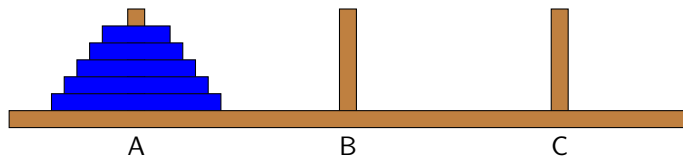


# Die Türme von Hanoi

# Worum geht es?

Die *Türme von Hanoi* ist ein Knobel­spiel, das 1883 vom fran­zösi­schen Mathematiker Édouard Lucas erfunden wurde.

Das Spiel besteht aus einer Platte mit drei senkrecht darauf angebrachten Stäben auf die gelochte Scheiben mit unterschiedlichen Radien gesteckt werden können.



Zu Beginn liegen alle Scheiben auf dem linken Stab, der Größe nach geordnet, mit der grössten Scheibe unten (siehe Bild oben).

Ziel des Spiels ist es, den kompletten Scheiben-Stapel von Stab A unter Zuhilfenahme von Stab B auf Stab C zu versetzen. Hierbei gelten zwei Regeln:

- ▶ Es darf immer nur eine Scheibe auf einmal bewegt werden.
- ▶ Keine Scheibe darf auf einer kleineren liegen.

# Hintergrund

Die Türme von Hanoi haben eigentlich nur wenig mit der heutigen Stadt Hanoi in Vietnam zu tun. Die früheste bekannte Erwähnung stammt von Édouard Lucas (in *Récréations Mathématiques*, Band 3, S. 55–59, Gauthier-Villars, Paris, 1893), der berichtet, dass es im Tempel von Kashi Vishwanath in Varanasi, Uttar Pradesh, Indien, einen Satz von 64 Goldscheiben auf 3 Diamantnadeln gibt, der als Turm von Brahma bezeichnet wird und den Mönche seit Anbeginn der Zeit zu lösen versuchen. Angeblich wird das Universum untergehen, wenn es ihnen gelingt, die 64 Scheiben von der Startnadel zur Endnadel zu bewegen, ohne dabei gegen eine der oben genannten Regeln zu verstossen.

## Rekursive Lösung

Um die unterste Scheibe bewegen zu können, müssen wir (a) zuerst alle darüber liegenden  $n - 1$  kleineren Scheiben auf den Stapel B verfrachten. Danach können wir (b) die unterste Scheibe auf den Stab C setzen. Zum Schluss (c) bringen wir die  $n - 1$  Scheiben von Stab B nach Stab C, indem wir die in (a) ausgeführten Schritte in umgekehrter Reihenfolge ausführen.

Bezeichnen wir mit  $T_n$  die noch unbekannte minimale Anzahl der Schritte, um  $n$  Scheiben von einem zu einem anderen Stab zu transportieren, so ergibt sich aus der obigen Beschreibung die Beziehung:

$$T_n = T_{n-1} + 1 + T_{n-1} = 2T_{n-1} + 1 \text{ mit } n \geq 1. \quad (1)$$

## Aufwandbetrachtungen

Besteht der Stapel nur aus einer Scheibe, so benötigt man genau einen Schritt, um diese von A nach C zu bringen. Somit gilt  $T_1 = 1$  und wir können mit Hilfe der rekursiven Formel (1) für  $n > 2$  den Aufwand tabellieren.

Anzahl Scheiben $n$	Anzahl Schritte $T_n$
1	1
2	3
3	7
4	15
5	31
6	63

Aus den Resultaten der Tabelle können wir eine Vermutung für eine explizite Formel für  $T_n$  aufstellen.

# Rekursive Lösung mit Programm

```
def move(n, a, b, c):  
    if n > 0:  
        move(n-1, a, c, b)  
        print(f'{a} -> {b}')  
        move(n-1, b, a, c)
```

# Iterative Lösung

Aus dem Jahr 1980 stammt ein iterativer Algorithmus von Peter Buneman und Leon Levy, der die gleiche Zugfolge wie der oben beschriebene Python-Code generiert. Dabei wird, in jedem zweiten Schritt die kleinste Scheibe ( $S_1$ ) um eine Position im Uhrzeigersinn (A, B, C, A, B, C, ...) transportiert, falls die Anzahl Scheiben gerade ist und sonst im Gegenuhrzeigersinn.

**solange** auf A und B Scheiben liegen:

    Verschiebe  $S_1$  wie oben beschrieben um eine Position

**falls** eine von  $S_1$  verschiedene Scheibe verschiebbar ist:

        Verschiebe diese Scheibe gemäss den Regeln