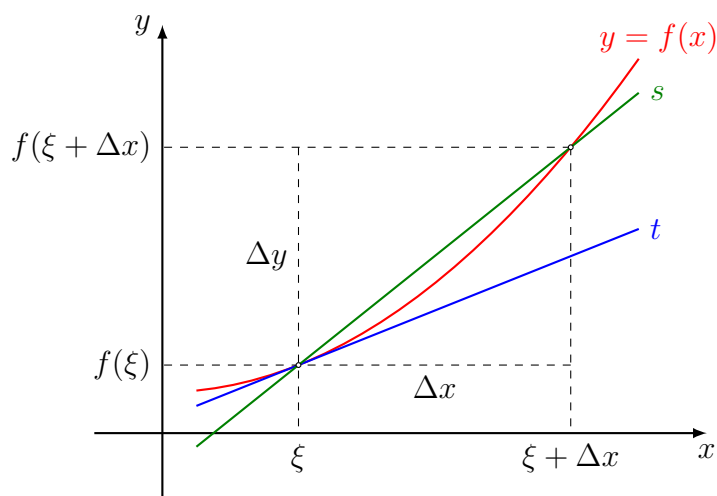


AM1: Das Differenzial

1 Einführung



Wir setzen voraus, dass die Funktion f an der Stelle ξ [sprich xi] differenzierbar ist.

Mit φ bezeichnen wir die Differenz zwischen dem Differenzen- und dem Differenzialquotienten. Geometrisch entspricht dies dem Unterschied zwischen der Sekanten- und der Tangentensteigung.

Für eine bestimmte Stelle ξ hängt diese Differenz von Δx ab. Daher fassen wir φ als eine Funktion $\varphi(\Delta x)$ auf.

$$\varphi(\Delta x) = \frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(\xi)$$

$$\varphi(\Delta x) \cdot \Delta x = \Delta y - f'(\xi) \cdot \Delta x$$

$$\Delta y = \underbrace{f'(\xi)}_{\text{const.}} \cdot \underbrace{\Delta x}_0 + \underbrace{\varphi(\Delta x)}_0 \cdot \underbrace{\Delta x}_0$$

$f'(\xi) \cdot \Delta x$: Konvergenz 1. Ordnung

$\varphi(\Delta x) \cdot \Delta x$: Konvergenz von höherer als 1. Ordnung

$dy \stackrel{\text{Def.}}{=} f'(\xi) \cdot \Delta x$ Differenzial von f an der Stelle ξ

Für $y = x$ gilt insbesondere $dy = 1 \cdot \Delta x = dx$ und damit:

$$\boxed{dy = f'(\xi) \cdot dx} \quad (dx \text{ ist „kleine“ endliche Grösse})$$

2 Ableitungsregeln in Differenzial-Schreibweise

- $d(f \pm g) = df \pm dg$
- $d(c \cdot f) = c \cdot df$
- $d(f \cdot g) = df \cdot g + f \cdot dg$
- $d\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{df \cdot g - f \cdot dg}{g^2}$
- $df(g(x)) = \frac{df}{dg} \cdot \frac{dg}{dx} \cdot dx$

Beispiele

(a) $f(x) = x^2 \quad \Rightarrow \quad df = 2x \cdot dx$

(b) $g(x) = \sin x \quad \Rightarrow \quad dg = \cos x \cdot dx$

(c) $x(t) = e^t \quad \Rightarrow \quad dx = e^t \cdot dt$

(d) $z(x) = \cos(4x) \quad \Rightarrow \quad dz \stackrel{y=4x}{=} -\sin(y) \cdot dy = -\sin(4x) \cdot 4 \cdot dx$

3 Fehlerfortpflanzung

Beispiel

Der Durchmesser einer Stahlkugel wird mit einer Messschraube mit einer maximalen Messabweichung von ± 0.01 mm bestimmt.

Aus dem Messwert $d = 12.04$ mm wird anschliessend das Volumen der Kugel bestimmt. Schätze den absoluten und den relative Fehler des Volumens.

$$\Delta V = V(d + \Delta d) - V(d) \approx V'(d) \cdot \Delta d$$

$$V(d) = \frac{4\pi(d/2)^3}{3} = \frac{4\pi d^3/8}{3} = \frac{\pi d^3}{6} \quad \Rightarrow \quad V'(d) = \frac{\pi d^2}{2}$$

$$\Delta V = \frac{\pi \cdot 12.04^2 \text{ mm}^2}{2} \cdot 0.01 \text{ mm} = 2.3 \text{ mm}^3 \text{ (absoluter Fehler)}$$

$$V = \frac{\pi \cdot 12.04^3}{6} = 913.9 \text{ mm}^3 \quad \Rightarrow \quad V = (913.9 \pm 2.3) \text{ mm}^3$$

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{2.3 \text{ mm}^3}{913.9 \text{ mm}^3} = 0.0025 \text{ (relativer Fehler)}$$

Abschätzung des Maximalfehlers

- Eine Grösse F setzt sich aus direkt messbaren und unabhängigen Grössen $x, y, \dots$ zusammen: $F = F(x, y, \dots)$
- Für jede Grösse sind ein Mittelwert (z. B. aus Messwiederholungen) und eine Fehlerschranke (z. B. die maximale Abweichung vom Mittelwert) bekannt.

$$\bar{F} = F(\bar{x}, \bar{y}, \dots)$$

$$\Delta F = F(\bar{x} + \Delta x, \bar{y} + \Delta y, \dots) - F(\bar{x}, \bar{y}, \dots)$$

- Fehlerfortpflanzungsgesetz für den Maximalfehler:

$$\Delta F \approx \left| \frac{\partial F}{\partial x} \right| \Delta x + \left| \frac{\partial F}{\partial y} \right| \Delta y + \dots$$

Beispiel

Der Durchmesser d und die Höhe h wurden zur Volumenbestimmung eines Zylinders gemessen. Wie gross ist die Messunsicherheit des Volumens?

$$d = (17.0 \pm 0.2) \text{ mm} \text{ und } h = (46.8 \pm 0.4) \text{ mm}$$

$$\Delta F \approx \left| \frac{\partial F}{\partial d} \right| \Delta d + \left| \frac{\partial F}{\partial h} \right| \Delta h = \left| \frac{\pi}{2} dh \right| \Delta d + \left| \frac{\pi}{4} d^2 \right| \Delta h = 34 \text{ mm}^3$$

$$V = \pi r^2 h = \frac{\pi}{4} d^2 h = 10\,623 \text{ mm}^3$$

$$V = (10\,623 \pm 34) \text{ mm}^3$$

4 Substitutionsregel(n) der Integration

4.1 Substitution 1. Art

Beispiel

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx = ?$$

Wähle eine Teilfunktion im Integranden, so dass nach der Substitution nur noch ein Faktor vorkommt, der bis auf einen konstanten Faktor mit der Ableitung der Teilfunktion übereinstimmt.

Substitution: $u = x^2 + 1$ (u als Funktion von x)

Differenzial bestimmen und nach dx auflösen:

$$du = 2x \cdot dx \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{1}{2x} \cdot du$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx &= \int_{u(0)}^{u(1)} \frac{x}{\sqrt{u}} \cdot \frac{1}{2x} du = \int_1^2 \frac{1}{2\sqrt{u}} du \\ &= \frac{1}{2} \int_1^2 u^{-\frac{1}{2}} du = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot u^{\frac{1}{2}} \Big|_{u=1}^{u=2} = \sqrt{u} \Big|_{u=1}^{u=2} \\ &= \sqrt{2} - 1 \end{aligned}$$

Ist man nur an einer Stammfunktion interessiert, macht man in der Stammfunktion die Substitution für u wieder rückgängig:

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx = \dots = \sqrt{u} + C = \sqrt{x^2+1} + C$$

Formale Beschreibung der Substitution 1. Art

$$\int_a^b f(u(x)) \cdot u'(x) dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(u) du$$

4.2 Substitution 2. Art

Beispiel

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \dots$$

Anstatt einen geeigneten Teilausdruck durch eine Funktion zu ersetzen, wird hier die Integrationsvariable als Funktion einer neuen Variable aufgefasst. Das Ziel: den Integranden so zu verändern, dass die Integration möglich wird.

$$x(t) = \sin t \quad \Rightarrow \quad dx = \cos t \cdot dt \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} x(t): -1 \rightarrow 1 \\ t: -\frac{\pi}{2} \rightarrow \frac{\pi}{2} \end{array}$$

$$\begin{aligned} \dots &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 t}} \cdot \cos t \, dt = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos t}{\sqrt{\cos^2 t}} \, dt \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos t}{|\cos t|} \, dt \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 1 \, dt \quad \left(0 \leq \cos t \leq 1 \quad \text{für} \quad -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2} \right) \\ &= [t]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{\pi}{2} - \frac{-\pi}{2} = \pi \end{aligned}$$

Ist man nur an einer Stammfunktion interessiert, macht man in der Stammfunktion die Substitution für $x(t)$ wieder rückgängig:

$$x = \sin(t) \quad \Rightarrow \quad t = \arcsin(x)$$

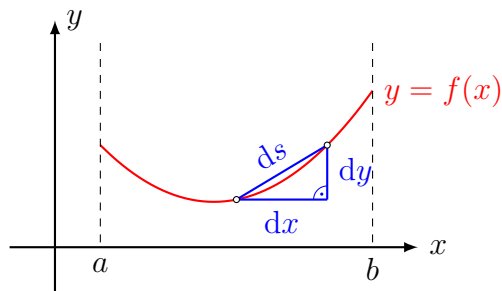
$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \dots = t + C = \arcsin(x) + C$$

Formale Beschreibung der Substitution 2. Art

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_{x^{-1}(a)}^{x^{-1}(b)} f(x(t)) x'(t) \, dt$$

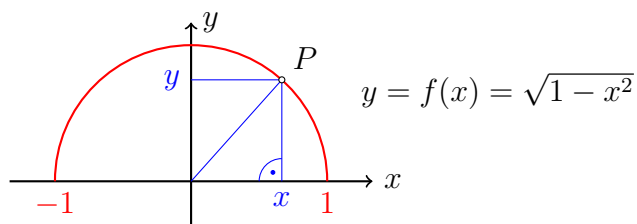
5 Bogenlänge einer Kurve

5.1 explizite Funktion: $y = f(x)$



$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{dx^2 + (df(x))^2} = \sqrt{dx^2 + (f'(x)dx)^2} \\ &= \sqrt{dx^2 + (f'(x))^2 dx^2} = \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx \\ \Rightarrow s &= \int_a^b ds = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx \end{aligned}$$

Beispiel: Länge des Einheits-Halbkreises

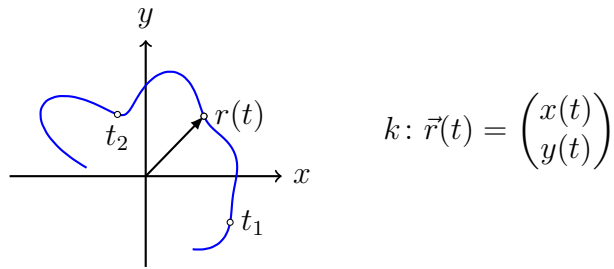


$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} \cdot (-2x) = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} \\ s &= \int_{-1}^1 \sqrt{1 + \frac{x^2}{1-x^2}} dx = 2 \int_0^1 \sqrt{\frac{1}{1-x^2}} dx = 2 \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= 2 [\arcsin x]_0^1 = 2 \cdot \frac{\pi}{2} = \pi \end{aligned}$$

Bemerkung

Oft gibt es für ein Bogenlängen-Integral keine geschlossene Stammfunktion. In diesem Fall müssen zur Berechnung numerische Näherungsverfahren verwendet werden ($\rightarrow$ TR).

5.2 Parameterform



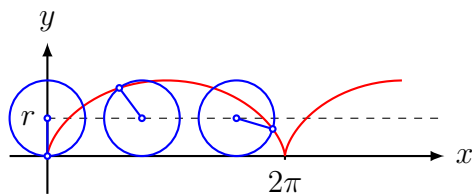
$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{[\dot{x}(t) dt]^2 + [\dot{y}(t) dt]^2} \\ &= \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2} dt \end{aligned}$$

$$ds = \int_{t_1}^{t_2} ds = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2} dt = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt$$

Beispiel: Bogenlänge der Zykloide

$$x(t) = rt - r \sin t \quad \Rightarrow \quad \dot{x}(t) = r - r \cos t$$

$$y(t) = r - r \cos t \quad \Rightarrow \quad \dot{y}(t) = r \sin t$$



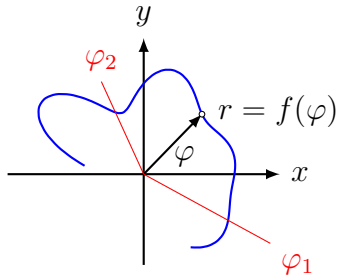
$$\begin{aligned} ds &= \int_0^{2\pi} \sqrt{(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2} dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{(r^2 - 2r^2 \cos t + r^2 \cos^2 t) + r^2 \sin^2 t} dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ds &= r \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - 2 \cos t + \cos^2 t + \sin^2 t} dt \\ &= r \int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2 \cos t} dt = \sqrt{2}r \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos t} dt = \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Substitution: } t = 2u &\quad \Rightarrow \quad dt = 2 du \quad \Rightarrow \quad t: 0 \rightarrow 2\pi \\ &\quad \quad \quad u: 0 \rightarrow \pi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s &= \sqrt{2}r \int_0^\pi \sqrt{1 - \cos 2u} 2 du = 2\sqrt{2}r \int_0^\pi \sqrt{1 - \cos^2 u + \sin^2 u} du \\ &= 2\sqrt{2}r \int_0^\pi \sqrt{2 \sin^2 u} du = 4r \int_0^\pi |\sin u| du \\ &= 4r [-\cos u]_0^\pi = 4r(1 + 1) = 8r \end{aligned}$$

5.3 Polarform



Mit der Beziehung: $x(\varphi) = r \cdot \cos \varphi = f(\varphi) \cdot \cos \varphi$

$$y(\varphi) = r \cdot \sin \varphi = f(\varphi) \cdot \sin \varphi$$

können wir die Formel für Parameterfunktionen verwenden, wenn wir φ als Parameter t auffassen:

$$x'(\varphi) = f'(\varphi) \cdot \cos \varphi - f(\varphi) \cdot \sin \varphi \quad (\text{Produktregel})$$

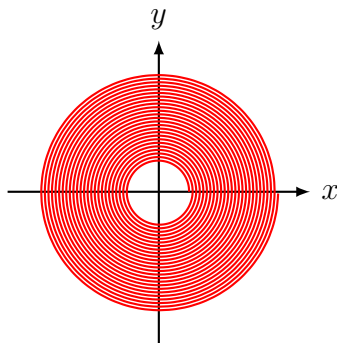
$$y'(\varphi) = f'(\varphi) \cdot \sin \varphi + f(\varphi) \cdot \cos \varphi$$

$$s = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{x'(\varphi)^2 + y'(\varphi)^2} \, d\varphi$$

$$= \dots$$

$$= \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{f(\varphi)^2 + f'(\varphi)^2} \, d\varphi$$

Beispiel: Magnetband in einer Musikkassette



Das Magnetband einer Musikkassette (MC) ist $15 \mu\text{m}$ dick und wird auf eine Spule mit dem Radius $r_1 = 0.45 \text{ cm}$ aufgewickelt, bis der äussere Radius $r_2 = 3 \text{ cm}$ beträgt. Wie lang ist dieses Magnetband?

$$f(\varphi) = 15 \mu\text{m} \cdot \frac{\varphi}{2\pi}$$

$$f(\varphi_1) = 15 \mu\text{m} \cdot \frac{\varphi_1}{2\pi} = 0.0045 \text{ m} \quad \Rightarrow \quad \varphi_1 = 600\pi$$

$$f(\varphi_2) = 15 \mu\text{m} \cdot \frac{\varphi_2}{2\pi} = 0.03 \text{ m} \quad \Rightarrow \quad \varphi_2 = 4000\pi$$

$$\begin{aligned}
s &= \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{f(\varphi)^2 + f'(\varphi)^2} \, d\varphi = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{\left(\frac{15 \, \mu\text{m}}{2\pi} \varphi\right)^2 + \left(\frac{15 \, \mu\text{m}}{2\pi}\right)^2} \, d\varphi \\
&= \frac{15 \, \mu\text{m}}{2\pi} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{\varphi^2 + 1} \, d\varphi \\
&= \frac{15 \, \mu\text{m}}{2\pi} \left[\frac{\varphi}{2} \sqrt{1 + \varphi^2} + \frac{1}{2} \ln(\varphi + \sqrt{1 + \varphi^2}) \right]_{600\pi}^{4000\pi} = 184.25 \, \text{m}
\end{aligned}$$