Aufgabe 1

$y' + xy = 0, \quad y(0) = 1$ linear, homogen, 1. Ordnung

$u(x) = x \quad \Rightarrow \quad U(x) = \int x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x^2$

$y(x) = C\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}$ (allgemeine Lösung)

AWP: $1 = y(0)$

$1 = C\mathrm{e}^0 = C$

$y = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}$ (partikuläre Lösung)

Aufgabe 2

$y' + 2y = \mathrm{e}^{-x}, \quad y(0) = 4$ (linear, inhomogen, 1. Ordnung)

$u(x) \equiv 2$

$U(x) = \int u(x)\,\mathrm{d}x = \int 2\,\mathrm{d}x = 2x$

$v(x) = \mathrm{e}^{-x}$

$G(x) = \int v(x)\mathrm{e}^{U(x)}\,\mathrm{d}x = \int \mathrm{e}^{-x}\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x = \int \mathrm{e}^{x}\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x$

$y(x) = \big(G(x) + C\big)\mathrm{e}^{-U(x)} = \big(\mathrm{e}^x + C\big)\mathrm{e}^{-2x} = \mathrm{e}^{-x} + C\mathrm{e}^{-2x}$

AWP: $4 = y(0)$

$4 = \mathrm{e}^0 + C \cdot \mathrm{e}^0 = 1 + C$

$C = 3$

$y(x) = \mathrm{e}^{-x} + 3\mathrm{e}^{-2x}$ (partikuläre Lösung)

Aufgabe 3

$y' + \dfrac{y}{x^2} = 0, \quad y(1) = 1$ linear, homogen, 1. Ordnung

$u(x) = \dfrac{1}{x^2} \quad \Rightarrow \quad U(x) = \int u(x)\,\mathrm{d}x = \int \dfrac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = -\dfrac{1}{x}$

$y(x) = C\mathrm{e}^{-U(x)} = C\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$ (allgemeine Lösung)

AWP: $1 = y(1)$

$1 = C\mathrm{e}^{-1} = C \cdot \dfrac{1}{\mathrm{e}}$

$C = \mathrm{e}$

$y(x) = \mathrm{e} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} = \mathrm{e}^{1-\frac{1}{x}}$ (partikuläre Lösung)

Aufgabe 4

$(1-x^2)y' + 2xy = 0, \quad y(0) = 1$

DGL normalisieren, d. h. durch $(1-x^2)$ dividieren:

$y' + \dfrac{2x}{1-x^2}y = 0$ linear, homogen, 1. Ordnung

$u(x) = \dfrac{2x}{1-x^2}$

$U(x) = \displaystyle\int \frac{2x}{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \ldots$ Subst.: $a(x) = 1-x^2$

$$\mathrm{d}a = -2x\,\mathrm{d}x$$

$$\mathrm{d}x = \frac{-1}{2x}\,\mathrm{d}a$$

$\ldots = \displaystyle\int \frac{2x}{a}\cdot\frac{-1}{2x}\,\mathrm{d}a = -\int \frac{1}{a}\,\mathrm{d}a = -\ln(a) = -\ln(1-x^2)$

$y(x) = C\mathrm{e}^{-U(x)} = C\mathrm{e}^{\ln(1-x^2)} = C(1-x^2)$ (allg. Lösung)

AWP: $2 = y(0)$

$2 = C(1-0)$

$C = 2$

$y(x) = 2(1-x^2) = 2-2x^2$ partikuläre Lösung

Aufgabe 5

$y' + \dfrac{y}{x} = \cos(x), \quad y(\pi) = 1$ linear, inhomogen, 1. Ordnung

$u(x) = \dfrac{1}{x}$

$U(x) = \displaystyle\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln(x)$

$v(x) = \cos(x)$

$G(x) = \displaystyle\int v(x)\mathrm{e}^{U(x)} = \int \cos(x)\mathrm{e}^{\ln(x)}\,\mathrm{d}x = \int x\cos(x)\,\mathrm{d}x = \ldots$

partielle Integration: $f'(x) = \cos(x) \quad \Rightarrow \quad f(x) = \sin(x)$

$g(x) = x \quad \Rightarrow \quad g'(x) = 1$

$\ldots = x\sin(x) - \displaystyle\int 1\cdot\sin(x)\,\mathrm{d}x = x\sin(x) + \cos(x)$

$$\begin{aligned} y(x) &= \big(G(x)+C\big)\mathrm{e}^{-U(x)} = \big(x\sin(x)+\cos(x)+C\big)\mathrm{e}^{-\ln(x)} \\ &= \big(x\sin(x)+\cos(x)+C\big)\frac{1}{x} \quad \text{(allgemeine Lösung)} \end{aligned}$$

AWP: $1 = y(\pi)$

$$
\begin{aligned}
1 &= \big(\pi \sin(\pi) + \cos(\pi) + C\big)\frac{1}{\pi} \\
1 &= \big(0 - 1 + C\big)\frac{1}{\pi} \\
\pi &= C - 1 \\
C &= \pi + 1
\end{aligned}
$$

$$y(x) = \frac{1}{x}\big(x\sin(x) + \cos(x) + \pi + 1\big) \qquad \text{(partikuläre Lösung)}$$

Aufgabe 6

$xy' + y = 6x^2, \quad y(1) = 3$

DGL normalisieren, d. h. durch x dividieren:

$$y' + \frac{1}{x}y = 6x \qquad \text{linear, inhomogen, 1. Ordnung}$$

$$u(x) = \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad U(x) = \int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln(x)$$

$v(x) = 6x$

$$G(x) = \int v(x)\mathrm{e}^{U(x)}\,\mathrm{d}x = \int 6x\mathrm{e}^{\ln(x)}\,\mathrm{d}x = \int 6x^2\,\mathrm{d}x = 2x^3$$

$$
\begin{aligned}
y(x) &= \big(G(x) + C\big)\mathrm{e}^{-U(x)} = \big(2x^3 + C\big)\mathrm{e}^{-\ln(x)} \\
&= \big(2x^3 + C\big)\frac{1}{x} = 2x^2 + \frac{C}{x} \qquad \text{(allgemeine Lösung)}
\end{aligned}
$$

AWP: $3 = y(1)$

$$
\begin{aligned}
3 &= 2 + \frac{C}{1} \\
C &= 1
\end{aligned}
$$

$$y(x) = 2x^2 + \frac{1}{x} \qquad \text{(partikuläre Lösung)}$$

Aufgabe 7

$y' = (y-2)^2, \quad y(2) = 1.8 \qquad$ nichtlinear, 1. Ordnung

Lösung durch Separation der Variablen:

$$\frac{1}{(y-2)^2} \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 1$$

$$\int \frac{1}{(y-2)^2}\,\mathrm{d}y = \int 1\,\mathrm{d}x$$

$$\frac{-1}{y-2} = x + C$$

$$2 - y = \frac{1}{x+C}$$

$$y(x) = 2 - \frac{1}{x+C} \quad \text{(allgemeine Lösung)}$$

AWP: $1.8 = y(2)$

$$\frac{9}{5} = 2 - \frac{1}{2+C}$$

$$\frac{1}{2+C} = \frac{1}{5}$$

$$C = 3$$

$$y(x) = 2 - \frac{1}{x+3} \quad \text{(partikuläre Lösung)}$$

Aufgabe 8

$y' = y^2 + 1; \quad y(0) = -1$ nichtlinear, 1. Ordnung

Lösung durch Separation der Variablen:

$$\frac{1}{y^2+1} \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 1$$

$$\int \frac{1}{y^2+1}\,\mathrm{d}y = \int 1\,\mathrm{d}x$$

$$\arctan(y) = x + C$$

$$y = \tan(x + C) \quad \text{(allgemeine Lösung)}$$

AWP: $-1 = y(0)$

$$-1 = \tan(C)$$

$$C = \arctan(-1) = -\arctan(1) = -\frac{\pi}{4}$$

$$y(x) = \tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \quad \text{(partikuläre Lösung)}$$

Aufgabe 9

$xy' + y = 4x^3 - 2x^2, \quad y(1) = -3$

DGL normalisieren, d. h. durch x dividieren:

$y' + \frac{y}{x} = 4x^2 - 2x$ linear, inhomogen, 1. Ordnung

$$u(x) = \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad U(x) = \int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln(x)$$

$$v(x) = 4x^2 - 2x$$

$$\begin{aligned} G(x) &= \int v(x)\mathrm{e}^{U(x)}\,\mathrm{d}x = \int (4x^2-2x)\mathrm{e}^{\ln(x)}\,\mathrm{d}x \\ &= \int (4x^2-2x)x\,\mathrm{d}x = \int (4x^3-2x^2)\,\mathrm{d}x = x^4 - \tfrac{2}{3}x^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y(x) &= \big(G(x)+C\big)\mathrm{e}^{-U(x)} = \big(x^4 - \tfrac{2}{3}x^3 + C\big)\mathrm{e}^{-\ln(x)} \\ &= x^3 - \frac{2}{3}x^2 + \frac{C}{x} \quad \text{(allgemeine Lösung)} \end{aligned}$$

AWP: $-3 = y(1)$

$$\begin{aligned} -3 &= 1 - \frac{2}{3} + C \\ C &= -\frac{10}{3} \end{aligned}$$

$$y(x) = x^3 - \frac{2}{3}x^2 - \frac{10}{3x} \quad \text{(partikuläre Lösung)}$$

Aufgabe 10

$y' = y^2(x+1), \quad y(0) = 1 \quad$ nichtlinear, 1. Ordnung

Lösung durch Separation der Variablen:

$$\frac{1}{y^2}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x+1$$

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{y^2}\,\mathrm{d}y &= \int (x+1)\,\mathrm{d}x \\ -\frac{1}{y} &= \frac{1}{2}x^2 + x + C \\ y &= \frac{-1}{\frac{1}{2}x^2+x+C} \quad \text{(allgemeine Lösung)} \end{aligned}$$

AWP: $1 = y(0) \quad \Rightarrow \quad 1 = \dfrac{-1}{C} \quad \Rightarrow \quad C = -1$

$$y(x) = \frac{-1}{\frac{1}{2}x^2+x-1} \quad \text{(partikuläre Lösung)}$$

Aufgabe 11

$y' = 3x^2\sqrt{1-y^2} \qquad$ nichtlinear, 1. Ordnung

Lösung durch Separation der Variablen:

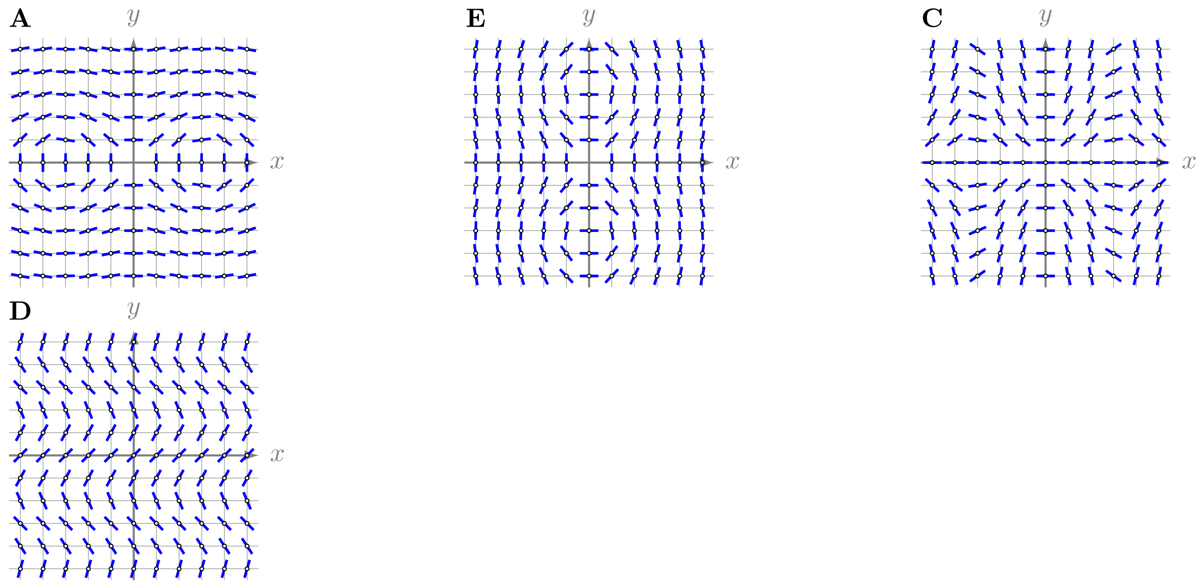
$$\frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 3x^2$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\,\mathrm{d}y = \int 3x^2\,\mathrm{d}x$$

$$\arcsin(y) = x^3 + C$$

$$y = \sin\left(x^3 + C\right) \quad \text{(allgemeine Lösung)}$$

Aufgabe 12



A: y' verhält sich wie $\sin(x)$ für $y = 1 \quad \Rightarrow \quad y' = \dfrac{\sin x}{y}$

B: y' hängt nur von x ab $\quad \Rightarrow \quad y' = x\cos x$

C: $y' = 0$ für alle $(x, 0)$ und alle $(0, y) \quad \Rightarrow \quad y' = y\sin x$

D: y' hängt nur von y ab $\quad \Rightarrow \quad y' = \dfrac{1}{\cos y}$

Aufgabe 13

DGL: $y' = xy^2 - y$

$$y(x) = \frac{1}{1 + x + C\mathrm{e}^x} = \left(1 + x + C\mathrm{e}^x\right)^{-1} \tag{1}$$

$$y'(x) = -\left(1 + x + C\mathrm{e}^x\right)^{-2}\left(1 + C\mathrm{e}^x\right) = -y(x)^2\left(1 + C\mathrm{e}^x\right) \tag{2}$$

Für die rechte Seite Seite der DGL gilt:

$$
\begin{aligned}
xy^2 - y = y(xy-1) &= y\left(\frac{x}{1+x+C\mathrm{e}^x} - \frac{1+x+C\mathrm{e}^x}{1+x+C\mathrm{e}^x}\right) \\
&= y\frac{-x-C\mathrm{e}^x}{1+x+C\mathrm{e}^x} = -y(x+C\mathrm{e}^x)\bigl(1+x+C\mathrm{e}^x\bigr)^{-1} \\
&= -y^2(x+C\mathrm{e}^x) = -y(x)^2\bigl(x+C\mathrm{e}^x\bigr) \quad (3)
\end{aligned}
$$

Aus (2) und (3) folgt die Behauptung.