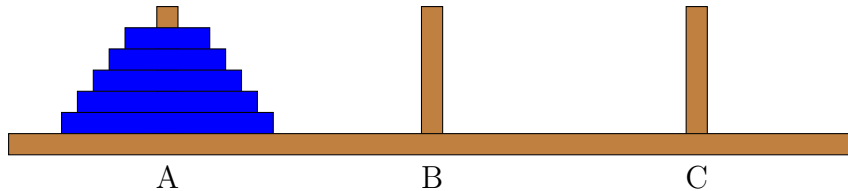


Die Türme von Hanoi

Worum geht es?

Die *Türme von Hanoi* ist ein Knobelspiel, das 1883 vom französischen Mathematiker Édouard Lucas erfunden wurde.

Das Spiel besteht aus einer Platte mit drei senkrecht darauf angebrachten Stäben auf die gelochte Scheiben mit unterschiedlichen Radien gesteckt werden können.



Zu Beginn liegen alle Scheiben auf dem linken Stab, der Grösse nach geordnet, mit der grössten Scheibe unten (siehe Bild oben).

Ziel des Spiels ist es, den kompletten Scheiben-Stapel von Stab A unter Zuhilfenahme von Stab B auf Stab C zu versetzen. Hierbei gelten zwei Regeln:

- Es darf immer nur eine Scheibe auf einmal bewegt werden.
- Keine Scheibe darf auf einer kleineren liegen.

Hintergrund

Die Türme von Hanoi haben eigentlich nur wenig mit der heutigen Stadt Hanoi in Vietnam zu tun. Die früheste bekannte Erwähnung stammt von Édouard Lucas (in *Récréations Mathématiques*, Band 3, S. 55–59, Gauthier-Villars, Paris, 1893), der berichtet, dass es im Tempel von Kashi Vishwanath in Varanasi, Uttar Pradesh, Indien, einen Satz von 64 Goldscheiben auf 3 Diamantnadeln gibt, der als Turm von Brahma bezeichnet wird und den Mönche seit Anbeginn der Zeit zu lösen versuchen. Angeblich wird das Universum untergehen, wenn es ihnen gelingt, die 64 Scheiben von der Startnadel zur Endnadel zu bewegen, ohne dabei gegen eine der oben genannten Regeln zu verstossen.

Rekursive Lösung

Um die unterste Scheibe bewegen zu können, müssen wir (a) zuerst alle darüber liegenden $n - 1$ kleineren Scheiben auf den Stapel B verfrachten. Danach können wir (b) die unterste Scheibe auf den Stab C setzen. Zum Schluss (c) bringen wir die $n - 1$ Scheiben von Stab B nach Stab C, indem wir die in (a) ausgeführten Schritte in umgekehrter Reihenfolge ausführen.

Bezeichnen wir mit T_n die noch unbekannte minimale Anzahl der Schritte, um n Scheiben von einem zu einem anderen Stab zu transportieren, so ergibt sich aus der obigen Beschreibung die Beziehung:

$$T_n = T_{n-1} + 1 + T_{n-1} = 2T_{n-1} + 1 \text{ mit } n \geq 1. \quad (1)$$

