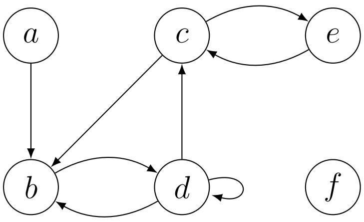
Gerichtete Graphen

Ein *gerichteter Graph* G ist ein Paar (V, E) mit

- einer endliche Menge von Knoten $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ und
- einer Menge (gerichteter) Kanten $E = \{(v_i, v_j) \mid v_i \in V,\ v_j \in V\}$.

Dabei ist (v_i, v_j) die Kante, die im Knoten v_i beginnt und im Knoten v_j endet.

Beispiel 1



$V = \{a, b, c, d, e, f\}$

$E = \{(a, b), (b, d), (c, b), (c, e), (d, b), (d, c), (d, e), (e, c)\}$

Bemerkungen:

(a) In der englischen Fachliteratur wird ein Knoten *vertex* (Plural: *vertices*) oder *node* und eine Kante *edge* genannt.

(b) Der Knoten f ist ein *isolierter Knoten*.

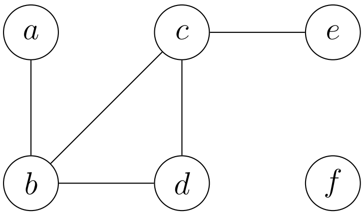
(c) Eine Kante, die wie (d, d) ein Knoten mit sich selbst verbindet, ist eine *Schlinge*.

Ungerichtete Graphen

Ein *ungerichteter Graph* G ist ein Paar (V, E) mit

- einer endliche Menge von Knoten $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ und
- einer Menge (ungerichteter) Kanten $E = \{\{v_i, v_j\} \mid v_i \in V,\ v_j \in V\}$.

Beispiel 2:



- $V = \{a, b, c, d, e, f\}$
- $E = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}, \{c, e\}\}$

Bemerkungen

(a) Im Gegensatz zur Schreibweise (v_i, v_j) bei gerichteten Graphen bedeutet die Mengenschreibweise $\{v_i, v_j\}$, dass man die Richtung der Kante nicht berücksichtigt, d.h. dass $\{v_i, v_j\} = \{v_j, v_i\}$ gilt.

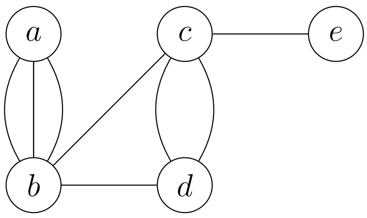
(c) Ein Knoten v_k und eine Kante (v_i, v_j) sind *inzident* (zusammenfallend), falls $v_k = v_i$ oder $v_k = v_j$ gilt; d.h. wenn v_k eine der beiden Knoten der Kante ist.

(d) Zwei Knoten v_i und v_j sind *adjazent* (benachbart), wenn (v_j, v_k) ein Element der Kantenmenge ist; d.h. wenn es eine Kante gibt, die die Knoten v_i und v_j verbindet.

Multigraphen

Ein Graph mit mehrere Kanten zwischen zwei benachbarten Knoten heisst *Multigraph.*

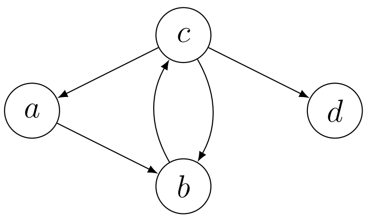
Beispiel 3 (Multigraph):



Darstellung von Graphen durch Matrizen

Ein Graph G kann auch durch eine *Adjazenz-Matrix* („*Nachbarschafts-Matrix*“) M_G dargestellt werden. Hat ein Graph n Knoten, so ist die Adjazenz-Matrix eine Zahlentabelle mit n Zeilen und n Spalten. Wenn eine (gerichtete) Kante vom i-ten zum j-ten Knoten verläuft, dann wird in der i-ten Zeile und der j-ten Spalte der Matrix die Zahl 1 gesetzt. Sonst eine 0.

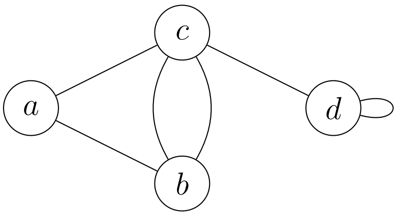
Beispiel 4:



	a	b	c	d
a	0	1	0	0
b	0	0	1	0
c	1	1	0	1
d	0	0	0	0

Sind in einem ungerichteten Graphen G der i-te und der j-te Knoten verbunden, so wird sowohl in der i-ten Zeile und der j-ten Spalte als auch in der j-ten Zeile und der i-ten Spalte eine 1 gesetzt.

Beispiel 5:



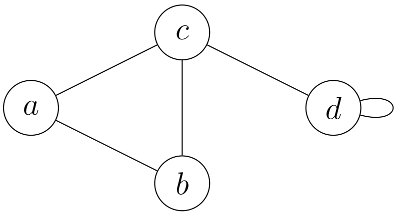
	a	b	c	d
a	0	1	1	0
b	1	0	1	0
c	1	1	0	1
d	0	0	1	1

Adjazenzmatrizen sind einfach in der Anwendung und benötigen Speicherplatz, der proportional zu $|V|^2$; unabhängig davon, wie viele Kanten der Graph hat.

Darstellung von Graphen durch Adjazenzlisten

Hat ein Graph wenig Kanten im Verhältnis zu seiner Knotenzahl (*sparse graph*), dann sind *Adjazenzlisten*, eine gute Alternative. Sie ordnen jedem Knoten eine Liste oder eine Hashtabelle mit den adjazenten Knoten zu und benötigen Speicherplatz der proportional zu $|E| + |V|$ ist.

Beispiel 6:

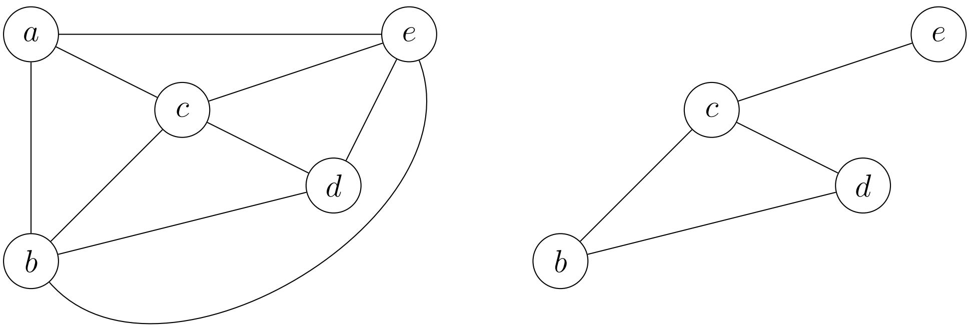


$$
\begin{array}{lll}
a & \to & [b, c] \\
b & \to & [a, c] \\
c & \to & [a, b, c] \\
d & \to & [c, d]
\end{array}
$$

Teilgraphen

Ein Graph $G' = (V', E')$ ist *Teilgraph* von $G = (V, E)$, wenn gilt: $V' \subset V$ und $E \subset E'$.

Beispiel 7: Der Graph rechts ist ein Teilgraph des linken Graphen

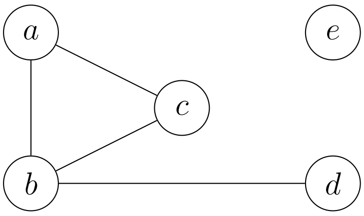


Grade von Knoten und Graphen

Es sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph.

- Der *Grad des Knotens* $u \in V$ ist die Anzahl der Kanten, die mit u inzidieren. Abkürzung: $\deg(u)$
- Der *Grad des Graphen* G ist die Summe der Grade aller Knoten von G. Abkürzung: $\deg(G)$

Beispiel 8:



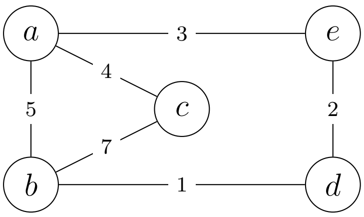
$$\deg(b) = 3$$
$$\deg(e) = 0$$
$$\deg(G) = 2 + 3 + 1 + 2 + 0 = 8$$

Bemerkung: Bei gerichteten Graphen unterschiedet man den Eingangsgrad ($\deg^-$) und den Ausgangsgrad ($\deg^+$) eines Knotens.

Kantengewichte

Ein *Graph mit Kantengewichten* ist ein Graph, bei dem jeder Kante eine reelle Zahl (*das Gewicht*) zugeordnet wird.

Beispiel 9: ein Graph mit Kantengewichten



Bemerkungen

(a) Die Kantengewichte müssen nicht zwingend mit den (geometrischen) Längen der Kanten in der graphischen Darstellung übereinstimmen.

(b) Ein Graph kann ein Strassennetz darstellen, bei dem die Strassen durch Kanten und die Kreuzungen (oder Ortschaften) durch Knoten modelliert werden. In diesem Fall lassen sich beispielsweise Entfernungen, Fahrzeiten oder Fahrkosten durch die Kantengewichte ausdrücken.

(c) Kantengwichte können auch negativ sein. Beispielsweise um Verzögerungen oder Verluste darzustellen.

(c) Bei gerichteten Graphen können die Kanten (v_i, v_j) und (v_j, v_i) auch unterschiedliche Gewichte haben.

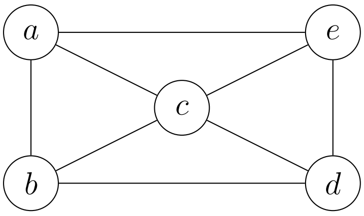
(d) Bei einem Multigraph (siehe oben) können Mehrfachkanten zwischen zwei Knoten zusammengefasst und durch ein entsprechendes Kantengewicht dargestellt werden.

Pfade, Wege und Zyklen

Ein *Pfad* der Länge k von Knoten u zum Knoten u' in einem Graphen $G = (V, E)$ ist eine Folge von Knoten ν_0, ν_1, $\ldots$, ν_k mit $u = \nu_0$ und $u' = \nu_k$ und $(\nu_{i-1}, \nu_i) \in E$ für alle $i = 1, 2, \ldots, k$. Wenn es einen Pfad p vom Knoten u zum Knoten u' gibt, sagt man, u' sei von u aus *erreichbar* ($u \rightsquigarrow u'$). Ein Pfad heisst *einfach* (oder *Weg*), wenn alle darin vorkommenden Knoten paarweise verschieden sind.

Ein Pfad ν_0, ν_1, $\ldots$, ν_k in einem gerichteten Graphen mit mindestens einer Kante heisst *Zyklus*, wenn $\nu_0 = \nu_k$ gilt. Der Zyklus heisst *einfach* (oder *Kreis*), wenn darüber hinaus ν_1, $\ldots$, ν_k paarweise verschieden sind. Ein Graph ohne Zyklen wird *azyklisch* genannt.

Beispiel 10:

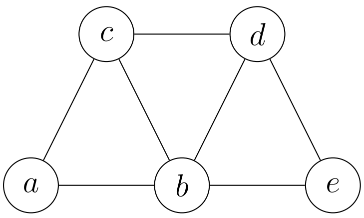


- (a, c, b, d) ist ein einfacher Pfad der Länge 4.
- (a, c, d, e, c, b, a) ist ein Zyklus aber kein Kreis (da c doppelt vorkommt).

Spezielle Pfade

- Ein *Eulerscher Weg* ist ein Weg, der jede Kante von G genau einmal enthält.
- Ein *Eulerscher Kreis* ist ein Zyklus, der jede Kante von G genau einmal enthält.
- Ein *Hamiltonscher Weg* ist ein Weg, der jeden Knoten von G genau einmal enthält.
- Ein *Hamiltonscher Kreis* ist ein einfacher Zyklus, der ausser dem Startpunkt jeder Knoten von G genau einmal enthält.

Beispiel 11:

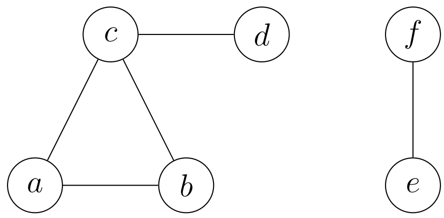


- Der Graph enthält keinen Eulerschen Weg und somit auch keinen Eulerschen Kreis.
- (a, b, c, d, e) ist ein Hamiltonscher Weg.
- (a, b, e, d, c) ist ein Hamiltonscher Kreis.

Zusammenhang

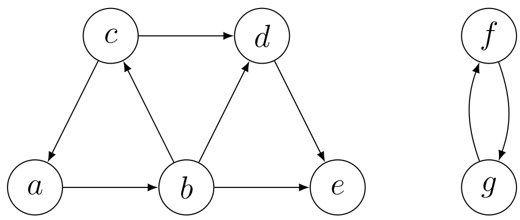
Ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$ heisst *zusammenhängend*, wenn jeder Knoten von jedem anderen Knoten aus erreichbar ist. Die zusammenhängenden Teilgraphen werden *Zusammenhangskomponenten* genannt. Eine Zusammenhangskomponente, die nur aus einem Knoten besteht, wird *isolierter Knoten* genannt.

Beispiel 11: ein Graph mit zwei Zusammenhangskomponenten



Ein gerichteter Graph $G = (V, E)$ heisst *stark zusammenhängend*, wenn jeder Knoten von jedem anderen Knoten aus erreichbar ist. Die maximal zusammenhängenden Teilgraphen werden *starke Zusammenhangskomponenten* genannt.

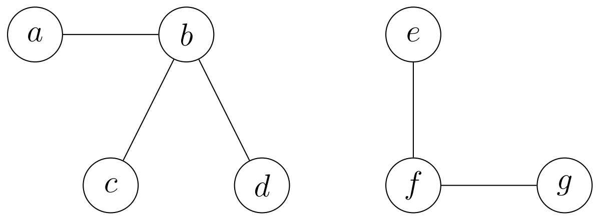
Beispiel 12: ein gerichteter Graph mit zwei starken Zusammenhangskomponenten



Bäume und Wälder

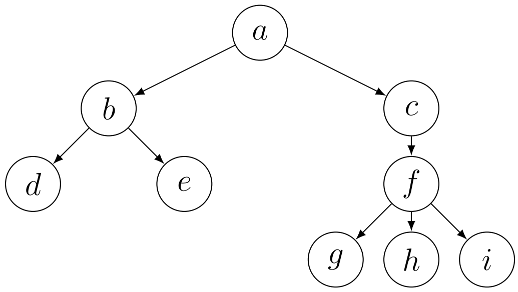
Ein *Baum* ist ein zusammenhängender azyklischer Graph. Ein *Wald* ist ein Graph, dessen Zusammenhangskomponenten Bäume sind.

Beispiel 13: ein Wald, bestehend aus zwei Bäumen



Ein *gewurzelter Baum* ist ein gerichteter azyklischer Graph, in dem es einen Knoten w gibt, von dem aus alle anderen Knoten des Graphen erreicht werden können. Der spezielle Knoten w wird *Wurzel* des Baums genannt. Die Knoten mit Ausgangsgrad 0 heissen *Blätter*; die Knoten mit mit positivem Ausgangsgrad heissen *innere Knoten.*

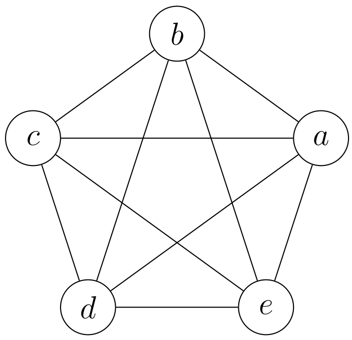
Beispiel 14: Ein gewurzelter Baum mit der Wurzel a



Vollständige Graphen

Ein *vollständiger Graph* ist ein Graph, in dem alle möglichen Knotenpaare durch eine Kante verbunden sind. Ein vollständiger Graph mit $|V| = n$ Knoten hat $|E| = n(n-1)/2$ Kanten.

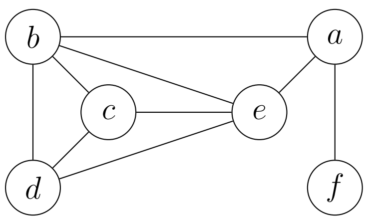
Beispiel 15: ein Vollständiger Graph der Ordnung 5



Cliquen

Eine *Clique* ist ein vollständiger Teilgraph G' eines Graphen G.

Beispiel 16: der abgebildete Graph enthält

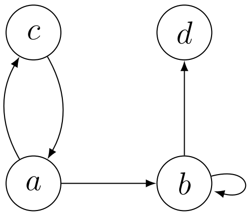


- 6 Cliquen der Ordnung 1
- 9 Cliquen der Ordnung 2
- 5 Cliquen der Ordnung 3
- eine Clique der Ordnung 4: (b, c, d, e)

Darstellung von Graphen in Python

Graphen ohne Mehrfachkanten können in Python durch ein Dictionary of Sets dargestellt werden.

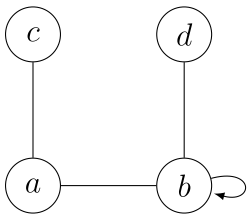
Beispiel 17:




```python
G = {
    'a': {'b', 'c'},
    'b': {'b', 'd'},
    'c': {'a'},
    'd': { }
}
```

Bei ungerichteten Graphen kommt jede Kante, die keine Schlaufe ist, doppelt vor.

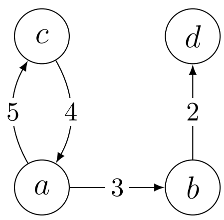
Beispiel 18:




```python
G = {
    'a': {'b', 'c'},
    'b': {'a', 'b', 'd'},
    'c': {'a'},
    'd': {'b'}
}
```

Graphen mit Kantengewichten lassen sich mit einem Dictionary of Dictionaries realisieren.

Beispiel 19:




```python
G = {
    'a': {'b': 3, 'c': 5},
    'b': {'d': 2},
    'c': {'a': 4},
    'd': { }
}
```