Differenzialgleichungen

DGL 1. Ordnung

Aufgaben 1–11: Finde die allgemeine Lösung der gegebenen DGL und bestimme dann die partikuläre Lösung mit den gegebenen Anfangsbedingungen.

Aufgabe 1

$$y' + xy = 0, \quad y(0) = 1$$

Aufgabe 1

$y' + xy = 0, \quad y(0) = 1$ linear, homogen, 1. Ordnung

$$u(x) = x \quad \Rightarrow \quad U(x) = \int x \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2}x^2$$

$y(x) = C\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}$ (allgemeine Lösung)

AWP: $1 = y(0)$

$1 = C\mathrm{e}^0 = C$

$y = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}$ (partikuläre Lösung)

Aufgabe 2

$$y' + 2y = \mathrm{e}^{-x}, \qquad y(0) = 4$$

Aufgabe 2

$y' + 2y = \mathrm{e}^{-x}, \quad y(0) = 4 \quad$ (linear, inhomogen, 1. Ordnung)

$u(x) \equiv 2$

$$U(x) = \int u(x)\,\mathrm{d}x = \int 2\,\mathrm{d}x = 2x$$

$v(x) = \mathrm{e}^{-x}$

$$G(x) = \int v(x)\mathrm{e}^{U(x)}\,\mathrm{d}x = \int \mathrm{e}^{-x}\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x = \int \mathrm{e}^{x}\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{x}$$

$$y(x) = \big(G(x) + C\big)\mathrm{e}^{-U(x)} = \big(\mathrm{e}^{x} + C\big)\mathrm{e}^{-2x} = \mathrm{e}^{-x} + C\mathrm{e}^{-2x}$$

Aufgabe 2

$$y' + 2y = \mathrm{e}^{-x}, \qquad y(0) = 4 \qquad \text{(linear, inhomogen, 1. Ordnung)}$$

$$u(x) \equiv 2$$

$$U(x) = \int u(x)\,\mathrm{d}x = \int 2\,\mathrm{d}x = 2x$$

$$v(x) = \mathrm{e}^{-x}$$

$$G(x) = \int v(x)\mathrm{e}^{U(x)}\,\mathrm{d}x = \int \mathrm{e}^{-x}\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x = \int \mathrm{e}^{x}\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{x}$$

$$y(x) = \big(G(x) + C\big)\mathrm{e}^{-U(x)} = \big(\mathrm{e}^{x} + C\big)\mathrm{e}^{-2x} = \mathrm{e}^{-x} + C\mathrm{e}^{-2x}$$

$$\begin{aligned} \text{AWP:}\quad 4 &= y(0) \\ 4 &= \mathrm{e}^{0} + C \cdot \mathrm{e}^{0} = 1 + C \\ C &= 3 \end{aligned}$$

$$y(x) = \mathrm{e}^{-x} + 3\mathrm{e}^{-2x} \qquad \text{(partikuläre Lösung)}$$

Aufgabe 3

$$y' + \frac{y}{x^2} = 0, \quad y(1) = 1$$

Aufgabe 3

$$y' + \frac{y}{x^2} = 0, \quad y(1) = 1 \quad \text{linear, homogen, 1. Ordnung}$$

$$u(x) = \frac{1}{x^2} \quad \Rightarrow \quad U(x) = \int u(x)\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{x}$$

$$y(x) = C\mathrm{e}^{-U(x)} = C\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} \quad \text{(allgemeine Lösung)}$$

AWP: $1 = y(1)$

$$1 = C\mathrm{e}^{-1} = C \cdot \frac{1}{\mathrm{e}}$$

$$C = \mathrm{e}$$

$$y(x) = \mathrm{e} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} = \mathrm{e}^{1-\frac{1}{x}} \quad \text{(partikuläre Lösung)}$$

Aufgabe 4

$$(1 - x^2)y' + 2xy = 0, \quad y(0) = 1$$

Aufgabe 4

$$(1 - x^2)y' + 2xy = 0, \quad y(0) = 1$$

DGL normalisieren, d. h. durch $(1 - x^2)$ dividieren:

$$y' + \frac{2x}{1 - x^2}y = 0$$ linear, homogen, 1. Ordnung

Aufgabe 4

$$(1-x^2)y' + 2xy = 0, \qquad y(0) = 1$$

DGL normalisieren, d. h. durch $(1-x^2)$ dividieren:

$$y' + \frac{2x}{1-x^2}y = 0 \qquad \text{linear, homogen, 1. Ordnung}$$

$$u(x) = \frac{2x}{1-x^2}$$

$$U(x) = \int \frac{2x}{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \ldots \qquad \text{Subst.: } a(x) = 1-x^2$$

$$\mathrm{d}a = -2x\,\mathrm{d}x$$

$$\mathrm{d}x = \frac{-1}{2x}\,\mathrm{d}a$$

$$\ldots = \int \frac{2x}{a}\cdot\frac{-1}{2x}\,\mathrm{d}a = -\int \frac{1}{a}\,\mathrm{d}a = -\ln(a) = -\ln(1-x^2)$$

$$y(x) = C\mathrm{e}^{-U(x)} = C\mathrm{e}^{\ln(1-x^2)} = C(1-x^2) \qquad \text{(allg. Lösung)}$$

$$\begin{aligned} \text{AWP:}\quad 2 &= y(0) \\ 2 &= C(1-0) \\ C &= 2 \end{aligned}$$

$y(x) = 2(1-x^2) = 2 - 2x^2$ partikuläre Lösung

Aufgabe 5

$$y' + \frac{y}{x} = \cos(x), \qquad y(\pi) = 1$$

Aufgabe 5

$$y' + \frac{y}{x} = \cos(x), \quad y(\pi) = 1 \quad \text{linear, inhomogen, 1. Ordnung}$$

$$u(x) = \frac{1}{x}$$

$$U(x) = \int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln(x)$$

$$v(x) = \cos(x)$$

$$G(x) = \int v(x)\mathrm{e}^{U(x)} = \int \cos(x)\mathrm{e}^{\ln(x)}\,\mathrm{d}x = \int x\cos(x)\,\mathrm{d}x = \dots$$

partielle Integration: $f'(x) = \cos(x) \quad \Rightarrow \quad f(x) = \sin(x)$

$g(x) = x \quad \Rightarrow \quad g'(x) = 1$

$$\dots = x\sin(x) - \int 1 \cdot \sin(x)\,\mathrm{d}x = x\sin(x) + \cos(x)$$

$$y(x) = \big(G(x) + C\big)e^{-U(x)} = \big(x\sin(x) + \cos(x) + C\big)e^{-\ln(x)}$$
$$= \big(x\sin(x) + \cos(x) + C\big)\frac{1}{x} \quad \text{(allgemeine Lösung)}$$

AWP: $1 = y(\pi)$

$$1 = \big(\pi\sin(\pi) + \cos(\pi) + C\big)\frac{1}{\pi}$$
$$1 = \big(0 - 1 + C\big)\frac{1}{\pi}$$
$$\pi = C - 1$$
$$C = \pi + 1$$

$$y(x) = \frac{1}{x}\big(x\sin(x) + \cos(x) + \pi + 1\big) \qquad \text{(partikuläre Lösung)}$$

Aufgabe 6

$$xy' + y = 6x^2, \quad y(1) = 3$$

Aufgabe 6

$xy' + y = 6x^2, \quad y(1) = 3$

DGL normalisieren, d. h. durch x dividieren:

$y' + \frac{1}{x}y = 6x$ linear, inhomogen, 1. Ordnung

Aufgabe 6

$$xy' + y = 6x^2, \quad y(1) = 3$$

DGL normalisieren, d. h. durch x dividieren:

$$y' + \frac{1}{x}y = 6x \quad \text{linear, inhomogen, 1. Ordnung}$$

$$u(x) = \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad U(x) = \int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln(x)$$

Aufgabe 6

$$xy' + y = 6x^2, \qquad y(1) = 3$$

DGL normalisieren, d. h. durch x dividieren:

$$y' + \frac{1}{x}y = 6x \qquad \text{linear, inhomogen, 1. Ordnung}$$

$$u(x) = \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad U(x) = \int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln(x)$$

$$v(x) = 6x$$

$$G(x) = \int v(x)\mathrm{e}^{U(x)}\,\mathrm{d}x = \int 6x\mathrm{e}^{\ln(x)}\,\mathrm{d}x = \int 6x^2\,\mathrm{d}x = 2x^3$$

$$y(x) = \big(G(x) + C\big)\mathrm{e}^{-U(x)} = \big(2x^3 + C\big)\mathrm{e}^{-\ln(x)}$$

$$= \big(2x^3 + C\big)\frac{1}{x} = 2x^2 + \frac{C}{x} \quad \text{(allgemeine Lösung)}$$

AWP: $$\begin{aligned} 3 &= y(1) \\ 3 &= 2 + \frac{C}{1} \\ C &= 1 \end{aligned}$$

$$y(x) = 2x^2 + \frac{1}{x} \quad \text{(partikuläre Lösung)}$$

Aufgabe 7

$$y' = (y-2)^2, \quad y(2) = 1.8$$

Aufgabe 7

$y' = (y-2)^2, \quad y(2) = 1.8$ nichtlinear, 1. Ordnung

Lösung durch Separation der Variablen:

$$\frac{1}{(y-2)^2} \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 1$$

$$\int \frac{1}{(y-2)^2}\,\mathrm{d}y = \int 1\,\mathrm{d}x$$

$$\frac{-1}{y-2} = x + C$$

$$2 - y = \frac{1}{x+C}$$

$$y(x) = 2 - \frac{1}{x+C} \quad \text{(allgemeine Lösung)}$$

AWP:
$$
\begin{aligned}
1.8 &= y(2) \\
\frac{9}{5} &= 2 - \frac{1}{2+C} \\
\frac{1}{2+C} &= \frac{1}{5} \\
C &= 3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{AWP:}\qquad 1.8 &= y(2)\\
\frac{9}{5} &= 2 - \frac{1}{2+C}\\
\frac{1}{2+C} &= \frac{1}{5}\\
C &= 3
\end{aligned}
$$

$$y(x) = 2 - \frac{1}{x+3} \qquad \text{(partikuläre Lösung)}$$

Aufgabe 8

$$y' = y^2 + 1; \quad y(0) = -1$$

Aufgabe 8

$y' = y^2 + 1; \quad y(0) = -1$ nichtlinear, 1. Ordnung

Aufgabe 8

$y' = y^2 + 1; \quad y(0) = -1$ nichtlinear, 1. Ordnung

Lösung durch Separation der Variablen:

Aufgabe 8

$y' = y^2 + 1; \quad y(0) = -1 \quad$ nichtlinear, 1. Ordnung

Lösung durch Separation der Variablen:

$$\frac{1}{y^2+1} \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 1$$

$$\int \frac{1}{y^2+1}\,\mathrm{d}y = \int 1\,\mathrm{d}x$$

$$\arctan(y) = x + C$$

$$y = \tan(x + C) \quad \text{(allgemeine Lösung)}$$

Aufgabe 8

$y' = y^2 + 1; \quad y(0) = -1$ nichtlinear, 1. Ordnung

Lösung durch Separation der Variablen:

$$\frac{1}{y^2+1} \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 1$$

$$\int \frac{1}{y^2+1}\,\mathrm{d}y = \int 1\,\mathrm{d}x$$

$$\arctan(y) = x + C$$

$$y = \tan(x + C) \quad \text{(allgemeine Lösung)}$$

AWP:
$$-1 = y(0)$$
$$-1 = \tan(C)$$
$$C = \arctan(-1) = -\arctan(1) = -\frac{\pi}{4}$$

Aufgabe 8

$y' = y^2 + 1; \quad y(0) = -1$ nichtlinear, 1. Ordnung

Lösung durch Separation der Variablen:

$$\frac{1}{y^2+1} \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 1$$

$$\int \frac{1}{y^2+1}\,\mathrm{d}y = \int 1\,\mathrm{d}x$$

$$\arctan(y) = x + C$$

$$y = \tan(x + C) \quad \text{(allgemeine Lösung)}$$

AWP:
$$\begin{aligned} -1 &= y(0) \\ -1 &= \tan(C) \\ C &= \arctan(-1) = -\arctan(1) = -\frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

$$y(x) = \tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \quad \text{(partikuläre Lösung)}$$

Aufgabe 9

$$xy' + y = 4x^3 - 2x^2, \quad y(1) = -3$$

Aufgabe 9

$$xy' + y = 4x^3 - 2x^2, \quad y(1) = -3$$

DGL normalisieren, d. h. durch x dividieren:

$$y' + \frac{y}{x} = 4x^2 - 2x \quad \text{linear, inhomogen, 1. Ordnung}$$

Aufgabe 9

$$xy' + y = 4x^3 - 2x^2, \quad y(1) = -3$$

DGL normalisieren, d. h. durch x dividieren:

$$y' + \frac{y}{x} = 4x^2 - 2x \quad \text{linear, inhomogen, 1. Ordnung}$$

$$u(x) = \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad U(x) = \int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln(x)$$

Aufgabe 9

$$xy' + y = 4x^3 - 2x^2, \quad y(1) = -3$$

DGL normalisieren, d. h. durch x dividieren:

$$y' + \frac{y}{x} = 4x^2 - 2x \quad \text{linear, inhomogen, 1. Ordnung}$$

$$u(x) = \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad U(x) = \int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln(x)$$

$$v(x) = 4x^2 - 2x$$

$$G(x) = \int v(x)\mathrm{e}^{U(x)}\,\mathrm{d}x = \int (4x^2 - 2x)\mathrm{e}^{\ln(x)}\,\mathrm{d}x$$

$$= \int (4x^2 - 2x)x\,\mathrm{d}x = \int (4x^3 - 2x^2)\,\mathrm{d}x = x^4 - \tfrac{2}{3}x^3$$

$$y(x) = \big(G(x) + C\big)\mathrm{e}^{-U(x)} = \big(x^4 - \tfrac{2}{3}x^3 + C\big)\mathrm{e}^{-\ln(x)}$$

$$= x^3 - \frac{2}{3}x^2 + \frac{C}{x} \quad \text{(allgemeine Lösung)}$$

AWP: $-3 = y(1)$

$$-3 = 1 - \frac{2}{3} + C$$

$$C = -\frac{10}{3}$$

$$y(x) = x^3 - \frac{2}{3}x^2 - \frac{10}{3x} \quad \text{(partikuläre Lösung)}$$

Aufgabe 10

$$y' = y^2(x+1), \qquad y(0) = 1$$

Aufgabe 10

$y' = y^2(x+1), \quad y(0) = 1 \quad$ nichtlinear, 1. Ordnung

Aufgabe 10

$y' = y^2(x+1), \quad y(0) = 1$ nichtlinear, 1. Ordnung

Lösung durch Separation der Variablen:

Aufgabe 10

$y' = y^2(x+1), \quad y(0) = 1$ nichtlinear, 1. Ordnung

Lösung durch Separation der Variablen:

$$\frac{1}{y^2} \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x + 1$$

$$\int \frac{1}{y^2}\,\mathrm{d}y = \int (x+1)\,\mathrm{d}x$$

$$-\frac{1}{y} = \frac{1}{2}x^2 + x + C$$

$$y = \frac{-1}{\frac{1}{2}x^2 + x + C} \quad \text{(allgemeine Lösung)}$$

Aufgabe 10

$y' = y^2(x+1), \quad y(0) = 1$ nichtlinear, 1. Ordnung

Lösung durch Separation der Variablen:

$$\frac{1}{y^2} \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x + 1$$

$$\int \frac{1}{y^2}\,\mathrm{d}y = \int (x+1)\,\mathrm{d}x$$

$$-\frac{1}{y} = \frac{1}{2}x^2 + x + C$$

$$y = \frac{-1}{\frac{1}{2}x^2 + x + C} \quad \text{(allgemeine Lösung)}$$

AWP: $1 = y(0) \quad \Rightarrow \quad 1 = \dfrac{-1}{C} \quad \Rightarrow \quad C = -1$

Aufgabe 10

$y' = y^2(x+1), \quad y(0) = 1$ nichtlinear, 1. Ordnung

Lösung durch Separation der Variablen:

$$\frac{1}{y^2} \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x + 1$$

$$\int \frac{1}{y^2}\,\mathrm{d}y = \int (x+1)\,\mathrm{d}x$$

$$-\frac{1}{y} = \frac{1}{2}x^2 + x + C$$

$$y = \frac{-1}{\frac{1}{2}x^2 + x + C} \quad \text{(allgemeine Lösung)}$$

AWP: $1 = y(0) \quad \Rightarrow \quad 1 = \dfrac{-1}{C} \quad \Rightarrow \quad C = -1$

$$y(x) = \frac{-1}{\frac{1}{2}x^2 + x - 1} \quad \text{(partikuläre Lösung)}$$

Aufgabe 11

$$y' = 3x^2\sqrt{1-y^2}, \quad \text{allgemeine Lösung?}$$

Aufgabe 11

$$y' = 3x^2\sqrt{1-y^2} \qquad \text{nichtlinear, 1. Ordnung}$$

Aufgabe 11

$y' = 3x^2\sqrt{1-y^2}$ nichtlinear, 1. Ordnung

Lösung durch Separation der Variablen:

Aufgabe 11

$y' = 3x^2\sqrt{1-y^2}$ nichtlinear, 1. Ordnung

Lösung durch Separation der Variablen:

$$\frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 3x^2$$

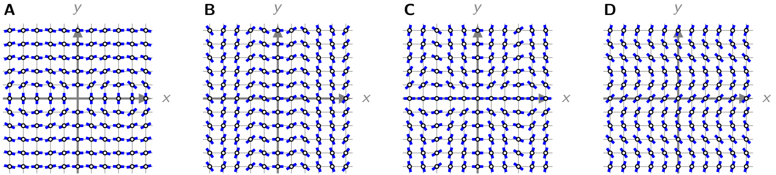
$$\int \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\,\mathrm{d}y = \int 3x^2\,\mathrm{d}x$$

$$\arcsin(y) = x^3 + C$$

$$y = \sin\left(x^3 + C\right) \quad \text{(allgemeine Lösung)}$$

Aufgabe 12

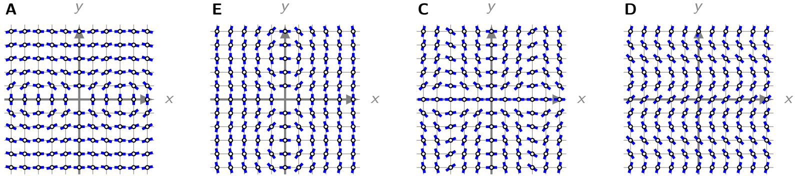
Die unten abgebildeten Richtungsfelder zeigen den Bereich $-5 \leq x \leq 5$ und $-5 \leq y \leq 5$.



Welche der folgenden DGL erzeugt das jeweilige Richtungsfeld?

$$y' = \frac{\cos x}{\sin y} \qquad y' = \frac{\sin x}{y} \qquad y' = \frac{1}{\cos y} \qquad y' = y \sin x \qquad y' = \frac{x}{\sin y} \qquad y' = x \cos x$$

Aufgabe 12



A: y' verhält sich wie $\sin(x)$ für $y = 1$ $\quad\Rightarrow\quad$ $y' = \dfrac{\sin x}{y}$

B: y' hängt nur von x ab $\quad\Rightarrow\quad$ $y' = x \cos x$

C: $y' = 0$ für alle $(x, 0)$ und alle $(0, y)$ $\quad\Rightarrow\quad$ $y' = y \sin x$

D: y' hängt nur von y ab $\quad\Rightarrow\quad$ $y' = \dfrac{1}{\cos y}$

Aufgabe 13

Zeige, dass $y(x) = \dfrac{1}{1 + x + Ce^x}$ Lösung der DGL $y' = xy^2 - y$ ist.

Aufgabe 13

DGL: $y' = xy^2 - y$

$$y(x) = \frac{1}{1 + x + Ce^x} = \left(1 + x + Ce^x\right)^{-1} \tag{1}$$

$$y'(x) = -\left(1 + x + Ce^x\right)^{-2}\left(1 + Ce^x\right) = -y(x)^2\left(1 + Ce^x\right) \tag{2}$$

Aufgabe 13

DGL: $y' = xy^2 - y$

$$y(x) = \frac{1}{1+x+Ce^x} = \left(1+x+Ce^x\right)^{-1} \qquad (1)$$

$$y'(x) = -\left(1+x+Ce^x\right)^{-2}\left(1+Ce^x\right) = -y(x)^2\left(1+Ce^x\right) \qquad (2)$$

Für die rechte Seite Seite der DGL gilt:

$$xy^2 - y = y(xy-1) = y\left(\frac{x}{1+x+Ce^x} - \frac{1+x+Ce^x}{1+x+Ce^x}\right)$$

$$= y\frac{-x-Ce^x}{1+x+Ce^x} = -y(x+Ce^x)\left(1+x+Ce^x\right)^{-1}$$

$$= -y^2(x+Ce^x) = -y(x)^2\left(x+Ce^x\right) \qquad (3)$$

Aus (2) und (3) folgt die Behauptung.