Quadratische Funktionen

Theorie

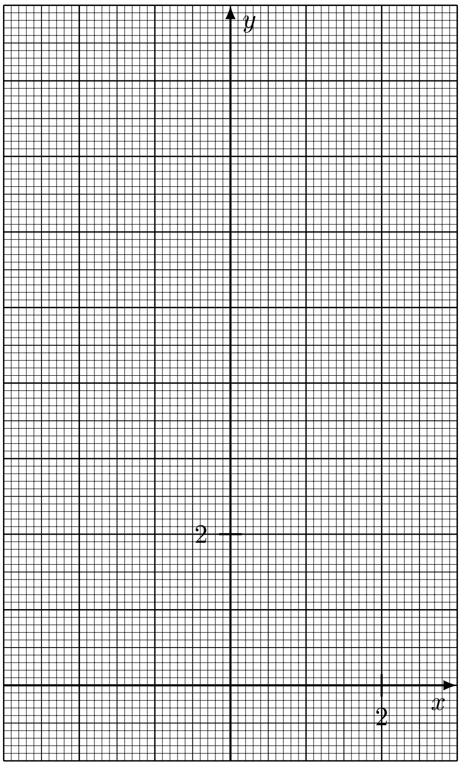
Die Funktion $y = x^2$

Die Funktionsgleichung $y = x^2$ führt auf eine gekrümmte Kurve, die *Normalparabel*.

Wertetabelle zu $y = x^2$:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y							

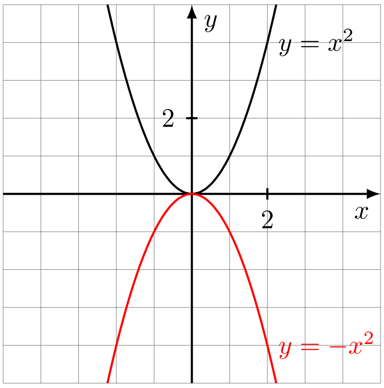
Die Normalparabel



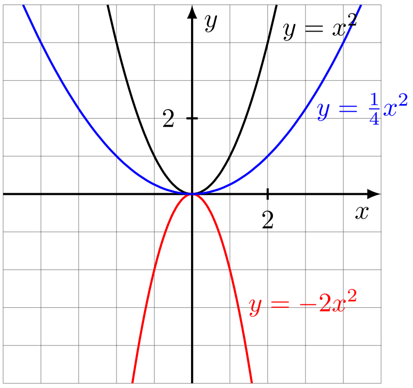
Eigenschaften

-
-
-
-

Die Spiegelung der Normalparabel an der x-Achse



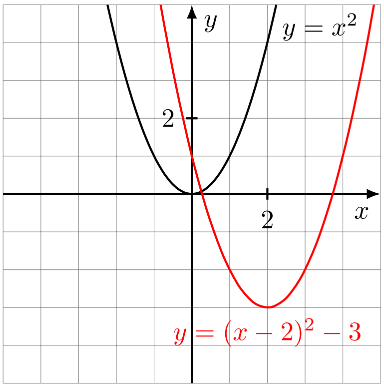
Streckungen der Normalparabel in y-Richtung



$0 < |a| < 1$: vertikale Stauchung der Normalparabel mit Faktor a

$1 < |a| < \infty$: vertikale Streckung der Normalparabel mit Faktor a

Verschiebungen der Normalparabel

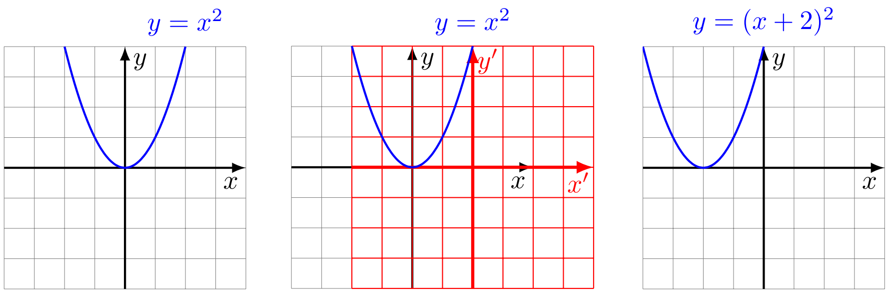


$y = (x - u)^2 + v$: Verschiebung der Normalparabel um

- u Einheiten in x-Richtung
- v Einheiten in y-Richtung

Die Koordinatentransformation $x \to x + u$

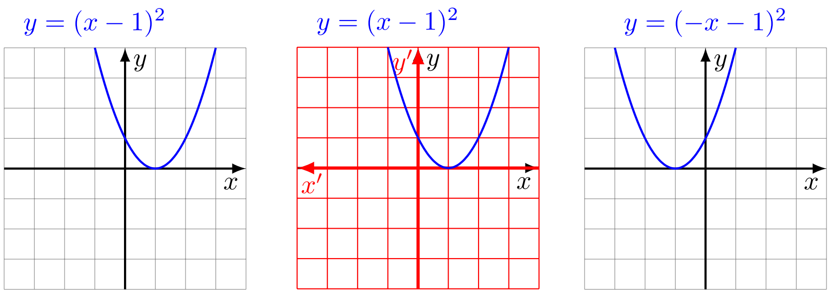
1. Koordinatensystem *ohne Graph* um u in x-Richtung verschieben
2. neues Koordinatensystem mit Graph verbinden
3. neues Koordinatensystem *mit Graph* um $-u$ in x-Richtung zurückschieben



Die Transformation $y \to y + v$ verläuft analog, nur dass in y-Richtung verschoben wird.

Die Koordinatentransformation $x \to -x$

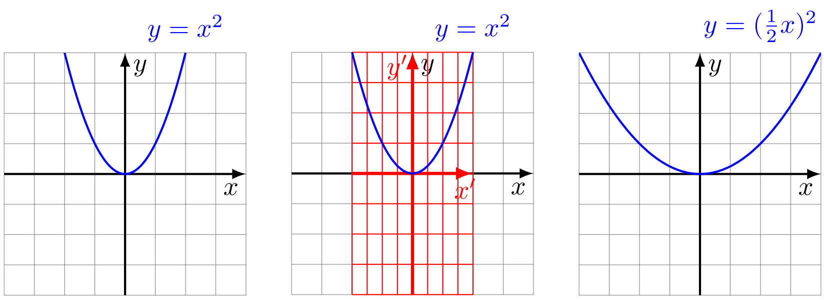
1. Koordinatensystem *ohne Graph* an der y-Achse spiegeln
2. neues Koordinatensystem mit Graph verbinden
3. neues Koordinatensystem *mit Graph* an der y-Achse zurückspiegeln



Die Transformation $y \to -y$ verläuft analog, nur dass an der x-Achse gespiegelt wird.

Die Koordinatentransformation $x \to ax$

1. Koordinatensystem *ohne Graph* mit Faktor a in x-Richtung strecken
2. neues Koordinatensystem mit Graph verbinden
3. neues Koordinatensystem *mit Graph* mit in x-Richtung zurückstauchen.



Die Transformation $y \to ay$ verläuft analog, nur dass in x-Richtung gestreckt wird.

Beispiel 1

Der Graph der Funktion $f\colon y = x^2$ soll zuerst um -2 Einheiten in x-Richtung und dann an der y-Achse gespiegelt werden. Wie lautet die Gleichung der Funktion des neuen Graphen?

Die Scheitelpunktform

Liegt eine quadratische Funktion in der Form

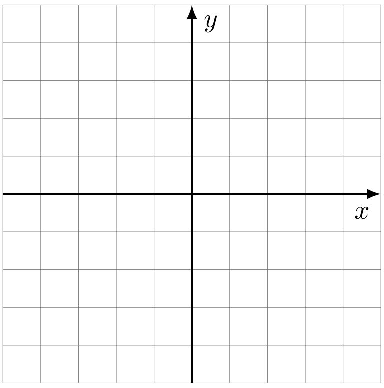
$$y = a(x-u)^2 + v$$

vor, so hat ihr Scheitelpunkt die Koordinaten $S(u, v)$ und die zugehörige Parabel lässt sich wie folgt skizzieren:

- Stelle dir ein Koordinatensystem vor, das seinen Ursprung im Punkt $S(u, v)$ hat.
- Skizziere die Funktion $y = ax^2$ in diesem neuen Koordinatensystem.

Beispiel 2

$f\colon y = -\frac{1}{4}(x+1)^2 + 2$



Die Herleitung der Scheitelpunktform

$$\begin{aligned}
y = ax^2 + bx + c &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c \\
&= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2}\right) + c \\
&= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) - \frac{b^2}{4a} + \frac{4ac}{4a} \\
&= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} \\
&= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{D}{4a} = a\left(x-u\right)^2 + v \quad \text{mit } u = -\frac{b}{2a},\ v = -\frac{D}{4a}
\end{aligned}$$

Beispiel 3

Gegeben: $f\colon y = 2x^2 - 4x + 3$

Gesucht: Scheitelpunkt von G_f

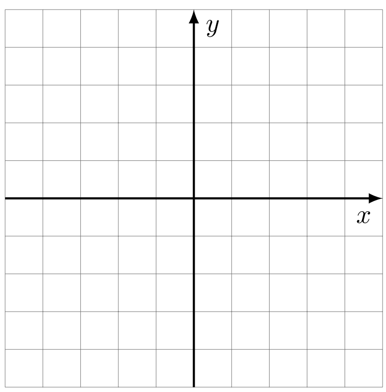
Nullstellen und Ordinatenabschnitt

Eine reelle Zahl α mit der Eigenschaft $f(\alpha) = 0$ heisst *Nullstelle* der Funktion f.

Die reelle Zahl $\beta = f(0)$ heisst *Ordinatenabschnitt* der Funktion f.

Beispiel 4

Bestimme Ordinatenabschnitt sowie Nullstellen der Funktion $f\colon y = x^2 - 2x - 3$ und skizziere den Graphen G_f.



Eine andere Berechnung des Scheitelpunkts

Gegeben: $f\colon\, y = ax^2 + bx + c$

Nullstellen: $x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{D}}{2a}$ und $x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{D}}{2a}$

Aus Symmetriegründen muss $x_S = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$ gelten.

$$x_S = \frac{1}{2}\left(\frac{-b + \sqrt{D}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{-2b}{2a} = \frac{-b}{2a}$$

$$\begin{aligned} y_S = f(x_s) = a \cdot \left(\frac{-b}{2a}\right)^2 + b \cdot \left(\frac{-b}{2a}\right) + c &= \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c \\ = \frac{-b^2}{4a} + \frac{4ac}{4a} = \frac{-b^2 + 4ac}{4a} &= \frac{-(b^2 - 4ac)}{4a} = \frac{-D}{4a} \end{aligned}$$

Schnittpunkte von Graphen

Um die Schnittpunkte der Graphen G_1 und G_2 der Funktionen f_1 bzw. f_2 zu bestimmen, müssen die Funktionsterme gleichgesetzt werden.

Die Lösungen dieser Gleichung sind die x-Koordinaten der Schnittpunkte.

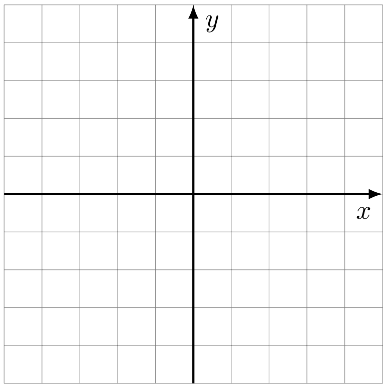
Um auch noch die zugehörigen y-Koordinaten zu berechnen, müssen die oben berechneten x-Koordinaten in eine der beiden Funktionen eingesetzt werden.

Beispiel 5

Gegeben: $f\colon\, y = x^2 + 2x - 1$ und $g\colon\, y = x + 1$

Gesucht: $G_f \cap G_g$

Graph von $f\colon y = x^2 + 2x - 1$ und $g\colon y = x + 1$



Die geometrische Definition einer Parabel

Die Parabel ist die Menge aller Punkte, die von einer (Leit)Geraden l und einem Punkt F den gleichen Abstand haben.