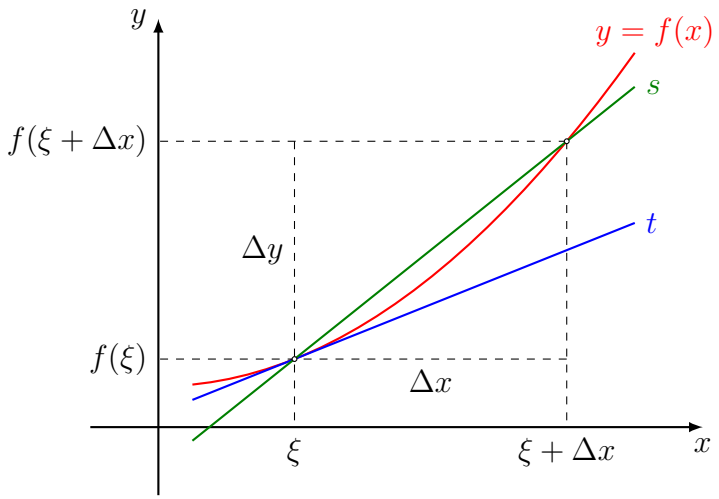
AM1: Das Differenzial

1 Einführung



Wir setzen voraus, dass die Funktion f an der Stelle ξ [sprich xi] differenzierbar ist.

Mit φ bezeichnen wir die Differenz zwischen dem Differenzen- und dem Differenzialquotienten. Geometrisch entspricht dies dem Unterschied zwischen der Sekanten- und der Tangentensteigung.

Für eine bestimmte Stelle ξ hängt diese Differenz von Δx ab. Daher fassen wir φ als eine Funktion $\varphi(\Delta x)$ auf.

2 Ableitungsregeln in Differenzial-Schreibweise

- $\mathrm{d}(f \pm g) =$
- $\mathrm{d}(c \cdot f) =$
- $\mathrm{d}(f \cdot g) =$
- $\mathrm{d}\left(\dfrac{f}{g}\right) =$
- $\mathrm{d}f\big(g(x)\big) =$

Beispiele

(a) $f(x) = x^2 \quad \Rightarrow$

(b) $g(x) = \sin x \quad \Rightarrow$

(c) $x(t) = \mathrm{e}^t \quad \Rightarrow$

(d) $z(x) = \cos(4x) \quad \Rightarrow$

3 Fehlerfortpflanzung

Beispiel

Der Durchmesser einer Stahlkugel wird mit einer Messschraube mit einer maximalen Messabweichung von $\pm 0.01\,\mathrm{mm}$ bestimmt.

Aus dem Messwert $d = 12.04\,\mathrm{mm}$ wird anschliessend das Volumen der Kugel bestimmt. Schätze den absoluten und den relative Fehler des Volumens.

Abschätzung des Maximalfehlers

- Eine Grösse F setzt sich aus direkt messbaren und unabhängigen Grössen x, y, ... zusammen: $F = F(x, y, \dots)$
- Für jede Grösse sind ein Mittelwert (z. B. aus Messwiederholungen) und eine Fehlerschranke (z. B. die maximale Abweichung vom Mittelwert) bekannt.

  $\overline{F} = F(\overline{x}, \overline{y}, \dots)$

  $\Delta F = F(\overline{x} + \Delta x, \overline{y} + \Delta y, \dots) - F(\overline{x}, \overline{y}, \dots)$
- Fehlerfortpflanzungsgesetz für den Maximalfehler:

  $$\Delta F \approx \left|\frac{\partial F}{\partial x}\right| \Delta x + \left|\frac{\partial F}{\partial y}\right| \Delta y + \dots$$

Beispiel

Der Durchmesser d und die Höhe h wurden zur Volumenbestimmung eines Zylinders gemessen. Wie gross ist die Messunsicherheit des Volumens?

$d = (17.0 \pm 0.2)\,\mathrm{mm}$ und $h = (46.8 \pm 0.4)\,\mathrm{mm}$

4 Substitutionsregel(n) der Integration

4.1 Substitution 1. Art

Beispiel

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x = ?$$

Wähle eine Teilfunktion im Integranden, so dass nach der Substitution nur noch ein Faktor vorkommt, der bis auf einen konstanten Faktor mit der Ableitung der Teilfunktion übereinstimmt.

Ist man nur an einer Stammfunktion interessiert, macht man in der Stammfunktion die Substitution für u wieder rückgängig:

Formale Beschreibung der Substitution 1. Art

$$\int_a^b f(u(x)) \cdot u'(x)\,\mathrm{d}x = \int_{u(a)}^{u(b)} f(u)\,\mathrm{d}u$$

4.2 Substitution 2. Art

Beispiel

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \dots$$

Anstatt einen geeigneten Teilausdruck durch eine Funktion zu ersetzen, wird hier die Integrationsvariable als Funktion einer neuen Variable aufgefasst. Das Ziel: den Integranden so zu verändern, dass die Integration möglich wird.

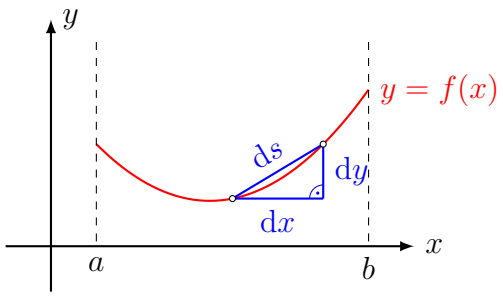
Ist man nur an einer Stammfunktion interessiert, macht man in der Stammfunktion die Substitution für $x(t)$ wieder rückgängig:

Formale Beschreibung der Substitution 2. Art

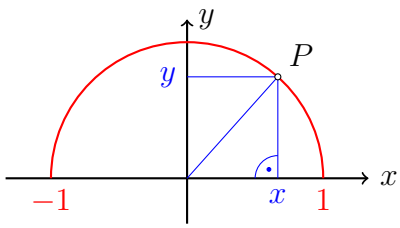
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{x^{-1}(a)}^{x^{-1}(b)} f\big(x(t)\big)x'(t)\,\mathrm{d}t$$

5 Bogenlänge einer Kurve

5.1 explizite Funktion: $y = f(x)$



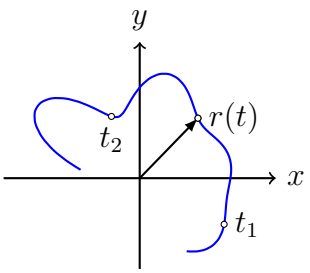
Beispiel: Länge des Einheits-Halbkreises



Bemerkung

Oft gibt es für ein Bogenlängen-Integral keine geschlossene Stammfunktion. In diesem Fall müssen zur Berechnung numerische Näherungsverfahren verwendet werden (→ TR).

5.2 Parameterform

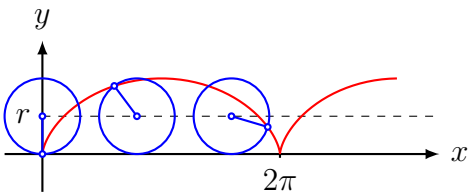


$$k\colon \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

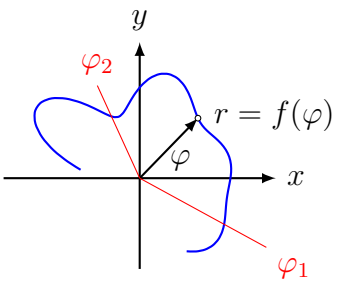
Beispiel: Bogenlänge der Zykloide

$x(t) = rt - r\sin t$

$y(t) = r - r\cos t$



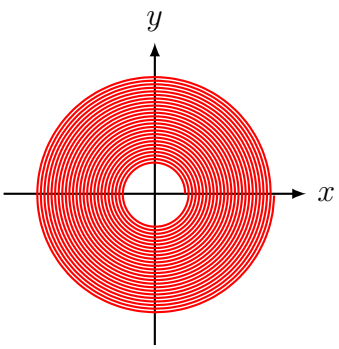
5.3 Polarform



Mit der Beziehung: $x(\varphi) = r \cdot \cos\varphi = f(\varphi) \cdot \cos\varphi$
$y(\varphi) = r \cdot \sin\varphi = f(\varphi) \cdot \sin\varphi$

können wir die Formel für Parameterfunktionen verwenden, wenn wir φ als Parameter t auffassen:

Beispiel: Magnetband in einer Musikkassette



Das Magnetband einer Musikkassette (MC) ist 15 µm dick und wird auf eine Spule mit dem Radius $r_1 = 0.45\,\text{cm}$ aufgewickelt, bis der äussere Radius $r_2 = 3\,\text{cm}$ beträgt. Wie lang ist dieses Mangnetband?