Der Algorithmus von Hierholzer

Pfade, Zyklen und Kreise

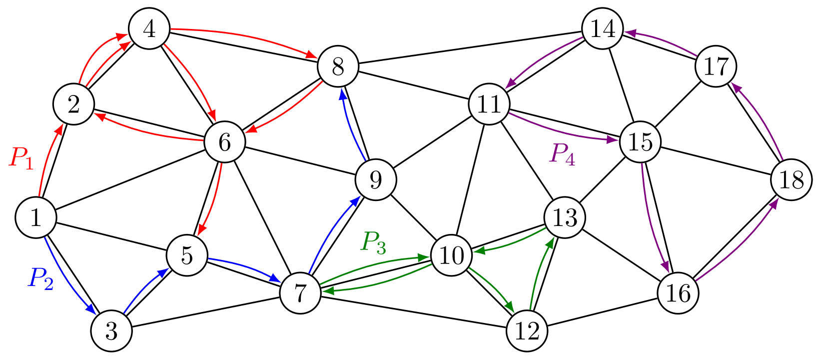
Es sei $G = (V, E)$ ein nichtleerer Graph mit der Knotenmenge V und der Kantenmenge E.

Ein *Pfad* (oder Weg) in G ist eine Folge von Knoten $P = (v_1, v_2, \dots, v_m)$, wobei jeweils zwei benachbarte Knoten durch eine Kante aus E verbunden sind.

Ein *Zyklus* ist ein Pfad $P = (v_1, v_2, \dots, v_m)$ für den $v_1 = v_m$ gilt.

Ein *Kreis* ist ein Zyklus in dem Start- und Endknoten die einzigen mehrfach vorkommenden Knoten sind.

Beispiele



$G = (V, E)$ mit $V = \{1, 2, \dots, 18\}$ und $E = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \dots, \{17, 18\}\}$

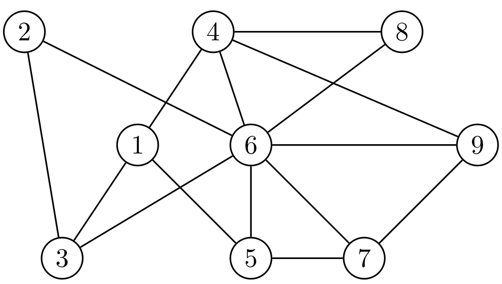
- $P_1 = (1, 2, 4, 8, 6, 2, 4, 6, 5)$ Pfad
- $P_2 = (1, 3, 5, 7, 9, 8)$ (einfacher) Pfad
- $P_3 = (7, 10, 12, 13, 10, 7)$ Zyklus
- $P_4 = (11, 15, 16, 18, 17, 14, 11)$ Kreis

Hamiltonkreise und Hamiltonwege

Ein *Hamiltonkreis* in G ist ein Kreis, der alle Knoten des Graphen enthält.

Entfernt man aus einem Hamiltonkreis eine Kante, so erhält man einen *Hamiltonweg*.

Beispiel: Hamiltonkreis $P_H = (1, 3, 2, 6, 8, 4, 9, 7, 5, 1)$



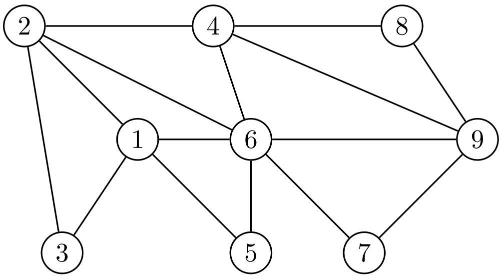
William Rowan Hamilton (4.8.1805–2.9.1865), irischer Mathematiker und Physiker

Eulertouren und Eulerwege

Eine *Eulertour* in G ist ein Zyklus, der alle Kanten von G genau einmal enthält.

Entfernt man aus einer Eulertour eine Kante, so erhält man einen *Eulerweg*.

Beispiel: Eulertour $P_E = (1, 5, 6, 7, 9, 4, 8, 9, 6, 2, 4, 6, 1, 2, 3, 1)$



Leonhard Euler (15.4.1707–7.9.1783), schweizer Mathematiker, Physiker, Astronom, Geograph, Logiker und Ingenieur

Grad von Knoten und Graphen

Es sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph. Ein Knoten $v \in V$ ist *inzident* zur Kante $e \in E$, wenn $v \in e$ gilt.

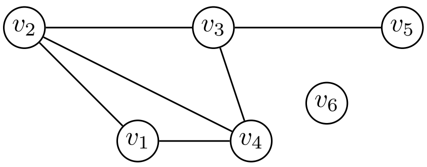
Der *Grad* $\deg(v)$ *eines Knotens* $v \in V$ ist die Anzahl der Kanten, die zu v inzident sind.

$$\deg(v) = \big|\{e\colon e \text{ ist inzident zu } v\}\big|$$

Der *Grad* $\deg(G)$ *des Graphen* G ist die Summe der Grade aller Knoten.

$$\deg(G) = \sum_{v \in V} \deg(v)$$

Beispiele



$\deg(v_1) = 2$	$\deg(v_2) = 3$	$\deg(v_3) = 3$
$\deg(v_4) = 3$	$\deg(v_5) = 1$	$\deg(v_6) = 0$
$\deg(G) = 12$		

Das Handschlaglemma

In einem ungerichteten Graphen $G = (V, E)$ gilt:

$$\deg(G) = \sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E|.$$

Beweis: Jede Kante vergrössert die Grade der beiden inzidenten Knoten jeweils um 1 und damit den Grad des Graphen um 2. Daher ist $\deg(G) = 2|E|$. □

Korrollar: *In einem ungerichteten Graphen G ist die Anzahl der Knoten mit ungeradem Grad gerade.*

Beweis: Wäre die Anzahl der Knoten mit ungeradem Grad ungerade, so wäre die Summe der Grade von Knoten mit ungeradem Grad auch ungerade. Da die Summe der Grade von Knoten mit geradem Grad gerade ist, folgt daraus, dass $\deg(G)$ ungerade ist, was im Widerspruch zum Handschlaglemma steht. Daher ist die Anzahl der Knoten mit ungeradem Grad gerade. □

Bemerkung

Der Name *Handschlaglemma* stammt daher, dass die Anzahl der Personen auf einer Feier, die einer ungeraden Zahl von Gästen die Hand geben, gerade ist.

Notwendige Bedingung für Eulertouren

Ist $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph und $P = (v_0, v_1, v_2, \ldots, v_m, v_0)$ eine Eulertour in G, so hat jeder Knoten $v \in V$ einen geraden Grad.

Beweis: Es sei $P = (v_0, v_1, v_2, \ldots, v_m, v_0)$ Eulertour in G.

- *Fall 1 ($v \neq v_0$):* Weil P ein Eulertour ist, gibt es eine Kante (x, v), die nach v führt und eine Kante (v, y) die von v wegführt. Somit erhöht sich $\deg(v)$ um 2 mit jedem Mal, bei dem der Knoten v durchlaufen wird. Also hat jeder Knoten $v \neq v_0$ einen geraden Grad.
- *Fall 2 ($v = v_0$):* Die Kanten (v_0, v_1) und (v_m, v_0) vergrössern den Grad von v_0 insgesamt um 2. Wird v im Innern des Pfades noch weitere Male durchlaufen, erhöht sich der Grad wie im Fall 1 jeweils um 2. Somit hat auch v_0 einen geraden Grad. □

Das Rückkehrlemma

Sei $G = (E, K)$ ein ungerichteter Graph, in dem jeder Knoten $v \in V$ einen geraden Grad hat. Dann gibt es für jeden Knoten $w \in V$ einen Kreis, der in w beginnt (und endet).

Beweis: Wir starten in w, gehen zu einem beliebigen Nachbarknoten x und löschen die Kante (w, x). Da nach Voraussetzung $\deg(x)$ gerade ist, gibt es mindestens eine Kante (x, y), über die ich x wieder verlassen kann. Wir gehen von x nach y und löschen die Kante (x, y). Nach dem Löschen der beiden Kanten hat der Knoten x immer noch einen geraden Grad, der auch null sein kann. Auf diese Weise fahren wir fort, indem wir über die noch existierenden Kanten weitere Knoten besuchen. Das es nur endlich viele Kanten gibt, gelangen wir so früher oder später zum Startknoten w, da auch dieser einen geraden Grad hat. □

Der Satz von Euler und Hierholzer

In einem Graphen $G = (V, E)$ gibt es genau dann eine Eulertour, wenn kein Knoten in G einen geraden Grad hat. Gibt es in G genau zwei Knoten mit ungeraden Grad, so existiert ein Eulerpfad.

Wir haben bereits oben bewiesen, dass in einem Graphen mit einer Eulertour alle Knoten einen geraden Grad haben müssen. Also müssen wir noch die Umkehrung beweisen, dass in einem Graphen, dessen Knoten alle geradzahlig sind, eine Eulertour existiert.

Der Beweis ist konstruktiv, d. h. er zeigt, wie eine Eulertour aufgebaut werden kann. Diese Beschreibung kann daher auch als Algorithmus (von Hierholzer) interpretiert werden.

Wir zeigen zuerst, wie man eine Eulertour bestimmt, wenn alle Knoten einen geraden Grad haben und führen dann den Fall für zwei Knoten mit ungeradem Grad darauf zurück.

Der Algorithmus von Hierholzer

Input: ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$ dessen Knoten alle geraden Grad haben.

(1) Wähle einen Knoten v_0 und setze $P = (v_0)$.

(2) Bestimme einen Zyklus P_0, der in v_0 beginnt und endet und markiere dabei jede durchlaufene Kante als *besucht*.

Ein solcher Zyklus existiert aufgrund des Rückkehrlemmas. Dabei kann man so vorgehen, dass als nächste Kante immer diejenige zum Nachbarn mit der kleinsten Nummer gewählt wird.

(3) Ersetze v_0 in P durch P_0 und nenne den neuen Pfad wieder P.

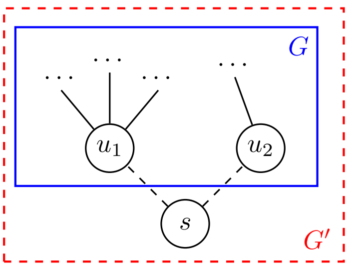
(4) Gibt es noch unbesuchte Kanten?

(a) *Ja:* Dann wähle den ersten Knoten v_0' von dem noch eine unbesuchte Kante abgeht. Setze $v_0 = v_0'$ und gehe zu (2).

(b) *Nein:* Dann ist P eine Eulertour. Gib P aus und beende den Algorithmus.

Bestimmung von Eulerpfaden

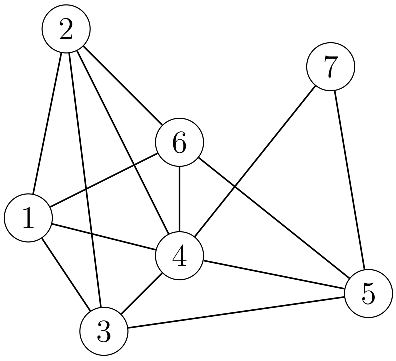
Wenn es genau zwei Knoten u_1, u_2 mit ungeradem Grad gibt, dann können wir die Knotenmenge V von G um einen Scheinknoten s und die Kantenmenge E von G um zwei Scheinkanten $\{s, u_1\}$, $\{s, u_2\}$ zu einem Graphen $G' = (V', E')$ erweitern.



Da nun auch die Knoten u_1 und u_2 einen geraden Grad haben, können wir in G' mit dem Algorithmus von Hierholzer eine Eulertour $P' = (s, u_1, \ldots, \ldots, u_2, s)$ finden. Danach entfernen wir den Startknoten s vom Anfang und dem Ende von P' und erhalten so einen Eulerpfad $P = (u_1, \ldots, u_2)$ in G.

Beispiel 1

Überprüfe, ob eine Eulertour oder ein Eulerpfad existiert. Falls ja, bestimme eine(n) mit dem Algorithmus von Hierholzer. Gibt es auch einen Hamiltonkreis? Wenn ja, gib einen an.



2-

3-

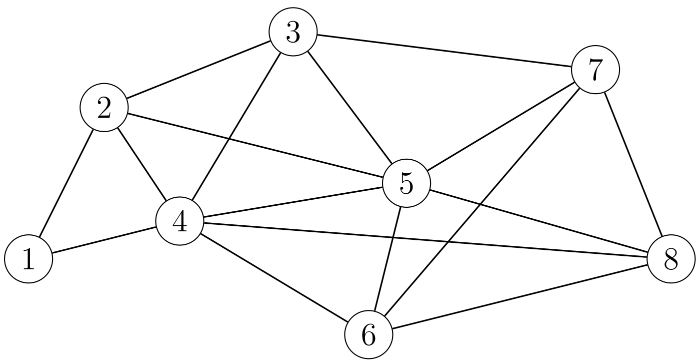
4-

5-

6-

Beispiel 2

Überprüfe, ob eine Eulertour oder ein Eulerpfad existiert. Falls ja, bestimme eine(n) mit dem Algorithmus von Hierholzer. Gibt es auch einen Hamiltonkreis? Wenn ja, gib einen an.



2-

3-

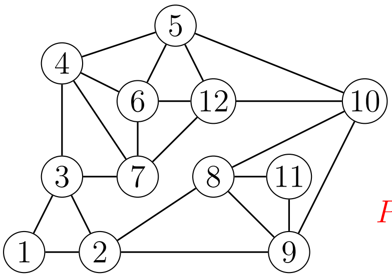
4-

5-

6-

Beispiel 3

Überprüfe, ob eine Eulertour oder ein Eulerpfad existiert. Falls ja, bestimme eine(n) mit dem Algorithmus von Hierholzer. Gibt es auch einen Hamiltonkreis? Wenn ja, gib einen an.



$P_H = (1, 3, 4, 5, 6, 7, 12, 10, 9, 11, 8, 2, 1)$

2-

3-

4-

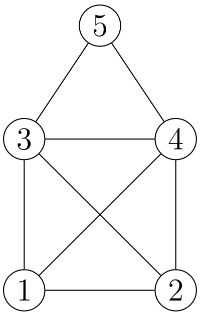
5-

6-

7-

Beispiel 4 (Das Haus des Nikolaus)

Überprüfe, ob eine Eulertour (Eulerpfad) existiert. Falls ja, bestimme eine (einen) mit dem Algorithmus von Hierholzer. Gibt es auch einen Hamiltonkreis? Wenn ja, gib einen an.



2-

8-

9-