiden anderen Koeffizienten.

(b) Von einer quadratischen Gleichung ist die Lösung $x_1 = 4$ und die Koeffizienten $a = 2$ und $c = -24$ bekannt. Bestimme die zweite Lösung und den fehlenden Koeffizienten.

7 Der Zerlegungssatz

Bisher konnten wir ein Polynom ax^2+bx+c nur dann faktorisieren, also in Linearfaktoren zerlegen, wenn die Koeffizienten speziell beschaffen waren.

(a) $x^2 + 6x + 9$

(b) $x^2 - 9$

(c) $x^2 - 7x + 10$

(d) $3x^2 + 3x - 36$

Lassen sich auch Polynome mit beliebigen Koeffizienten in ein Produkt von Linearfaktoren zerlegen? Unter gewissen Voraussetzungen können wir diese Frage mit Ja beantworten.

Zerlegungssatz

Sind x_1 und x_2 Lösungen der quadratischen Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$, so gilt

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Beweis

$ax^2 + bx + c$

Beispiele:

(e) Zerlege den Term $3x^2 - 7x + 2$ in Linearfaktoren.

(f) Kürze den Term $\dfrac{2x^2 - 11x + 5}{2x^2 - 9x + 4}$.

8 Textaufgaben

Beispiel 8.1

Von 2 Zahlen ist die eine um 50 grösser als die andere und das Produkt der Zahlen ist um 50 grösser als die Summe. Wie heissen die Zahlen

Beispiel 8.2

An einer Party begrüssen sich alle Gäste mit einem Händedruck. Dabei werden insgesamt 45 Mal die Hände geschüttelt. Wie viele Gäste nehmen an der Party teil.

Beispiel 8.3

Ein rechteckiges Blumenbeet von 3 Metern Länge und 2 Metern Breite wird durch einen Streifen Rasen mit gleicher Breite umfasst. Wie breit muss dieser Streifen sein, damit sein Flächeninhalt gleich gross ist wie der Flächeninhalt des Blumenbeets?