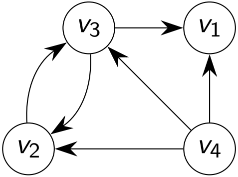
Graphentheorie (Kurzfassung)

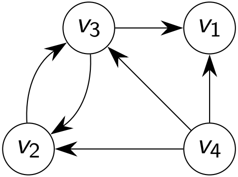
Übungen

Aufgabe 1

Stelle den folgenden gerichteten Graphen durch seine Knoten- und Kantenmenge dar.



Aufgabe 1



$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$$

$$E = \{(v_2, v_3), (v_3, v_1), (v_3, v_2), (v_4, v_1), (v_4, v_2), (v_4, v_3)\}$$

Aufgabe 2

Gegeben ist der Graph $G = (V, E)$ mit

- $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$
- $E = \{\{v_1, v_3\}, \{v_1, v_5\}, \{v_3, v_4\}, \{v_3, v_5\}, \{v_4, v_5\}\}$

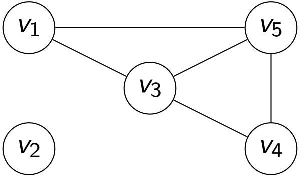
(a) Um welche Art von Graph handelt es sich?

(b) Stelle den Graphen möglichst überschneidungsfrei dar.

Aufgabe 2

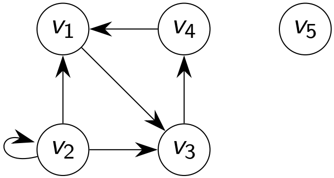
(a) um einen ungerichteten Graphen

(b) Graph:

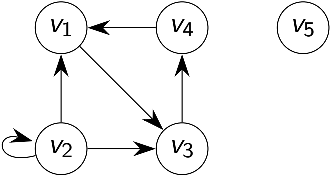


Aufgabe 3

Wie lautet die Adjazenz-Matrix des folgenden Graphen?



Aufgabe 3

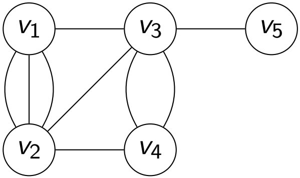


$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Zeilennummer:	Index des Herkunftsknotens
Spaltennummer:	Index des Zielknotens

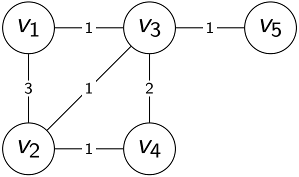
Aufgabe 4

Stelle den folgenden Multigraphen als Graph mit entsprechenden Kantengewichten dar.



Aufgabe 4

Alle Kanten zwischen zwei Ecken werden durch eine Kante mit dem Gewicht der ursprünglichen Anzahl Kanten ersetzt.



Aufgabe 5

Stelle den Graphen $G = (V, E)$ mit

- $V = \{a, b, c, d, e\}$ und
- $E = \{\{a, b\}, \{a, d\}, \{b, c\}\}$

durch Adjazenzlisten dar.

Aufgabe 5

Graph:

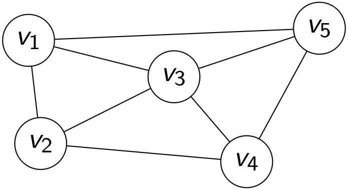
- $V = \{a, b, c, d, e\}$ und
- $E = \{\{a, b\}, \{a, d\}, \{b, c\}\}$

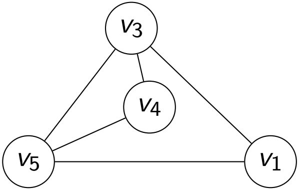
Adjazentlisten:
$$\begin{array}{lcl} a & \rightarrow & \{b, d\} \\ b & \rightarrow & \{a, c\} \\ c & \rightarrow & \{b\} \\ d & \rightarrow & \{a\} \\ e & \rightarrow & \{\,\} \end{array}$$

Beachte, dass in einem ungerichteten Graph die Nachbarschaftbeziehungen für Knoten symmetrisch sind: Wenn beispielsweise Knoten b ein Nachbar von Knoten a ist, dann ist auch Knoten b Nachbar von Knoten a. Dies gilt jedoch nicht in gerichteten Graphen.

Aufgabe 6

Ist der Graph rechts ein Teilgraph des linken Graphen?





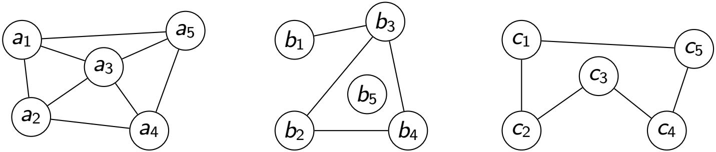
Aufgabe 6

Ja, denn mit $G = (V, E)$ gilt

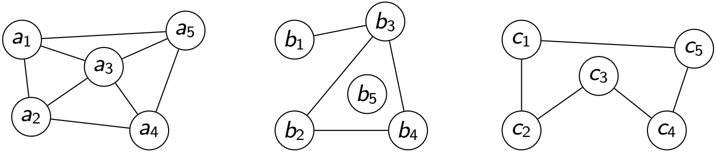
- $V' = \{e_1, e_3, e_4, e_5\} \subset V$
- $E' = \{\{e_1, e_3\}, \{e_1, e_5\}, \{e_3, e_4\}, \{e_3, e_5\}, \{e_4, e_5\}\} \subset E$

Aufgabe 7

Berechne jeweils den Grad des Graphen und vergleiche diesen Wert mit der Anzahl seiner Kanten. Was stellst du fest?

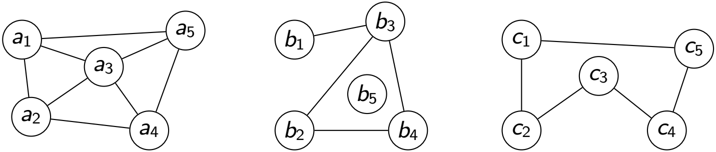


Aufgabe 7



$\mathrm{Deg}(G_a) = 3 + 3 + 3 + 4 + 3 = 16; \ |E| = 8$

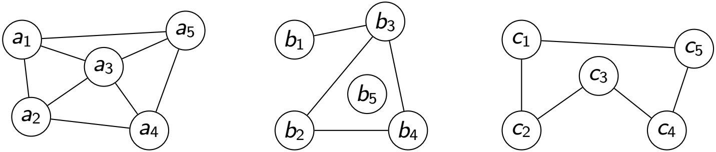
Aufgabe 7



$$\mathrm{Deg}(G_a) = 3+3+3+4+3 = 16;\ |E| = 8$$

$$\mathrm{Deg}(G_b) = 1+2+3+2+0 = 8;\ |E| = 4$$

Aufgabe 7

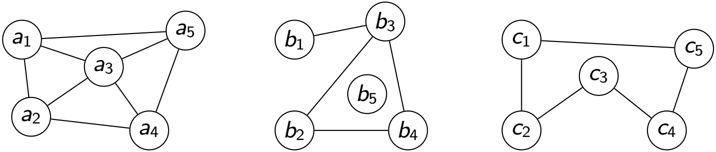


$\mathrm{Deg}(G_a) = 3 + 3 + 3 + 4 + 3 = 16; \; |E| = 8$

$\mathrm{Deg}(G_b) = 1 + 2 + 3 + 2 + 0 = 8; \; |E| = 4$

$\mathrm{Deg}(G) = 2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 10; \; |E| = 5$

Aufgabe 7



$\mathrm{Deg}(G_a) = 3 + 3 + 3 + 4 + 3 = 16;\ |E| = 8$

$\mathrm{Deg}(G_b) = 1 + 2 + 3 + 2 + 0 = 8;\ |E| = 4$

$\mathrm{Deg}(G) = 2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 10;\ |E| = 5$

Behauptung: $\deg(G) = 2|E|$

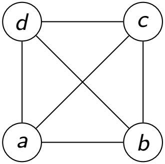
Beweis: Jede Kante ist adjazent zu genau zwei Knoten und wird so in der Summe aller Knotengrade doppelt gezählt.

Aufgabe 8

Zeichne einen vollständigen Graphen der Ordnung 4.

Aufgabe 8

Vollständiger Graph der Ordnung 4:



Aufgabe 9

Wie viele Kanten kann ein einfacher ungerichteter Graph mit 8 Knoten maximal haben?

Aufgabe 9

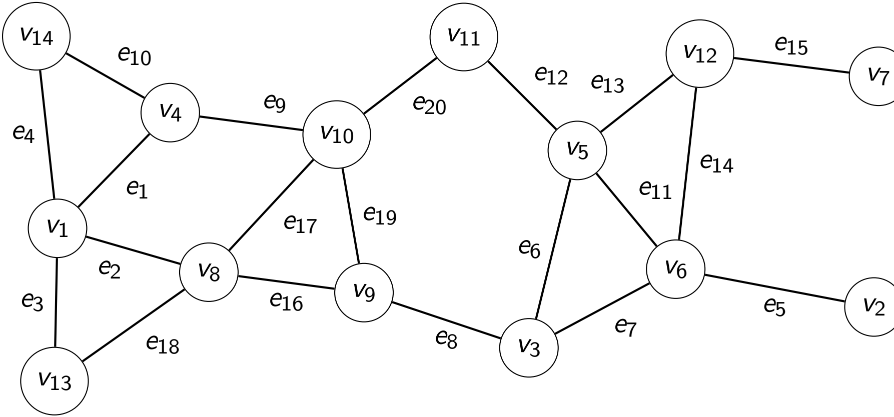
Ein Graph mit 8 Knoten kann maximal

$$\frac{8 \cdot 7}{2} = 28$$

Kanten haben. Grund: Jeder der 8 Knoten kann mit 7 anderen Knoten verbunden werden. Das ergibt $8 \cdot 7$ Kanten. Auf diese Weise zählt man aber jede Kante doppelt, weshalb man das Produkt noch durch 2 dividieren muss.

Aufgabe 10

Ist die Aussage zum abgebildten Graphen $G = (V, E)$ wahr oder falsch?



(a) v_8 und e_{17} sind inzident.

(b) e_5 und e_6 sind adjazent.

(c) v_5 und v_6 sind adjazent.

Aufgabe 10

(a) Wahr, denn e_{17} endet in v_8.
(b) Falsch, denn e_5 und e_6 enden nicht in einem gemeinsamen Knoten.
(c) Wahr, denn v_5 und v_6 sind durch die Kante e_{11} verbunden.
(d) Falsch, denn v_7 ist durch e_{15} mit v_{12} verbunden.
(e) Wahr (in einem Pfad dürfen Knoten oder Kanten auch mehrfach vorkommen)
(f) Falsch, denn bei einem Zyklus müssen Anfangs- und Endknoten übereinstimmen.
(g) Wahr, denn es handelt sich um einen Zyklus in dem, abgesehen vom Start- und vom Endknoten alle Knoten *verschieden* sind.
(h) Falsch, denn die Knoten v_{10} und v_5 sind nicht durch eine Kante verbunden.
(i) Wahr, denn es gibt keine Kante, die einen Knoten mit sich selbst verbindet.
(j) Wahr, denn zwischen zwei beliebigen (verschiedenen) Knoten gibt es einen Pfad, der diese miteinander verbindet.

Aufgabe 11

Gib an, wie viele Cliquen mit

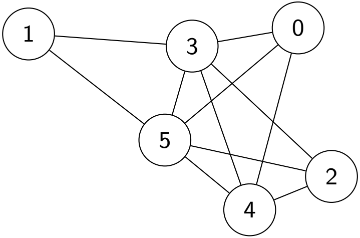
(a) 1 Knoten

(b) 2 Knoten

(c) 3 Knoten

(d) 4 Knoten

der folgende Graph enhält.

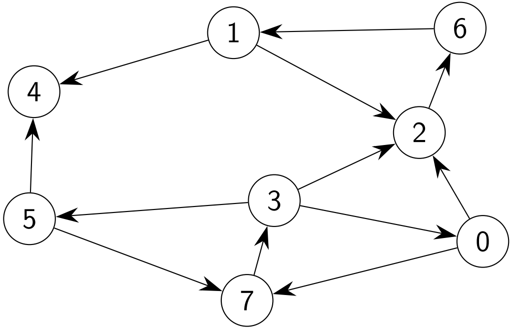


Aufgabe 11

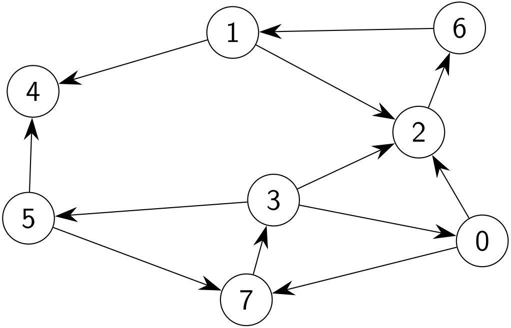
(a) Anzahl Cliquen mit 1 Knoten: 6
(b) Anzahl Cliquen mit 2 Knoten: 11
(c) Anzahl Cliquen mit 3 Knoten: 8
(d) Anzahl Cliquen mit 4 Knoten: 2

Aufgabe 12

Bestimme alle starken Zusammenhangskomponenten des Graphen. Beachte, dass jede starke Zusammenhangskomponenten maximal sein muss und jeder Knoten in genau einer Zusammenhangskomponente liegt.



Aufgabe 12



starke Zusammenhangskomponenten:

$V_1 = \{0, 7, 3, 5\}$

$V_2 = \{1, 2, 6\}$

$V_3 = \{4\}$

Aufgabe 13

Charakterisiere die Begriffe aus der Graphentheorie kurz und präzise mit den richtigen Fachausdrücken.

(a) Baum

(b) Wald

Aufgabe 13

(a) Ein Baum ist ein zusammenhängender azyklischer (ungerichteter) Graph

(b) Ein Wald ist ein Graph, dessen Zusammenhangskomponenten Bäume sind.