Binärdarstellung von Zahlen

Lösungen+

Prüfungsvorbereitung

Aufgabe 1.1

(a)
$$2^9 = 512$$

(c)
$$2^6 = 64$$

(e)
$$2^3 = 8$$

(b)
$$2^{10} = 1024$$

(d)
$$2^0 = 1$$

(f)
$$2^5 = 32$$

Aufgabe 1.2

(a)
$$\log_2 512 = 9$$

(d)
$$\log_2 64 = 6$$

(b)
$$\log_2 1024 = 10$$

(e)
$$\log_2 256 = 8$$

(c)
$$\log_2 32 = 5$$

(f)
$$\log_2 128 = 7$$

Aufgabe 1.3

(a)
$$|46.508| = 46$$

(d)
$$[-59] = -59$$

(b)
$$\lfloor 14 \rfloor = 14$$

(e)
$$\left\lfloor \frac{7}{3} \right\rfloor = \left\lfloor 2\frac{1}{3} = 2 \right\rfloor$$

(c)
$$[-87.112] = -87$$

(f)
$$\lceil \sqrt{23} \rceil < \lceil \sqrt{25} \rceil = 5$$

Aufgabe 1.4

(a)
$$17 \mod 3 = 2$$

(d)
$$8775 \mod 100 = 75$$

(b)
$$36 \mod 4 = 0$$

(e)
$$1234 \mod 2 = 0$$

(c)
$$907 \mod 2 = 1$$

(f)
$$7 \mod 31 = 7$$

Aufgabe 1.5

$$\Sigma = \{a,b,c\}$$

$$L = \{aa, ab, ac, ba, bb, bc, ca, cb, cc\}$$

Aufgabe 1.6

$$\Sigma = \{0, 1\}$$

Alle Zeichen der Länge 2: 00, 01, 10, 11

Alle Zeichen der Länge 1: 0, 1

Alle Zeichen der Länge 0: ε (das leere Wort)

$$L = \{\varepsilon, 0, 1, 00, 01, 10, 11\}$$

Aufgabe 1.7

$$\Sigma = \{0, 1\}$$

(a) Alle Wörter der Länge 3 mit Zeichen aus Σ :

(b) Anzahl der Wörter der Länge 5 mit Zeichen aus Σ :

$$2^5 = 32$$

Aufgabe 1.8

Ein Code ist eine Abbildung (Synonym: Funktion), die jedem Wort w einer Sprache L_1 umkehrbar eindeutig ein Wort v einer Sprache L_2 zuordnet.

Aufgabe 1.9

Aufgabe 1.10

- Unicode: Ordnet jedem Schriftzeichen dieser Welt eindeutig eine Nummer zu.
- IATA-Flughafen-Code: Ordnet einem Flughafen einen Code aus drei Buchstaben zu. Beispiele:

Flughafen	IATA-Code
Buochs	BXO
Zürich	ZRH

• Morsecode: Ordnet bestimmten Buchstaben, Ziffern und Satzzeichen eine Folge aus Punkten und Strichen (kurzen und langen Symbolen) zu.

Binärdarstellung von Zahlen (Kapitel 2) Lösungen+ Prüfungsvorbereitung

Aufgabe 2.1

(a) 3 Bits \Rightarrow 8 Zustände

(d) 8 Bits \Rightarrow 256 Zustände

(b) 2 Bits \Rightarrow 4 Zustände

(e) 6 Bits \Rightarrow 64 Zustände

(c) 5 Bits \Rightarrow 32 Zustände

(f) 7 Bits \Rightarrow 128 Zustände

Aufgabe 2.2

(a) Die 60 Minuten einer Stunde

$$\Rightarrow \lceil \log_2 60 \rceil = \log_2 64 = 6$$
 Bit

(b) Die sieben Zwerge

$$\Rightarrow \lceil \log_2 7 \rceil = \log_2 8 = 3$$
 Bit

(c) Das Ergebnis eines Münzwurfs (Kopf oder Zahl)

$$\Rightarrow \lceil \log_2 2 \rceil = \log_2 2 = 1$$
 Bit

(d) Die 460 Kollegischüler

$$\Rightarrow \lceil \log_2 460 \rceil = \log_2 512 = 9$$
 Bit

(e) Die 84 Millionen Einwohner Deutschlands:

Wir ersetzen 10^3 näherungsweise durch 2^{10} und machen die Zahl etwas grösser, um sie als Zweierpotenz darstellen zu können.

$$84 \cdot 10^6 = 84 \cdot (10^3)^2 \approx 84 \cdot (2^{10})^2 = 84 \cdot 2^{20} < 128 \cdot 2^{20} = 2^7 \cdot 2^{20} = 2^{27}$$

Somit benötigen wir mindestens 27 Bit, um jedem Einwohner Deutschlands eine Nummer zuzuordnen.

Aufgabe 2.3

(a) $1 \text{ KB} = 1 \text{ Kilobyte} = 10^3 \text{ Byte}$

(b) $1 \text{ GB} = 1 \text{ Gigabyte} = 10^9 \text{ Byte}$

(c) 1 TB = 1 Terabyte = 10^{12} Byte

(d) $1 \text{ PB} = 1 \text{ Petabyte} = 10^{15} \text{ Byte}$

Aufgabe 2.4

(a) 1 KiB = 1 Kilobinary byte = 2^{10} Byte

(b) $1 \text{ GiB} = 1 \text{ Gigabinary byte} = 2^{30} \text{ Byte}$

(c) 1 TiB = 1 Terabinary byte = 2^{40} Byte

(d) 1 MiB = 1 Megabinary byte = 2^{20} Byte

Aufgabe 2.5

$$\begin{split} \text{Anzahl Songs} &= \frac{64\,\text{GByte}}{5\,\text{MByte/Song}} = \frac{64 \cdot 10^9\,\text{Byte}}{5 \cdot 10^6\,\text{Byte/Song}} \\ &= \frac{64\,000}{5}\,\text{Songs} \approx \frac{65\,000}{5}\,\text{Songs} \approx 13\,000\,\text{Songs} \end{split}$$

Aufgabe 2.6

$$t = \frac{\text{Datenmenge}}{\text{Übertragungsrate}} = \frac{1\,\text{GByte}}{100\,\text{MBit/s}} = \frac{10^9\,\text{Byte}}{100\cdot 10^6\,\text{Bit/s}} = \frac{10^9\cdot 8\,\text{Bit}}{10^8\,\text{Bit/s}} = 80\,\text{s}$$

oder etwas kürzer:

$$t = \frac{1\,\mathrm{GByte}}{100\,\mathrm{MBit/s}} = \frac{1000\,\mathrm{MByte}}{100\,\mathrm{MBit/s}} = \frac{8000\,\mathrm{MBit}}{100\,\mathrm{MBit/s}} = \frac{80}{1/\mathrm{s}} = 80\,\mathrm{s}$$

Aufgabe 2.7

$$\begin{split} \ddot{U}bertragungsrate &= \frac{Datenmenge}{Dauer} \\ Datenmenge &= \ddot{U}bertragungsrate \cdot Dauer \\ &= 32 \, \frac{MBit}{s} \cdot 10 \, Minuten \quad \ \ (\text{8 Bit} = 1 \text{Byte}, \, 1 \, \text{Minute} = 60 \, \text{Sekunden}) \\ &= 4 \, \frac{MByte}{s} \cdot 600 \, \text{s} = 2400 \, MByte = 2.4 \, GByte \end{split}$$

Aufgabe 3.1

$$1010001_2 = 1 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^0 = 64 + 16 + 1 = 81$$

Aufgabe 3.2

$$142_7 = 1 \cdot 7^2 + 4 \cdot 7^1 + 2 \cdot 7^0 = 49 + 28 + 2 = 79$$

Aufgabe 3.3

$$77_{11} = 7 \cdot 11^1 + 7 \cdot 11^0 = 77 + 7 = 84$$

Aufgabe 3.4

$$B8_{16} = 11 \cdot 16^1 + 8 \cdot 16^0 = 176 + 8 = 184$$

Aufgabe 3.5

 $54 : 2 = 27 \text{ Rest } 0 \Rightarrow 54_{10} = 110110_2$

27 : 2 = 13 Rest 113 : 2 = 6 Rest 1

6 : 2 = 3 Rest 0 3 : 2 = 1 Rest 11 : 2 = 0 Rest 1

Aufgabe 3.6

86 : 5 = 17 Rest 1 \Rightarrow 86₁₀ = 321₅

17 : 5 = 3 Rest 23 : 5 = 0 Rest 3

Aufgabe 3.7

202 : 16 = 12 Rest A \Rightarrow 202₁₀ = CA₁₆

12 : 16 = 0 Rest C

Aufgabe 3.8

0	0	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1
	4	2			Ι	3		F			

Aufgabe 3.9

	7	7		С				1				
0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	1	

grösste positive Zahl: $2^{5-1} - 1 = 15$ kleinste negative Zahl: $-2^{5-1} = -16$

Aufgabe 4.2

grösste positive Zahl: $2^{7-1} - 1 = 63$ kleinste negative Zahl: $-2^{7-1} = -64$

Aufgabe 4.3

Aufgabe 4.4

Aufgabe 4.5

Aufgabe 4.6

	0	0	0	1	0	0	0	0	(n)
	1	1	1	0	1	1	1	1	(-n-1)
+	0	0	0	0	0	0	0	1	(1)
=	1	1	1	1	0	0	0	0	(-n)

Aufgabe 4.8

Aufgabe 4.9

Aufgabe 4.10

Aufgabe 4.11

Zweierkomplement von 28:

Zweierkomplement von 46:

Aufgabe 4.13

Das Resultat ist negativ.

Aufgabe 4.14

Das Resultat ist ungültig.

Aufgabe 4.15

Das Resultat ist positiv.

Aufgabe 4.16

Das Resultat ist ungültig.

 $00000100 \cdot 00010001 = 01000100$

Aufgabe 4.18

00110000:00001000 = 00000110

Aufgabe 4.19

Aufgabe 4.20

Aufgabe 5.1

0.031250.06250 2 0.06250 0.1252 0.1250 0.250.25 0 0.52 . 0.50

 $0.03125 = 0.00001_2$

Die Binärziffern werden von oben nach unten abgelesen.

Aufgabe 5.2

2 0.40 0.8 2 0.8 1 0.62 0.6 1 0.22 0.20.40 2 . 0.40 0.82 0.80.62 0.61 +0.22 . 0.20 0.4 $2 \cdot \dots$ =

 $0.4 = 0.01100110 \dots_2 = 0.\overline{0110}_2$

Aufgabe 5.3

30.75

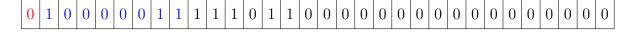
Vorzeichen: S = 0

Binärdarstellung: $30.75 = 16 + 8 + 4 + 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 11110.11_2$

Normalform: (1.)111011₂ · 2^4

Exponent: $E = 4 + 127 = 131 = 128 + 2 + 1 = 10000011_2$

Mantisse: M = 111011 (die führende 1 wird nicht gespeichert)



Aufgabe 5.4

-75

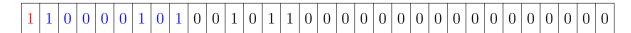
Vorzeichen: S=1

Binärdarstellung: 75 = 64 + 8 + 2 + 1 = 1001011

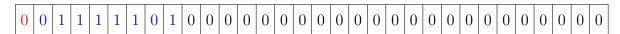
Normalform: $(1.)001011 \cdot 2^6$

Exponent: E = 6 + 127 = 133 = 128 + 4 + 1 = 10000101

Mantisse: M = 001011 (die führende 1 wird nicht gespeichert)



Aufgabe 5.5



Vorzeichen: S = 0

$$s = (-1)^S = +1$$

Exponent: $E = 011111101_2 = 64 + 32 + 16 + 8 + 4 + 1 = 125$

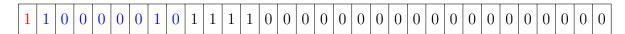
$$e = 125 - 127 = -2$$

Mantisse: M = 0

 $m = 1.0_2$

Normalform: $s \cdot m \cdot 2^e = 1.0_2 \cdot 2^{-2} = 0.01_2 = 0.25$

Aufgabe 5.6



Vorzeichen: S = 1

$$s = (-1)^S = -1$$

Exponent: $E = 100000010_2 = 128 + 2 = 130$

$$e = 130 - 127 = 3$$

Mantisse: M = 1111

$$m = 1.1111_2$$

Normalform: $s \cdot m \cdot 2^e = -1.1111_2 \cdot 2^3 = -1111.1_2 = -15.5$

Aufgabe 5.7

- (c) 0|11111111|0000000000000000000000 NaN

Aufgabe 5.8



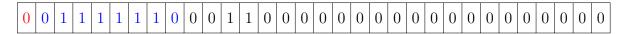
Multiplikation mit $8 = 2^3$ bedeutet, dass zum Exponenten $3 = 11_2$ addiert werden muss. Das Vorzeichen und die Mantisse bleiben unverändert.

00010110 alter Exponent

- + 00000011
- = 00011001 neuer Exponent



Aufgabe 5.9



Division durch $-2=-2^1$ bedeutet, dass vom Exponenten $1=1_2$ subtrahiert und das Vorzeichen geändert werden muss. Die Mantisse bleibt unverändert.

01111110 alter Exponent

- 00000001 -1
- = 01111101 neuer Exponent



Aufgabe 5.10

a < 0 und c < 0 sind beide kleiner als b > 0 und d > 0.

Da der Exponent von c < 0 grösser als der von a < 0 ist, muss c < a gelten. Die normalisierte Mantisse hat darauf keinen Einfluss.

 $c = -1.010_2 \cdot 2^{00110000_2 + 127}$

 $a = -1.001_2 \cdot 2^{00100000_2 + 127}$

Bei b>0 und d>0 sind die Exponenten gleich, weshalb b mit der grösseren Mantisse auch grösser als d ist.

 $d = 1.0001_2 \cdot 2^{00111000_2 + 127}$

 $b = 1.0100_2 \cdot 2^{00111000_2 + 127}$

Insgesamt: c < a < d < b