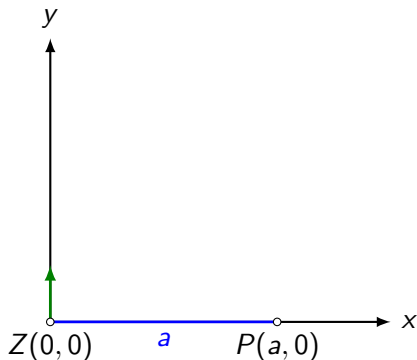


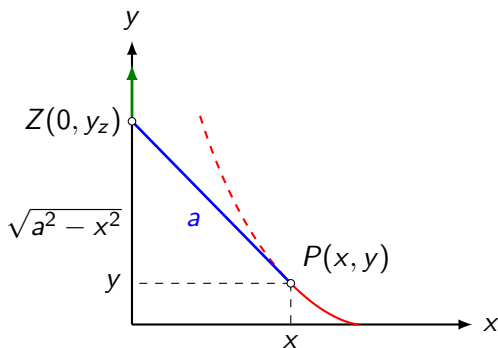
Differenzialgleichungen

Beispiel 1.1 (Traktrix)

In der xy -Ebene befindet sich in $P(a, 0)$ ein reibungsfrei beweglicher Massenpunkt und ist durch eine straff gespannte Schnur der Länge a mit dem Zugpunkt $Z(0, 0)$ verbunden.



Wird der Zugpunkt Z in positive y -Richtung verschoben, so bewegt sich P entlang einer Kurve, die **Traktrix** (Schleppkurve) genannt wird.



$$y'(x) = -\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x}$$

$$\text{Lösung: } y(x) = a \ln \left(\frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x} \right) - \sqrt{a^2 - x^2} + C$$

$$\text{Anfangsbedingung: } y(a) = 0$$

$$a \ln \left(\frac{a + \sqrt{a^2 - a^2}}{a} \right) - \sqrt{a^2 - a^2} + C = 0$$

$$a \ln \left(\frac{a}{a} \right) + C = 0$$

$$a \ln 1 - C = 0$$

$$C = 0$$

Beispiel 1.2 (Exponentielles Wachstum)

Bakterienpopulation zum Zeitpunkt t : $P(t)$

Wachstumsgesetz?

$$\Delta P(t) = \alpha \cdot P(t) \cdot \Delta t$$

(Wachstum proportional zum aktuellen Bestand und zur Zeitspanne)

Beispiel 1.2 (Exponentielles Wachstum)

Bakterienpopulation zum Zeitpunkt t : $P(t)$

Wachstumsgesetz?

$$\Delta P(t) = \alpha \cdot P(t) \cdot \Delta t$$

(Wachstum proportional zum aktuellen Bestand und zur Zeitspanne)

$$\frac{\Delta P(t)}{\Delta t} = \alpha \cdot P(t) \quad || \lim_{\Delta t \rightarrow 0}$$

Beispiel 1.2 (Exponentielles Wachstum)

Bakterienpopulation zum Zeitpunkt t : $P(t)$

Wachstumsgesetz?

$$\Delta P(t) = \alpha \cdot P(t) \cdot \Delta t$$

(Wachstum proportional zum aktuellen Bestand und zur Zeitspanne)

$$\frac{\Delta P(t)}{\Delta t} = \alpha \cdot P(t) \quad || \lim_{\Delta t \rightarrow 0}$$

$$\dot{P}(t) = \alpha \cdot P(t) \quad (\text{DGL})$$

Beispiel 1.2 (Exponentielles Wachstum)

Bakterienpopulation zum Zeitpunkt t : $P(t)$

Wachstumsgesetz?

$$\Delta P(t) = \alpha \cdot P(t) \cdot \Delta t$$

(Wachstum proportional zum aktuellen Bestand und zur Zeitspanne)

$$\frac{\Delta P(t)}{\Delta t} = \alpha \cdot P(t) \quad || \lim_{\Delta t \rightarrow 0}$$

$$\dot{P}(t) = \alpha \cdot P(t) \quad (\text{DGL})$$

$$\text{Lösungsansatz: } P(t) = C e^{\alpha t}$$

Ansatz testen:

$$\dot{P}(t) = \alpha P(t)$$

$$Ce^{\alpha t} \cdot \alpha = \alpha \cdot Ce^{\alpha t}$$

$$\alpha Ce^{\alpha t} = \alpha Ce^{\alpha t} \quad \forall t \geq 0$$

Ansatz testen:

$$\dot{P}(t) = \alpha P(t)$$

$$Ce^{\alpha t} \cdot \alpha = \alpha \cdot Ce^{\alpha t}$$

$$\alpha Ce^{\alpha t} = \alpha Ce^{\alpha t} \quad \forall t \geq 0$$

Konstante durch Anfangsbedingung $P(0) = P_0$ bestimmen

Ansatz testen:

$$\dot{P}(t) = \alpha P(t)$$

$$C e^{\alpha t} \cdot \alpha = \alpha \cdot C e^{\alpha t}$$

$$\alpha C e^{\alpha t} = \alpha C e^{\alpha t} \quad \forall t \geq 0$$

Konstante durch Anfangsbedingung $P(0) = P_0$ bestimmen

$$P(0) = C \cdot e^{\alpha \cdot 0} = C \cdot 1 = C$$

Ansatz testen:

$$\dot{P}(t) = \alpha P(t)$$

$$C e^{\alpha t} \cdot \alpha = \alpha \cdot C e^{\alpha t}$$

$$\alpha C e^{\alpha t} = \alpha C e^{\alpha t} \quad \forall t \geq 0$$

Konstante durch Anfangsbedingung $P(0) = P_0$ bestimmen

$$P(0) = C \cdot e^{\alpha \cdot 0} = C \cdot 1 = C$$

Also: $\boxed{P(t) = P_0 e^{\alpha t}}$ (α : Wachstumskonstante)

Verdoppelungszeit:

$$P(t + \delta) = 2P(t)$$

$$P_0 e^{\alpha(t+\delta)} = 2P_0 e^{\alpha t}$$

$$e^{\alpha t} \cdot e^{\alpha \cdot \delta} = 2e^{\alpha t}$$

$$e^{\alpha \cdot \delta} = 2$$

$$\alpha \cdot \delta = \ln 2$$

$$\delta = \frac{\ln 2}{\alpha}$$

Verdoppelungszeit:

$$P(t + \delta) = 2P(t)$$

$$P_0 e^{\alpha(t+\delta)} = 2P_0 e^{\alpha t}$$

$$e^{\alpha t} \cdot e^{\alpha \cdot \delta} = 2e^{\alpha t}$$

$$e^{\alpha \cdot \delta} = 2$$

$$\alpha \cdot \delta = \ln 2$$

$$\delta = \frac{\ln 2}{\alpha}$$

Asymptotisches Wachstum:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} P_0 e^{\alpha t} = \infty \quad (\text{unrealistisch!})$$

Beispiel 1.3 (logistisches Wachstum)

Mit einem Wachstungsfaktor c und einer Kapazitätsgrenze $G > 0$ für die Population $P(t)$ erhalten wir die **logistische DGL**:

Beispiel 1.3 (logistisches Wachstum)

Mit einem Wachstungsfaktor c und einer Kapazitätsgrenze $G > 0$ für die Population $P(t)$ erhalten wir die **logistische DGL**:

$$\frac{dP(t)}{dt} = cP(t)[G - P(t)]$$

Beispiel 1.3 (logistisches Wachstum)

Mit einem Wachstungsfaktor c und einer Kapazitätsgrenze $G > 0$ für die Population $P(t)$ erhalten wir die **logistische DGL**:

$$\frac{dP(t)}{dt} = cP(t)[G - P(t)]$$

Lösung (FTB, S. 67):

Beispiel 1.3 (logistisches Wachstum)

Mit einem Wachstungsfaktor c und einer Kapazitätsgrenze $G > 0$ für die Population $P(t)$ erhalten wir die **logistische DGL**:

$$\frac{dP(t)}{dt} = cP(t)[G - P(t)]$$

Lösung (FTB, S. 67):

$$P(t) = \frac{G}{1 + aGe^{-cGt}}$$

Beispiel 1.3 (logistisches Wachstum)

Mit einem Wachstungsfaktor c und einer Kapazitätsgrenze $G > 0$ für die Population $P(t)$ erhalten wir die **logistische DGL**:

$$\frac{dP(t)}{dt} = cP(t)[G - P(t)]$$

Lösung (FTB, S. 67):

$$P(t) = \frac{G}{1 + aGe^{-cGt}}$$

Die Konstante a kann durch eine Anfangsbedingung $P(0) = P_0$ bestimmt werden.

Kontrolle

$$\frac{dP(t)}{dt}$$

Kontrolle

$$\frac{dP(t)}{dt} = \frac{0 - G(0 - acG^2e^{-cGt})}{[1 + aGe^{-cGt}]^2}$$

Kontrolle

$$\frac{dP(t)}{dt} = \frac{0 - G(0 - acG^2e^{-cGt})}{[1 + aGe^{-cGt}]^2} = \frac{acG^3e^{-cGt}}{[1 + aGe^{-cGt}]^2}$$

Kontrolle

$$\frac{dP(t)}{dt} = \frac{0 - G(0 - acG^2e^{-cGt})}{[1 + aGe^{-cGt}]^2} = \frac{acG^3e^{-cGt}}{[1 + aGe^{-cGt}]^2}$$

$$cP(t)(G - P(t))$$

Kontrolle

$$\frac{dP(t)}{dt} = \frac{0 - G(0 - acG^2e^{-cGt})}{[1 + aGe^{-cGt}]^2} = \frac{acG^3e^{-cGt}}{[1 + aGe^{-cGt}]^2}$$

$$cP(t)(G - P(t)) = \frac{cG}{1 + aGe^{-cGt}} \cdot \frac{G(1 + aGe^{-cGt}) - G}{1 + aGe^{-cGt}}$$

Kontrolle

$$\frac{dP(t)}{dt} = \frac{0 - G(0 - acG^2e^{-cGt})}{[1 + aGe^{-cGt}]^2} = \frac{acG^3e^{-cGt}}{[1 + aGe^{-cGt}]^2}$$

$$\begin{aligned} cP(t)(G - P(t)) &= \frac{cG}{1 + aGe^{-cGt}} \cdot \frac{G(1 + aGe^{-cGt}) - G}{1 + aGe^{-cGt}} \\ &= \frac{acG^3e^{-cGt}}{[1 + aGe^{-cGt}]^2} \end{aligned}$$

Kontrolle

$$\frac{dP(t)}{dt} = \frac{0 - G(0 - acG^2e^{-cGt})}{[1 + aGe^{-cGt}]^2} = \frac{acG^3e^{-cGt}}{[1 + aGe^{-cGt}]^2}$$

$$\begin{aligned} cP(t)(G - P(t)) &= \frac{cG}{1 + aGe^{-cGt}} \cdot \frac{G(1 + aGe^{-cGt}) - G}{1 + aGe^{-cGt}} \\ &= \frac{acG^3e^{-cGt}}{[1 + aGe^{-cGt}]^2} \end{aligned}$$

ok

Asymptotisches Verhalten

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P(t)$$

Asymptotisches Verhalten

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P(t) = \frac{G}{1 + aG \cdot 0}$$

Asymptotisches Verhalten

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P(t) = \frac{G}{1 + aG \cdot 0} = G$$

Asymptotisches Verhalten

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P(t) = \frac{G}{1 + aG \cdot 0} = G$$

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} P(t)$$

Asymptotisches Verhalten

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P(t) = \frac{G}{1 + aG \cdot 0} = G$$

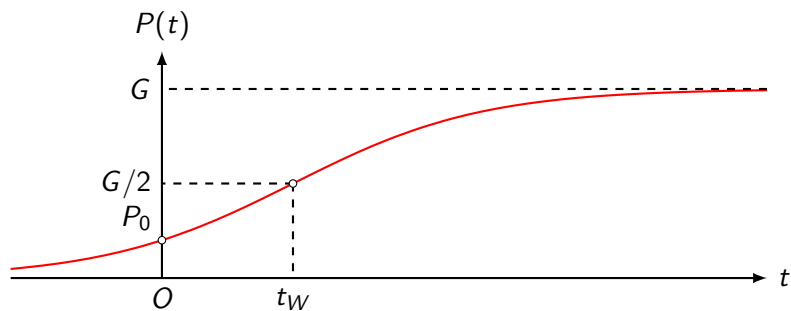
$$\lim_{t \rightarrow -\infty} P(t) = \frac{G}{1 + aG \cdot \infty}$$

Asymptotisches Verhalten

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P(t) = \frac{G}{1 + aG \cdot 0} = G$$

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} P(t) = \frac{G}{1 + aG \cdot \infty} = 0$$

Graph



Wann nimmt die Zunahme ab? (Wendestelle?)

Wann nimmt die Zunahme ab? (Wendestelle?)

$$\dot{P} = cP(G - P) \quad (\text{DGL})$$

Wann nimmt die Zunahme ab? (Wendestelle?)

$$\dot{P} = cP(G - P) \quad (\text{DGL})$$

$$\ddot{P} = c\dot{P}(G - P) + cP(0 - \dot{P})$$

Wann nimmt die Zunahme ab? (Wendestelle?)

$$\dot{P} = cP(G - P) \quad (\text{DGL})$$

$$\ddot{P} = c\dot{P}(G - P) + cP(0 - \dot{P})$$

$$0 = c\dot{P}(G - P) + cP(0 - \dot{P})$$

Wann nimmt die Zunahme ab? (Wendestelle?)

$$\dot{P} = cP(G - P) \quad (\text{DGL})$$

$$\ddot{P} = c\dot{P}(G - P) + cP(0 - \dot{P})$$

$$0 = c\dot{P}(G - P) + cP(0 - \dot{P})$$

$$0 = \dot{P}(G - P) - P\dot{P}$$

Wann nimmt die Zunahme ab? (Wendestelle?)

$$\dot{P} = cP(G - P) \quad (\text{DGL})$$

$$\ddot{P} = c\dot{P}(G - P) + cP(0 - \dot{P})$$

$$0 = c\dot{P}(G - P) + cP(0 - \dot{P})$$

$$0 = \dot{P}(G - P) - P\dot{P}$$

$$0 = \dot{P}(G - 2P) \quad (\dot{P} > 0)$$

Wann nimmt die Zunahme ab? (Wendestelle?)

$$\dot{P} = cP(G - P) \quad (\text{DGL})$$

$$\ddot{P} = c\dot{P}(G - P) + cP(0 - \dot{P})$$

$$0 = c\dot{P}(G - P) + cP(0 - \dot{P})$$

$$0 = \dot{P}(G - P) - P\dot{P}$$

$$0 = \dot{P}(G - 2P) \quad (\dot{P} > 0)$$

$$0 = G - 2P$$

Wann nimmt die Zunahme ab? (Wendestelle?)

$$\dot{P} = cP(G - P) \quad (\text{DGL})$$

$$\ddot{P} = c\dot{P}(G - P) + cP(0 - \dot{P})$$

$$0 = c\dot{P}(G - P) + cP(0 - \dot{P})$$

$$0 = \dot{P}(G - P) - P\dot{P}$$

$$0 = \dot{P}(G - 2P) \quad (\dot{P} > 0)$$

$$0 = G - 2P$$

Nach Erreichen der halben Kapazitätsgrenze: $P(t) = \frac{1}{2}G$

Beispiel 1.4 (Verbreitung von Gerüchten)

Gegeben: menschliche Population der festen Grösse N

Mundpropaganda: Informationsverbreitung nur durch Personen

Beispiel 1.4 (Verbreitung von Gerüchten)

Gegeben: menschliche Population der festen Grösse N

Mundpropaganda: Informationsverbreitung nur durch Personen

$I(t)$: Anzahl der zur Zeit t informierten Personen

Beispiel 1.4 (Verbreitung von Gerüchten)

Gegeben: menschliche Population der festen Grösse N

Mundpropaganda: Informationsverbreitung nur durch Personen

$I(t)$: Anzahl der zur Zeit t informierten Personen

k : Anzahl Kontakte einer Person pro Zeiteinheit mit anderen

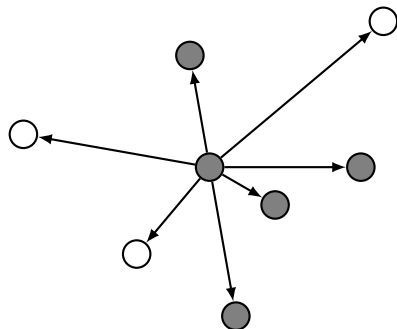
Beispiel 1.4 (Verbreitung von Gerüchten)

Gegeben: menschliche Population der festen Grösse N

Mundpropaganda: Informationsverbreitung nur durch Personen

$I(t)$: Anzahl der zur Zeit t informierten Personen

k : Anzahl Kontakte einer Person pro Zeiteinheit mit anderen



Bruchteil der *Nichtinformierten* zum Zeitpunkt t :

Bruchteil der *Nichtinformierten* zum Zeitpunkt t :

$$\frac{N - I(t)}{N}$$

Bruchteil der *Nichtinformierten* zum Zeitpunkt t :

$$\frac{N - I(t)}{N}$$

Anzahl der nichtinformierten Personen, die in einer kleinen Zeitspanne dt durch *eine* Person informiert werden:

Bruchteil der *Nichtinformierten* zum Zeitpunkt t :

$$\frac{N - I(t)}{N}$$

Anzahl der nichtinformierten Personen, die in einer kleinen Zeitspanne dt durch *eine* Person informiert werden:

$$k \cdot \frac{N - I(t)}{N} \cdot dt$$

Bruchteil der *Nichtinformierten* zum Zeitpunkt t :

$$\frac{N - I(t)}{N}$$

Anzahl der nichtinformierten Personen, die in einer kleinen Zeitspanne dt durch *eine* Person informiert werden:

$$k \cdot \frac{N - I(t)}{N} \cdot dt$$

Änderungsrate der Informierten:

Bruchteil der *Nichtinformierten* zum Zeitpunkt t :

$$\frac{N - I(t)}{N}$$

Anzahl der nichtinformierten Personen, die in einer kleinen Zeitspanne dt durch *eine* Person informiert werden:

$$k \cdot \frac{N - I(t)}{N} \cdot dt$$

Änderungsrate der Informierten:

$$dI(t) = I(t) \cdot k \cdot \frac{N - I(t)}{N} \cdot dt$$

Bruchteil der *Nichtinformierten* zum Zeitpunkt t :

$$\frac{N - I(t)}{N}$$

Anzahl der nichtinformierten Personen, die in einer kleinen Zeitspanne dt durch *eine* Person informiert werden:

$$k \cdot \frac{N - I(t)}{N} \cdot dt$$

Änderungsrate der Informierten:

$$dI(t) = I(t) \cdot k \cdot \frac{N - I(t)}{N} \cdot dt$$

$$\frac{dI(t)}{dt} = I(t) \cdot k \cdot \frac{N - I(t)}{N}$$

Bruchteil der *Nichtinformierten* zum Zeitpunkt t :

$$\frac{N - I(t)}{N}$$

Anzahl der nichtinformierten Personen, die in einer kleinen Zeitspanne dt durch *eine* Person informiert werden:

$$k \cdot \frac{N - I(t)}{N} \cdot dt$$

Änderungsrate der Informierten:

$$dI(t) = I(t) \cdot k \cdot \frac{N - I(t)}{N} \cdot dt$$

$$\frac{dI(t)}{dt} = I(t) \cdot k \cdot \frac{N - I(t)}{N}$$

$$I'(t) = k \cdot I(t) - \frac{k}{N} \cdot I^2(t)$$

Bruchteil der *Nichtinformierten* zum Zeitpunkt t :

$$\frac{N - I(t)}{N}$$

Anzahl der nichtinformierten Personen, die in einer kleinen Zeitspanne dt durch *eine* Person informiert werden:

$$k \cdot \frac{N - I(t)}{N} \cdot dt$$

Änderungsrate der Informierten:

$$dI(t) = I(t) \cdot k \cdot \frac{N - I(t)}{N} \cdot dt$$

$$\frac{dI(t)}{dt} = I(t) \cdot k \cdot \frac{N - I(t)}{N}$$

$$I'(t) = k \cdot I(t) - \frac{k}{N} \cdot I^2(t) = \frac{k}{N} \cdot I(t)(N - I(t))$$

Lösung (FTB S. 67):

$$I(t) = \frac{N}{1 + aNe^{-kt}}$$

Lösung (FTB S. 67):

$$I(t) = \frac{N}{1 + aNe^{-kt}}$$

a kann durch einen Anfangswert $I(0) = I_0$ bestimmt werden.

Lösung (FTB S. 67):

$$I(t) = \frac{N}{1 + aNe^{-kt}}$$

a kann durch einen Anfangswert $I(0) = I_0$ bestimmt werden.

Partielle Ableitungen

Ist

$$z = f(x, y) = -\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} + 2x + 2y + 4$$

eine Funktion in den Variablen x und y , so ist die **partielle Ableitung von f bezüglich x [bzw. y]** die „gewöhnliche“ Ableitung von f nach der Variablen x [bzw. y],

Partielle Ableitungen

während die Variable y [bzw. x] als Konstante betrachtet wird.

Partielle Ableitungen

während die Variable y [bzw. x] als Konstante betrachtet wird.

Konkret:

► $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}$

Partielle Ableitungen

während die Variable y [bzw. x] als Konstante betrachtet wird.

Konkret:

$$\blacktriangleright \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = -x + 2$$

Partielle Ableitungen

während die Variable y [bzw. x] als Konstante betrachtet wird.

Konkret:

$$\blacktriangleright \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = -x + 2$$

$$\blacktriangleright \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$$

Partielle Ableitungen

während die Variable y [bzw. x] als Konstante betrachtet wird.

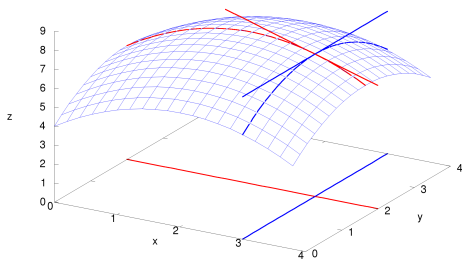
Konkret:

$$\blacktriangleright \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = -x + 2$$

$$\blacktriangleright \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = -y + 2$$

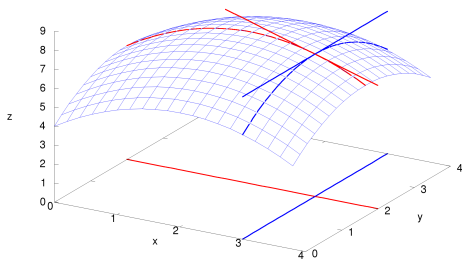
Geometrische Deutung

Graph der Funktion $z = f(x, y) = -\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} + 2x + 2y + 4$



Geometrische Deutung

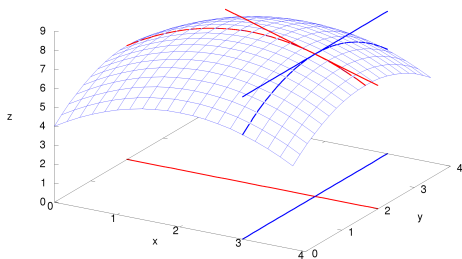
Graph der Funktion $z = f(x, y) = -\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} + 2x + 2y + 4$



Steigung der Tangente in $P(3, 2)$ in Richtung von x :

Geometrische Deutung

Graph der Funktion $z = f(x, y) = -\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} + 2x + 2y + 4$

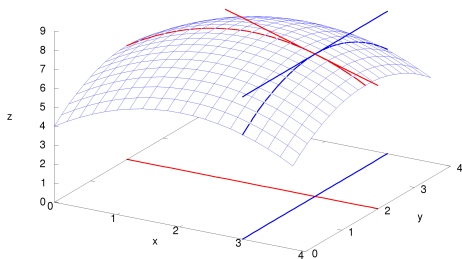


Steigung der Tangente in $P(3, 2)$ in Richtung von x :

$$\left. \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right|_{(x, y) = (3, 2)}$$

Geometrische Deutung

Graph der Funktion $z = f(x, y) = -\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} + 2x + 2y + 4$



Steigung der Tangente in $P(3, 2)$ in Richtung von x :

$$\left. \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right|_{(x, y) = (3, 2)} = -3 + 2 = -1$$

Beispiele partieller Ableitungen

Gegeben: $y(t, x) = 3t^2x + t \sin x$

Beispiele partieller Ableitungen

Gegeben: $y(t, x) = 3t^2x + t \sin x$

► $\frac{\partial y}{\partial t} =$

Beispiele partieller Ableitungen

Gegeben: $y(t, x) = 3t^2x + t \sin x$

$$\blacktriangleright \frac{\partial y}{\partial t} = 6tx + \sin x$$

Beispiele partieller Ableitungen

Gegeben: $y(t, x) = 3t^2x + t \sin x$

$$\blacktriangleright \frac{\partial y}{\partial t} = 6tx + \sin x$$

$$\blacktriangleright \frac{\partial y}{\partial x} =$$

Beispiele partieller Ableitungen

Gegeben: $y(t, x) = 3t^2x + t \sin x$

$$\blacktriangleright \frac{\partial y}{\partial t} = 6tx + \sin x$$

$$\blacktriangleright \frac{\partial y}{\partial x} = 3t^2 + t \cos x$$

Beispiele partieller Ableitungen

Gegeben: $y(t, x) = 3t^2x + t \sin x$

$$\blacktriangleright \frac{\partial y}{\partial t} = 6tx + \sin x$$

$$\blacktriangleright \frac{\partial y}{\partial x} = 3t^2 + t \cos x$$

$$\blacktriangleright \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial t} \stackrel{\text{Def.}}{=} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right) =$$

Beispiele partieller Ableitungen

Gegeben: $y(t, x) = 3t^2x + t \sin x$

$$\blacktriangleright \frac{\partial y}{\partial t} = 6tx + \sin x$$

$$\blacktriangleright \frac{\partial y}{\partial x} = 3t^2 + t \cos x$$

$$\blacktriangleright \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial t} \stackrel{\text{Def.}}{=} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (6tx + \sin x) =$$

Beispiele partieller Ableitungen

Gegeben: $y(t, x) = 3t^2x + t \sin x$

$$\blacktriangleright \frac{\partial y}{\partial t} = 6tx + \sin x$$

$$\blacktriangleright \frac{\partial y}{\partial x} = 3t^2 + t \cos x$$

$$\blacktriangleright \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial t} \stackrel{\text{Def.}}{=} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (6tx + \sin x) = 6t + \cos x$$

Beispiele partieller Ableitungen

Gegeben: $y(t, x) = 3t^2x + t \sin x$

$$\blacktriangleright \frac{\partial y}{\partial t} = 6tx + \sin x$$

$$\blacktriangleright \frac{\partial y}{\partial x} = 3t^2 + t \cos x$$

$$\blacktriangleright \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial t} \stackrel{\text{Def.}}{=} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (6tx + \sin x) = 6t + \cos x$$

$$\blacktriangleright \frac{\partial^2 y}{\partial t \partial x}$$

Beispiele partieller Ableitungen

Gegeben: $y(t, x) = 3t^2x + t \sin x$

$$\blacktriangleright \frac{\partial y}{\partial t} = 6tx + \sin x$$

$$\blacktriangleright \frac{\partial y}{\partial x} = 3t^2 + t \cos x$$

$$\blacktriangleright \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial t} \stackrel{\text{Def.}}{=} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (6tx + \sin x) = 6t + \cos x$$

$$\blacktriangleright \frac{\partial^2 y}{\partial t \partial x} =$$

Beispiele partieller Ableitungen

Gegeben: $y(t, x) = 3t^2x + t \sin x$

$$\blacktriangleright \frac{\partial y}{\partial t} = 6tx + \sin x$$

$$\blacktriangleright \frac{\partial y}{\partial x} = 3t^2 + t \cos x$$

$$\blacktriangleright \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial t} \stackrel{\text{Def.}}{=} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (6tx + \sin x) = 6t + \cos x$$

$$\blacktriangleright \frac{\partial^2 y}{\partial t \partial x} = \frac{\partial}{\partial t} (3t^2 + t \cos x) =$$

Beispiele partieller Ableitungen

Gegeben: $y(t, x) = 3t^2x + t \sin x$

$$\blacktriangleright \frac{\partial y}{\partial t} = 6tx + \sin x$$

$$\blacktriangleright \frac{\partial y}{\partial x} = 3t^2 + t \cos x$$

$$\blacktriangleright \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial t} \stackrel{\text{Def.}}{=} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (6tx + \sin x) = 6t + \cos x$$

$$\blacktriangleright \frac{\partial^2 y}{\partial t \partial x} = \frac{\partial}{\partial t} (3t^2 + t \cos x) = 6t + \cos x$$

Beispiele partieller Ableitungen

Gegeben: $y(t, x) = 3t^2x + t \sin x$

$$\blacktriangleright \frac{\partial y}{\partial t} = 6tx + \sin x$$

$$\blacktriangleright \frac{\partial y}{\partial x} = 3t^2 + t \cos x$$

$$\blacktriangleright \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial t} \stackrel{\text{Def.}}{=} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (6tx + \sin x) = 6t + \cos x$$

$$\blacktriangleright \frac{\partial^2 y}{\partial t \partial x} = \frac{\partial}{\partial t} (3t^2 + t \cos x) = 6t + \cos x$$

$$\blacktriangleright \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \stackrel{\text{Def.}}{=} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right) =$$

Beispiele partieller Ableitungen

Gegeben: $y(t, x) = 3t^2x + t \sin x$

$$\blacktriangleright \frac{\partial y}{\partial t} = 6tx + \sin x$$

$$\blacktriangleright \frac{\partial y}{\partial x} = 3t^2 + t \cos x$$

$$\blacktriangleright \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial t} \stackrel{\text{Def.}}{=} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (6tx + \sin x) = 6t + \cos x$$

$$\blacktriangleright \frac{\partial^2 y}{\partial t \partial x} = \frac{\partial}{\partial t} (3t^2 + t \cos x) = 6t + \cos x$$

$$\blacktriangleright \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \stackrel{\text{Def.}}{=} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} (6tx + \sin x) =$$

Beispiele partieller Ableitungen

Gegeben: $y(t, x) = 3t^2x + t \sin x$

$$\blacktriangleright \frac{\partial y}{\partial t} = 6tx + \sin x$$

$$\blacktriangleright \frac{\partial y}{\partial x} = 3t^2 + t \cos x$$

$$\blacktriangleright \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial t} \stackrel{\text{Def.}}{=} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (6tx + \sin x) = 6t + \cos x$$

$$\blacktriangleright \frac{\partial^2 y}{\partial t \partial x} = \frac{\partial}{\partial t} (3t^2 + t \cos x) = 6t + \cos x$$

$$\blacktriangleright \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \stackrel{\text{Def.}}{=} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} (6tx + \sin x) = 6x$$

Gewöhnliche und partielle Differenzialgleichungen

1. $y'' + y' = xy + 2$

Gewöhnliche und partielle Differenzialgleichungen

1. $y'' + y' = xy + 2$ gewöhnliche DGL

Gewöhnliche und partielle Differenzialgleichungen

1. $y'' + y' = xy + 2$ **gewöhnliche DGL**

2. $\frac{\partial y(x, t)}{\partial x} + \frac{\partial y(x, t)}{\partial t} = y$

Gewöhnliche und partielle Differenzialgleichungen

1. $y'' + y' = xy + 2$ gewöhnliche DGL

2. $\frac{\partial y(x, t)}{\partial x} + \frac{\partial y(x, t)}{\partial t} = y$ partielle DGL

Gewöhnliche und partielle Differenzialgleichungen

1. $y'' + y' = xy + 2$ gewöhnliche DGL

2. $\frac{\partial y(x, t)}{\partial x} + \frac{\partial y(x, t)}{\partial t} = y$ partielle DGL

3. $\frac{\partial^2 y(x_1, x_2)}{\partial^2 x_1} + \frac{\partial^2 y(x_1, x_2)}{\partial^2 x_2} = 0$

Gewöhnliche und partielle Differenzialgleichungen

1. $y'' + y' = xy + 2$ gewöhnliche DGL

2. $\frac{\partial y(x, t)}{\partial x} + \frac{\partial y(x, t)}{\partial t} = y$ partielle DGL

3. $\frac{\partial^2 y(x_1, x_2)}{\partial^2 x_1} + \frac{\partial^2 y(x_1, x_2)}{\partial^2 x_2} = 0$ partielle DGL

Gewöhnliche und partielle Differenzialgleichungen

1. $y'' + y' = xy + 2$ gewöhnliche DGL

2. $\frac{\partial y(x, t)}{\partial x} + \frac{\partial y(x, t)}{\partial t} = y$ partielle DGL

3. $\frac{\partial^2 y(x_1, x_2)}{\partial^2 x_1} + \frac{\partial^2 y(x_1, x_2)}{\partial^2 x_2} = 0$ partielle DGL

4. $(2y')^2 - \frac{x}{y'} = \sin(x)$

Gewöhnliche und partielle Differenzialgleichungen

1. $y'' + y' = xy + 2$ gewöhnliche DGL

2. $\frac{\partial y(x, t)}{\partial x} + \frac{\partial y(x, t)}{\partial t} = y$ partielle DGL

3. $\frac{\partial^2 y(x_1, x_2)}{\partial^2 x_1} + \frac{\partial^2 y(x_1, x_2)}{\partial^2 x_2} = 0$ partielle DGL

4. $(2y')^2 - \frac{x}{y'} = \sin(x)$ gewöhnliche DGL

Gewöhnliche und partielle Differenzialgleichungen

1. $y'' + y' = xy + 2$ **gewöhnliche DGL**

2. $\frac{\partial y(x, t)}{\partial x} + \frac{\partial y(x, t)}{\partial t} = y$ **partielle DGL**

3. $\frac{\partial^2 y(x_1, x_2)}{\partial^2 x_1} + \frac{\partial^2 y(x_1, x_2)}{\partial^2 x_2} = 0$ **partielle DGL**

4. $(2y')^2 - \frac{x}{y'} = \sin(x)$ **gewöhnliche DGL**

Partielle Differenzialgleichungen müssen nur als solche erkannt werden; sie werden hier im Unterricht aber nicht behandelt.

Gewöhnliche und partielle Differenzialgleichungen

1. $y'' + y' = xy + 2$ **gewöhnliche DGL**

2. $\frac{\partial y(x, t)}{\partial x} + \frac{\partial y(x, t)}{\partial t} = y$ **partielle DGL**

3. $\frac{\partial^2 y(x_1, x_2)}{\partial^2 x_1} + \frac{\partial^2 y(x_1, x_2)}{\partial^2 x_2} = 0$ **partielle DGL**

4. $(2y')^2 - \frac{x}{y'} = \sin(x)$ **gewöhnliche DGL**

Partielle Differenzialgleichungen müssen nur als solche erkannt werden; sie werden hier im Unterricht aber nicht behandelt.

Die folgenden Begriffe beziehen sich auf *gewöhnliche* DGL.

Gewöhnliche und partielle Differenzialgleichungen

1. $y'' + y' = xy + 2$ **gewöhnliche DGL**

2. $\frac{\partial y(x, t)}{\partial x} + \frac{\partial y(x, t)}{\partial t} = y$ **partielle DGL**

3. $\frac{\partial^2 y(x_1, x_2)}{\partial^2 x_1} + \frac{\partial^2 y(x_1, x_2)}{\partial^2 x_2} = 0$ **partielle DGL**

4. $(2y')^2 - \frac{x}{y'} = \sin(x)$ **gewöhnliche DGL**

Partielle Differenzialgleichungen müssen nur als solche erkannt werden; sie werden hier im Unterricht aber nicht behandelt.

Die folgenden Begriffe beziehen sich auf *gewöhnliche* DGL.

Wenn nichts anderes steht, ist $y = y(x)$ eine Funktion von x .

Die Ordnung einer Differenzialgleichung

1. $y'' + y' = xy + 2$

Die Ordnung einer Differenzialgleichung

1. $y'' + y' = xy + 2$ Ordnung 2

Die Ordnung einer Differenzialgleichung

1. $y'' + y' = xy + 2$ **Ordnung 2**

2. $t \frac{\partial y(x, t)}{\partial x} + x \frac{\partial y(x, t)}{\partial t} = y$

Die Ordnung einer Differenzialgleichung

1. $y'' + y' = xy + 2$ Ordnung 2

2. $t \frac{\partial y(x, t)}{\partial x} + x \frac{\partial y(x, t)}{\partial t} = y$ Ordnung 1

Die Ordnung einer Differenzialgleichung

1. $y'' + y' = xy + 2$ **Ordnung 2**

2. $t \frac{\partial y(x, t)}{\partial x} + x \frac{\partial y(x, t)}{\partial t} = y$ **Ordnung 1**

3. $y + 2xy'' - (y^{(4)})^2 = 3x$

Die Ordnung einer Differenzialgleichung

1. $y'' + y' = xy + 2$ Ordnung 2

2. $t \frac{\partial y(x, t)}{\partial x} + x \frac{\partial y(x, t)}{\partial t} = y$ Ordnung 1

3. $y + 2xy'' - (y^{(4)})^2 = 3x$ Ordnung 4

Die Ordnung einer Differenzialgleichung

1. $y'' + y' = xy + 2$ **Ordnung 2**

2. $t \frac{\partial y(x, t)}{\partial x} + x \frac{\partial y(x, t)}{\partial t} = y$ **Ordnung 1**

3. $y + 2xy'' - (y^{(4)})^2 = 3x$ **Ordnung 4**

4. $\frac{\partial^2 y(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_1^2} = \frac{\partial^3 y(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_3 \partial x_2 \partial x_1}$

Die Ordnung einer Differenzialgleichung

1. $y'' + y' = xy + 2$ Ordnung 2

2. $t \frac{\partial y(x, t)}{\partial x} + x \frac{\partial y(x, t)}{\partial t} = y$ Ordnung 1

3. $y + 2xy'' - (y^{(4)})^2 = 3x$ Ordnung 4

4. $\frac{\partial^2 y(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_1^2} = \frac{\partial^3 y(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_3 \partial x_2 \partial x_1}$ Ordnung 3

Die Ordnung einer Differenzialgleichung

1. $y'' + y' = xy + 2$ Ordnung 2

2. $t \frac{\partial y(x, t)}{\partial x} + x \frac{\partial y(x, t)}{\partial t} = y$ Ordnung 1

3. $y + 2xy'' - (y^{(4)})^2 = 3x$ Ordnung 4

4. $\frac{\partial^2 y(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_1^2} = \frac{\partial^3 y(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_3 \partial x_2 \partial x_1}$ Ordnung 3

Ordnung: maximal auftretende (partielle) Ableitung

Homogene und inhomogene Differenzialgleichungen

1. $y''' + 2y'' + 3y = 4x$

Homogene und inhomogene Differenzialgleichungen

1. $y''' + 2y'' + 3y = 4x$ inhomogene DGL

Homogene und inhomogene Differenzialgleichungen

1. $y''' + 2y'' + 3y = 4x$ inhomogene DGL

2. $y''' + 2y'' + 3y^2 = 0$

Homogene und inhomogene Differenzialgleichungen

1. $y''' + 2y'' + 3y = 4x$ inhomogene DGL

2. $y''' + 2y'' + 3y^2 = 0$ homogene DGL

Homogene und inhomogene Differenzialgleichungen

1. $y''' + 2y'' + 3y = 4x$ inhomogene DGL

2. $y''' + 2y'' + 3y^2 = 0$ homogene DGL

3. $3y''' - 5y'' = xy'$

Homogene und inhomogene Differenzialgleichungen

1. $y''' + 2y'' + 3y = 4x$ inhomogene DGL

2. $y''' + 2y'' + 3y^2 = 0$ homogene DGL

3. $3y''' - 5y'' = xy'$ homogene DGL

Homogene und inhomogene Differenzialgleichungen

1. $y''' + 2y'' + 3y = 4x$ inhomogene DGL

2. $y''' + 2y'' + 3y^2 = 0$ homogene DGL

3. $3y''' - 5y'' = xy'$ homogene DGL

4. $2y'' - yy' = 4$

Homogene und inhomogene Differenzialgleichungen

1. $y''' + 2y'' + 3y = 4x$ inhomogene DGL

2. $y''' + 2y'' + 3y^2 = 0$ homogene DGL

3. $3y''' - 5y'' = xy'$ homogene DGL

4. $2y'' - yy' = 4$ inhomogene DGL

Homogene und inhomogene Differenzialgleichungen

1. $y''' + 2y'' + 3y = 4x$ inhomogene DGL

2. $y''' + 2y'' + 3y^2 = 0$ homogene DGL

3. $3y''' - 5y'' = xy'$ homogene DGL

4. $2y'' - yy' = 4$ inhomogene DGL

5. $yy'' - x + 1 = 0$

Homogene und inhomogene Differenzialgleichungen

1. $y''' + 2y'' + 3y = 4x$ inhomogene DGL

2. $y''' + 2y'' + 3y^2 = 0$ homogene DGL

3. $3y''' - 5y'' = xy'$ homogene DGL

4. $2y'' - yy' = 4$ inhomogene DGL

5. $yy'' - x + 1 = 0$ inhomogene DGL

Homogene und inhomogene Differenzialgleichungen

1. $y''' + 2y'' + 3y = 4x$ inhomogene DGL

2. $y''' + 2y'' + 3y^2 = 0$ homogene DGL

3. $3y''' - 5y'' = xy'$ homogene DGL

4. $2y'' - yy' = 4$ inhomogene DGL

5. $yy'' - x + 1 = 0$ inhomogene DGL

homogen: *nur* Summanden, die mindestens einen Faktor mit y oder y' oder y'' ... enthalten.

Lineare und nichtlineare Differenzialgleichungen

1. $y''' + 2y'' + 3y = 4x^2$

Lineare und nichtlineare Differenzialgleichungen

1. $y''' + 2y'' + 3y = 4x^2$ lineare DGL

Lineare und nichtlineare Differenzialgleichungen

1. $y''' + 2y'' + 3y = 4x^2$ lineare DGL

2. $y''' + 2y'' + 3y^2 = 4x$

Lineare und nichtlineare Differenzialgleichungen

1. $y''' + 2y'' + 3y = 4x^2$ lineare DGL

2. $y''' + 2y'' + 3y^2 = 4x$ nichtlineare DGL

Lineare und nichtlineare Differenzialgleichungen

1. $y''' + 2y'' + 3y = 4x^2$ lineare DGL
2. $y''' + 2y'' + 3y^2 = 4x$ nichtlineare DGL
3. $2y''' - 5y'' - xy' = \sin x$

Lineare und nichtlineare Differenzialgleichungen

1. $y''' + 2y'' + 3y = 4x^2$ lineare DGL
2. $y''' + 2y'' + 3y^2 = 4x$ nichtlineare DGL
3. $2y''' - 5y'' - xy' = \sin x$ lineare DGL

Lineare und nichtlineare Differenzialgleichungen

1. $y''' + 2y'' + 3y = 4x^2$ lineare DGL
2. $y''' + 2y'' + 3y^2 = 4x$ nichtlineare DGL
3. $2y''' - 5y'' - xy' = \sin x$ lineare DGL
4. $2y'' - yy' = 0$

Lineare und nichtlineare Differenzialgleichungen

1. $y''' + 2y'' + 3y = 4x^2$ lineare DGL
2. $y''' + 2y'' + 3y^2 = 4x$ nichtlineare DGL
3. $2y''' - 5y'' - xy' = \sin x$ lineare DGL
4. $2y'' - yy' = 0$ nichtlineare DGL

Lineare und nichtlineare Differenzialgleichungen

1. $y''' + 2y'' + 3y = 4x^2$ lineare DGL
2. $y''' + 2y'' + 3y^2 = 4x$ nichtlineare DGL
3. $2y''' - 5y'' - xy' = \sin x$ lineare DGL
4. $2y'' - yy' = 0$ nichtlineare DGL
5. $2y'' - xy' = 0$

Lineare und nichtlineare Differenzialgleichungen

1. $y''' + 2y'' + 3y = 4x^2$ lineare DGL
2. $y''' + 2y'' + 3y^2 = 4x$ nichtlineare DGL
3. $2y''' - 5y'' - xy' = \sin x$ lineare DGL
4. $2y'' - yy' = 0$ nichtlineare DGL
5. $2y'' - xy' = 0$ lineare DGL

Lineare und nichtlineare Differenzialgleichungen

1. $y''' + 2y'' + 3y = 4x^2$ lineare DGL
2. $y''' + 2y'' + 3y^2 = 4x$ nichtlineare DGL
3. $2y''' - 5y'' - xy' = \sin x$ lineare DGL
4. $2y'' - yy' = 0$ nichtlineare DGL
5. $2y'' - xy' = 0$ lineare DGL
6. $1/y' + 3y = 1$

Lineare und nichtlineare Differenzialgleichungen

1. $y''' + 2y'' + 3y = 4x^2$ lineare DGL
2. $y''' + 2y'' + 3y^2 = 4x$ nichtlineare DGL
3. $2y''' - 5y'' - xy' = \sin x$ lineare DGL
4. $2y'' - yy' = 0$ nichtlineare DGL
5. $2y'' - xy' = 0$ lineare DGL
6. $1/y' + 3y = 1$ nichtlineare DGL

Lineare und nichtlineare Differenzialgleichungen

1. $y''' + 2y'' + 3y = 4x^2$ lineare DGL
2. $y''' + 2y'' + 3y^2 = 4x$ nichtlineare DGL
3. $2y''' - 5y'' - xy' = \sin x$ lineare DGL
4. $2y'' - yy' = 0$ nichtlineare DGL
5. $2y'' - xy' = 0$ lineare DGL
6. $1/y' + 3y = 1$ nichtlineare DGL
7. $\sqrt{x} y^{(4)} + 2y'x^{-1} = y \cos(x) + 2$

Lineare und nichtlineare Differenzialgleichungen

1. $y''' + 2y'' + 3y = 4x^2$ lineare DGL
2. $y''' + 2y'' + 3y^2 = 4x$ nichtlineare DGL
3. $2y''' - 5y'' - xy' = \sin x$ lineare DGL
4. $2y'' - yy' = 0$ nichtlineare DGL
5. $2y'' - xy' = 0$ lineare DGL
6. $1/y' + 3y = 1$ nichtlineare DGL
7. $\sqrt{x} y^{(4)} + 2y'x^{-1} = y \cos(x) + 2$ lineare DGL

Lineare und nichtlineare Differenzialgleichungen

1. $y''' + 2y'' + 3y = 4x^2$ lineare DGL
2. $y''' + 2y'' + 3y^2 = 4x$ nichtlineare DGL
3. $2y''' - 5y'' - xy' = \sin x$ lineare DGL
4. $2y'' - yy' = 0$ nichtlineare DGL
5. $2y'' - xy' = 0$ lineare DGL
6. $1/y' + 3y = 1$ nichtlineare DGL
7. $\sqrt{x} y^{(4)} + 2y'x^{-1} = y \cos(x) + 2$ lineare DGL

DGL ist nichtlinear, sobald y oder y' oder y'' , ... „nichtlinear“ ist.

Lineare DGL mit konstanten Koeffizienten

Der Ausdruck „mit konstanten Koeffizienten“ wird hier nur im Zusammenhang mit linearen Differenzialgleichungen verwendet.

1. $y''' + 2y'' + 3y = 4x^2$

Lineare DGL mit konstanten Koeffizienten

Der Ausdruck „mit konstanten Koeffizienten“ wird hier nur im Zusammenhang mit linearen Differenzialgleichungen verwendet.

1. $y''' + 2y'' + 3y = 4x^2$ lin. DGL mit konst. Koeff.

Lineare DGL mit konstanten Koeffizienten

Der Ausdruck „mit konstanten Koeffizienten“ wird hier nur im Zusammenhang mit linearen Differenzialgleichungen verwendet.

1. $y''' + 2y'' + 3y = 4x^2$ lin. DGL mit konst. Koeff.

2. $y'' + 4y'' - 5xy = e^x$

Lineare DGL mit konstanten Koeffizienten

Der Ausdruck „mit konstanten Koeffizienten“ wird hier nur im Zusammenhang mit linearen Differenzialgleichungen verwendet.

1. $y''' + 2y'' + 3y = 4x^2$ lin. DGL mit konst. Koeff.

2. $y'' + 4y'' - 5xy = e^x$ lin. DGL

Lineare DGL mit konstanten Koeffizienten

Der Ausdruck „mit konstanten Koeffizienten“ wird hier nur im Zusammenhang mit linearen Differenzialgleichungen verwendet.

1. $y''' + 2y'' + 3y = 4x^2$ lin. DGL mit konst. Koeff.

2. $y'' + 4y'' - 5xy = e^x$ lin. DGL

3. $2y''' - 5y'' = y' - \sqrt{3}y + x^2$

Lineare DGL mit konstanten Koeffizienten

Der Ausdruck „mit konstanten Koeffizienten“ wird hier nur im Zusammenhang mit linearen Differenzialgleichungen verwendet.

1. $y''' + 2y'' + 3y = 4x^2$ lin. DGL mit konst. Koeff.
2. $y'' + 4y'' - 5xy = e^x$ lin. DGL
3. $2y''' - 5y'' = y' - \sqrt{3}y + x^2$ lin. DGL mit konst. Koeff.

Lineare DGL mit konstanten Koeffizienten

Der Ausdruck „mit konstanten Koeffizienten“ wird hier nur im Zusammenhang mit linearen Differenzialgleichungen verwendet.

1. $y''' + 2y'' + 3y = 4x^2$ lin. DGL mit konst. Koeff.

2. $y'' + 4y'' - 5xy = e^x$ lin. DGL

3. $2y''' - 5y'' = y' - \sqrt{3}y + x^2$ lin. DGL mit konst. Koeff.

4. $\frac{1}{x} \cdot y' - 7y = 2x$

Lineare DGL mit konstanten Koeffizienten

Der Ausdruck „mit konstanten Koeffizienten“ wird hier nur im Zusammenhang mit linearen Differenzialgleichungen verwendet.

1. $y''' + 2y'' + 3y = 4x^2$ lin. DGL mit konst. Koeff.

2. $y'' + 4y'' - 5xy = e^x$ lin. DGL

3. $2y''' - 5y'' = y' - \sqrt{3}y + x^2$ lin. DGL mit konst. Koeff.

4. $\frac{1}{x} \cdot y' - 7y = 2x$ lin. DGL

Lineare DGL mit konstanten Koeffizienten

Der Ausdruck „mit konstanten Koeffizienten“ wird hier nur im Zusammenhang mit linearen Differenzialgleichungen verwendet.

1. $y''' + 2y'' + 3y = 4x^2$ lin. DGL mit konst. Koeff.

2. $y'' + 4y'' - 5xy = e^x$ lin. DGL

3. $2y''' - 5y'' = y' - \sqrt{3}y + x^2$ lin. DGL mit konst. Koeff.

4. $\frac{1}{x} \cdot y' - 7y = 2x$ lin. DGL

konstante Koeffizienten: sobald vor y und y' und y'' , ...
Konstanten stehen.

Explizite Differenzialgleichungen

1. $y''' = 2y'' - 3y + 4x + 1$

Explizite Differenzialgleichungen

1. $y''' = 2y'' - 3y + 4x + 1$ explizite DGL

Explizite Differenzialgleichungen

1. $y''' = 2y'' - 3y + 4x + 1$ explizite DGL

2. $y''' - 2y'' + 3y = 4x + 1$

Explizite Differenzialgleichungen

1. $y''' = 2y'' - 3y + 4x + 1$ explizite DGL
2. $y''' - 2y'' + 3y = 4x + 1$ keine explizite DGL

Explizite Differenzialgleichungen

1. $y''' = 2y'' - 3y + 4x + 1$ explizite DGL
2. $y''' - 2y'' + 3y = 4x + 1$ keine explizite DGL
3. $y'' = y' + y''' + x^2$

Explizite Differenzialgleichungen

1. $y''' = 2y'' - 3y + 4x + 1$ explizite DGL
2. $y''' - 2y'' + 3y = 4x + 1$ keine explizite DGL
3. $y'' = y' + y''' + x^2$ keine explizite DGL

Explizite Differenzialgleichungen

1. $y''' = 2y'' - 3y + 4x + 1$ explizite DGL
2. $y''' - 2y'' + 3y = 4x + 1$ keine explizite DGL
3. $y'' = y' + y''' + x^2$ keine explizite DGL
4. $y^{(4)} = 2y''' \cdot 3y''$

Explizite Differenzialgleichungen

1. $y''' = 2y'' - 3y + 4x + 1$ explizite DGL
2. $y''' - 2y'' + 3y = 4x + 1$ keine explizite DGL
3. $y'' = y' + y''' + x^2$ keine explizite DGL
4. $y^{(4)} = 2y''' \cdot 3y''$ explizite DGL

Explizite Differenzialgleichungen

1. $y''' = 2y'' - 3y + 4x + 1$ explizite DGL
2. $y''' - 2y'' + 3y = 4x + 1$ keine explizite DGL
3. $y'' = y' + y''' + x^2$ keine explizite DGL
4. $y^{(4)} = 2y''' \cdot 3y''$ explizite DGL

explizit: DGL ist nach der höchsten Ableitung aufgelöst.

Der Begriff der Differenzialgleichung

Eine Differenzialgleichung n -ter Ordnung hat die Form

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$

Beispiel:

$$x^2 y'' - 4y' = e^y - 3 \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{x^2 y'' - 4y' - e^y + 3}_{F(x, y, y', y'')} = 0$$

Der Begriff der Differenzialgleichung

Eine Differenzialgleichung n -ter Ordnung hat die Form

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$

Beispiel:

$$x^2 y'' - 4y' = e^y - 3 \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{x^2 y'' - 4y' - e^y + 3}_{F(x, y, y', y'')} = 0$$

Die reellwertige Funktion $y(x)$ wird **Lösung** oder **Integral** der DGL auf dem Intervall I genannt, wenn sie n -mal differenzierbar ist und wenn

$$F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0$$

für alle $x \in I$ gilt.

- ▶ Eine Differenzialgleichung braucht keine Lösung zu haben.
 $((y')^2 + 1 = 0)$
- ▶ Eine Differenzialgleichung kann genau eine Lösung haben.
 $((y')^2 + y^2 = 0)$
- ▶ Im Allgemeinen hat eine Differenzialgleichung unendlich viele Lösungen (Lösungsschar).
Hat eine DGL n -ter Ordnung unendlich viele Lösungen, so können wir durch die Wahl der beim Lösen entstehenden $n - 1$ Integrationskonstanten eine spezielle Lösung herausfiltern (Anfangswertproblem).

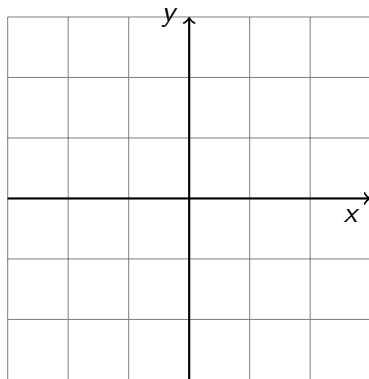
Das Linienelement

Sei $y' = f(x, y)$ eine explizite DGL 1. Ordnung

Dann entspricht y' der Steigung der Tangente an die (unbekannte) Lösungsfunktion im Punkt (x, y)

Beispiel 3.1

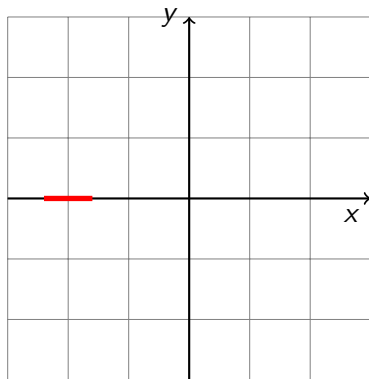
$$y' = y/x$$



Kontrolle: $y' = (mx)' = m$ und $y/x = mx/x = m \quad \forall x \neq 0$

Beispiel 3.1

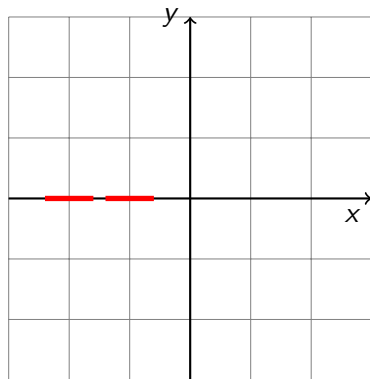
$$y' = y/x$$



Kontrolle: $y' = (mx)' = m$ und $y/x = mx/x = m \quad \forall x \neq 0$

Beispiel 3.1

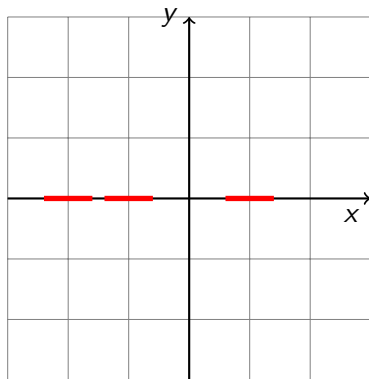
$$y' = y/x$$



Kontrolle: $y' = (mx)' = m$ und $y/x = mx/x = m \quad \forall x \neq 0$

Beispiel 3.1

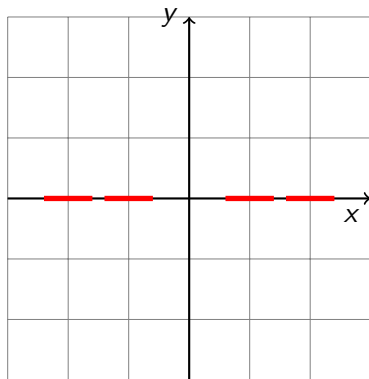
$$y' = y/x$$



Kontrolle: $y' = (mx)' = m$ und $y/x = mx/x = m \quad \forall x \neq 0$

Beispiel 3.1

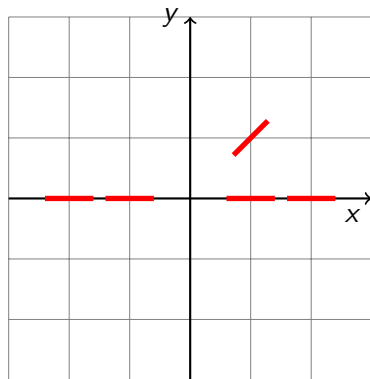
$$y' = y/x$$



Kontrolle: $y' = (mx)' = m$ und $y/x = mx/x = m \quad \forall x \neq 0$

Beispiel 3.1

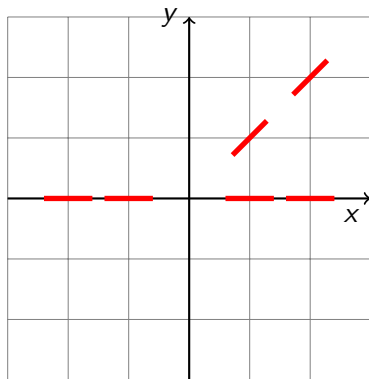
$$y' = y/x$$



Kontrolle: $y' = (mx)' = m$ und $y/x = mx/x = m \quad \forall x \neq 0$

Beispiel 3.1

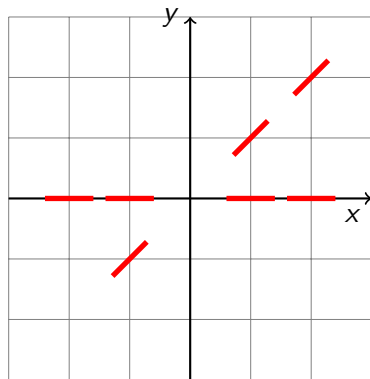
$$y' = y/x$$



Kontrolle: $y' = (mx)' = m$ und $y/x = mx/x = m \quad \forall x \neq 0$

Beispiel 3.1

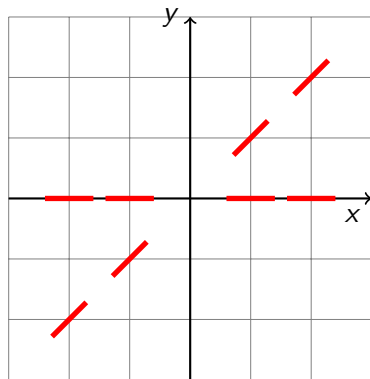
$$y' = y/x$$



Kontrolle: $y' = (mx)' = m$ und $y/x = mx/x = m \quad \forall x \neq 0$

Beispiel 3.1

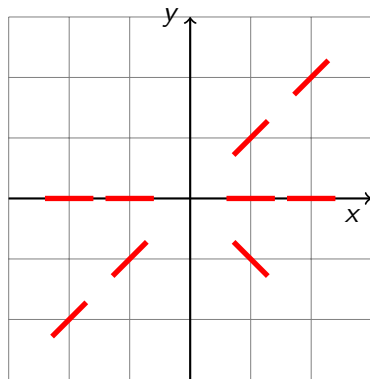
$$y' = y/x$$



Kontrolle: $y' = (mx)' = m$ und $y/x = mx/x = m \quad \forall x \neq 0$

Beispiel 3.1

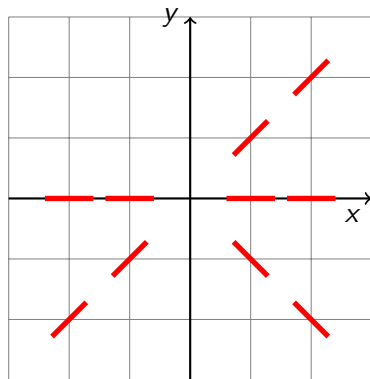
$$y' = y/x$$



Kontrolle: $y' = (mx)' = m$ und $y/x = mx/x = m \quad \forall x \neq 0$

Beispiel 3.1

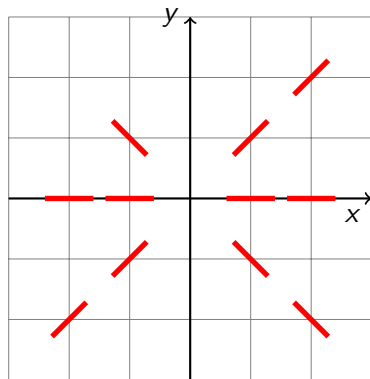
$$y' = y/x$$



Kontrolle: $y' = (mx)' = m$ und $y/x = mx/x = m \quad \forall x \neq 0$

Beispiel 3.1

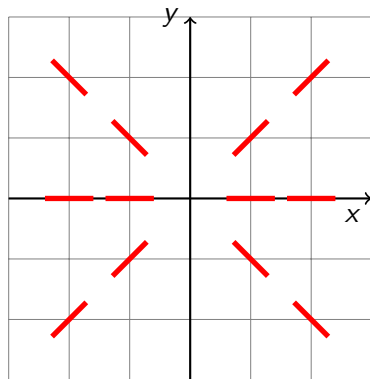
$$y' = y/x$$



Kontrolle: $y' = (mx)' = m$ und $y/x = mx/x = m \quad \forall x \neq 0$

Beispiel 3.1

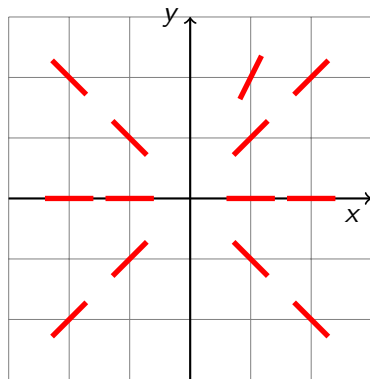
$$y' = y/x$$



Kontrolle: $y' = (mx)' = m$ und $y/x = mx/x = m \quad \forall x \neq 0$

Beispiel 3.1

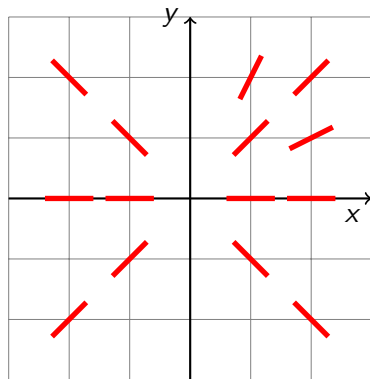
$$y' = y/x$$



Kontrolle: $y' = (mx)' = m$ und $y/x = mx/x = m \quad \forall x \neq 0$

Beispiel 3.1

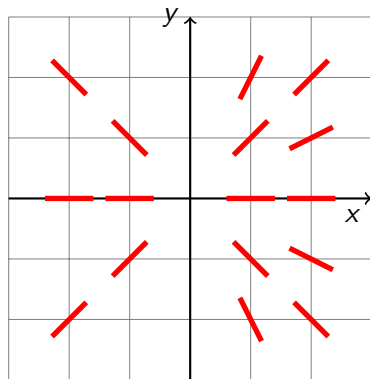
$$y' = y/x$$



Kontrolle: $y' = (mx)' = m$ und $y/x = mx/x = m \quad \forall x \neq 0$

Beispiel 3.1

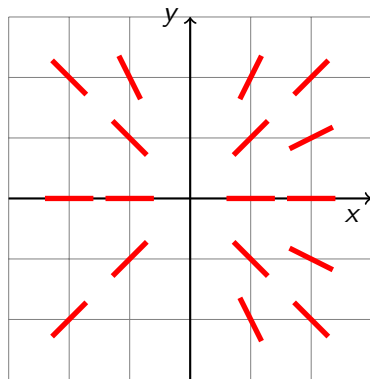
$$y' = y/x$$



Kontrolle: $y' = (mx)' = m$ und $y/x = mx/x = m \quad \forall x \neq 0$

Beispiel 3.1

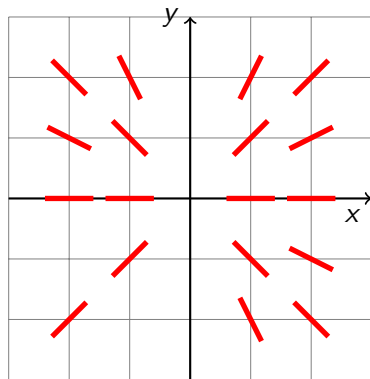
$$y' = y/x$$



Kontrolle: $y' = (mx)' = m$ und $y/x = mx/x = m \quad \forall x \neq 0$

Beispiel 3.1

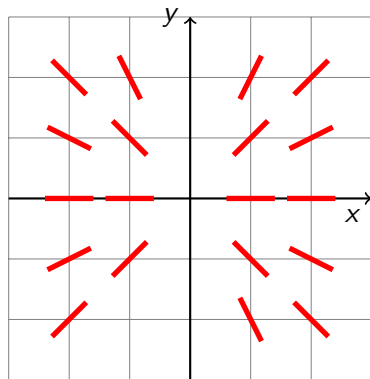
$$y' = y/x$$



Kontrolle: $y' = (mx)' = m$ und $y/x = mx/x = m \quad \forall x \neq 0$

Beispiel 3.1

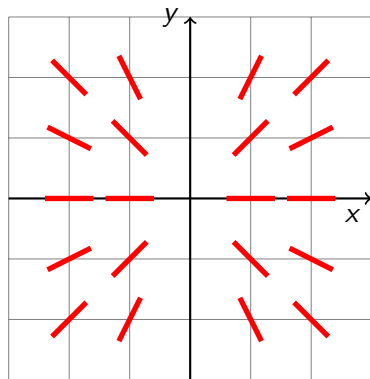
$$y' = y/x$$



Kontrolle: $y' = (mx)' = m$ und $y/x = mx/x = m \quad \forall x \neq 0$

Beispiel 3.1

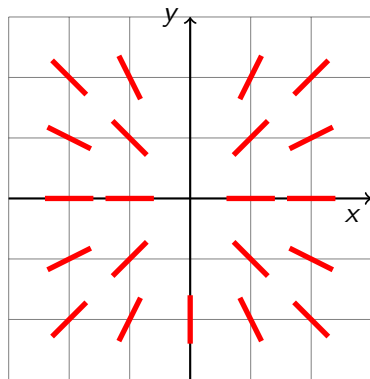
$$y' = y/x$$



Kontrolle: $y' = (mx)' = m$ und $y/x = mx/x = m \quad \forall x \neq 0$

Beispiel 3.1

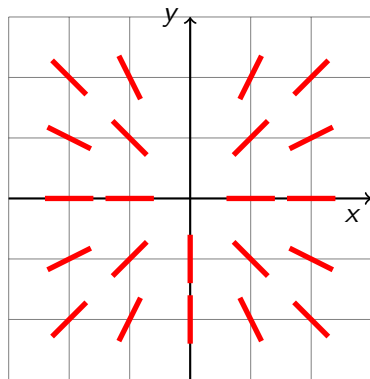
$$y' = y/x$$



Kontrolle: $y' = (mx)' = m$ und $y/x = mx/x = m \quad \forall x \neq 0$

Beispiel 3.1

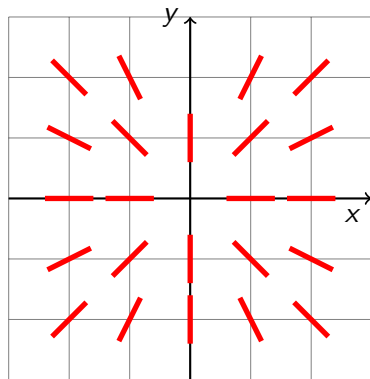
$$y' = y/x$$



Kontrolle: $y' = (mx)' = m$ und $y/x = mx/x = m \quad \forall x \neq 0$

Beispiel 3.1

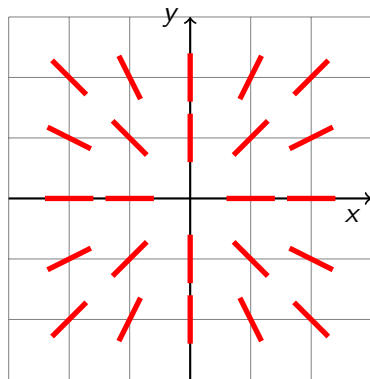
$$y' = y/x$$



Kontrolle: $y' = (mx)' = m$ und $y/x = mx/x = m \quad \forall x \neq 0$

Beispiel 3.1

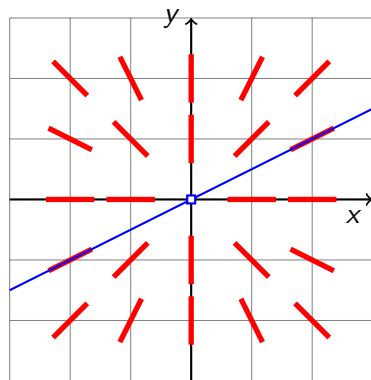
$$y' = y/x$$



Kontrolle: $y' = (mx)' = m$ und $y/x = mx/x = m \quad \forall x \neq 0$

Beispiel 3.1

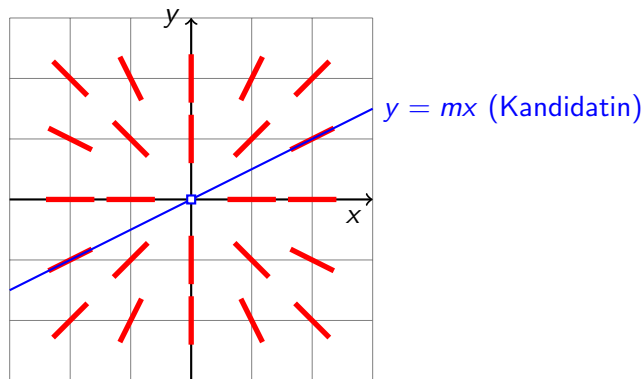
$$y' = y/x$$



$y = mx$ (Kandidatin)

Beispiel 3.1

$$y' = y/x$$



Kontrolle: $y' = (mx)' = m$ und $y/x = mx/x = m \quad \forall x \neq 0$

Der Euler-Cauchy Polygonzug

Gegeben: DGL $y' = f(x, y)$

Der Euler-Cauchy Polygonzug

Gegeben: DGL $y' = f(x, y)$

$$y' = f(x, y) \approx \frac{y(x+h) - y(x)}{h} \quad \text{für kleine } h > 0$$

$$\Rightarrow y(x+h) \approx y(x) + f(x, y)h$$



Das Verfahren von Euler

Es sei $y' = f(x, y)$ eine DGL mit dem Anfangswert (x_0, y_0) .

Berechnet man für eine Schrittweite $h > 0$ an den Stellen

$$x_k = x_0 + k \cdot h \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

die Werte

$$y_{k+1} = y_k + f(x_k, y_k)h \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

so stellen die y_k eine Näherung für die exakten Werte $y(x_k)$ dar.
Diese Näherung wird umso genauer, je kleiner h gewählt wird.

Beispiel 4.1: $y' = y + x$; $x_0 = 0$, $y_0 = 0$; $h = 1$

$$x_0 = 0; y_0 = 0$$

Beispiel 4.1: $y' = y + x$; $x_0 = 0$, $y_0 = 0$; $h = 1$

$$x_0 = 0; y_0 = 0$$

$$x_1 = 1; y_1 = y_0 + f(x_0, y_0)h = 0 + (0 + 0) \cdot 1 = 0$$

Beispiel 4.1: $y' = y + x$; $x_0 = 0$, $y_0 = 0$; $h = 1$

$$x_0 = 0; y_0 = 0$$

$$x_1 = 1; y_1 = y_0 + f(x_0, y_0)h = 0 + (0 + 0) \cdot 1 = 0$$

$$x_2 = 2; y_2 = y_1 + f(x_1, y_1)h = 0 + (1 + 0) \cdot 1 = 1$$

Beispiel 4.1: $y' = y + x$; $x_0 = 0$, $y_0 = 0$; $h = 1$

$$x_0 = 0; y_0 = 0$$

$$x_1 = 1; y_1 = y_0 + f(x_0, y_0)h = 0 + (0 + 0) \cdot 1 = 0$$

$$x_1 = 2; y_2 = y_1 + f(x_1, y_1)h = 0 + (1 + 0) \cdot 1 = 1$$

$$x_2 = 3; y_3 = y_2 + f(x_2, y_2)h = 1 + (2 + 1) \cdot 1 = 4$$

Beispiel 4.1: $y' = y + x$; $x_0 = 0$, $y_0 = 0$; $h = 1$

$$x_0 = 0; y_0 = 0$$

$$x_1 = 1; y_1 = y_0 + f(x_0, y_0)h = 0 + (0 + 0) \cdot 1 = 0$$

$$x_1 = 2; y_2 = y_1 + f(x_1, y_1)h = 0 + (1 + 0) \cdot 1 = 1$$

$$x_2 = 3; y_3 = y_2 + f(x_2, y_2)h = 1 + (2 + 1) \cdot 1 = 4$$

$$x_3 = 4; y_4 = y_3 + f(x_3, y_3)h = 4 + (3 + 4) \cdot 1 = 11$$

...

Implementierung in TI-84-Basic

PROGRAM:EULER

:Input "X0=",X

:Input "Y0=",Y

:Input "H=",H

:Input "N=",N

:N+1→dim(L₁)

:N+1→dim(L₂)

:For(K,1,N+1)

:X→L₁(K)

:Y→L₂(K)

:prgmDGL

:X+H→X

:Y+H*F→Y

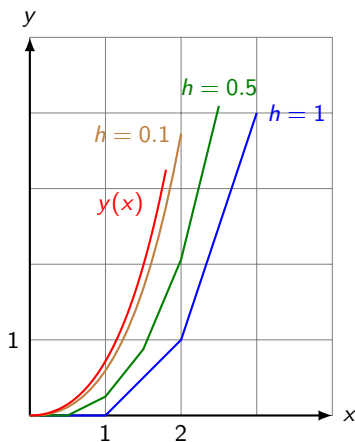
:End

DGL-Unterprogramm

PROGRAM:DGL

:X+Y→F

Grafische Darstellung



exakte Lösung der DGL $y' = x + y$: $y = e^x - x - 1$

Konvergenz (Euler)

$y' = x + y$; $x_0 = 0$, $y_0 = 0$ mit der Lösung $y = e^x - x - 1$

x	y	$h = 1$	$h = 0.1$	$h = 0.01$	$h = 0.001$
0	0	0	0	0	0
1	0.718282	0	0.593742	0.704814	0.716924
2	4.38906	1	3.72750	4.31602	4.38168
3	16.0855	4	13.4494	15.7885	16.0555
4	49.5982	11	40.2593	48.5241	49.4891

Das Verfahren von Runge und Kutta

Wenn man die Steigung nicht nur im Punkt $f(x, y)$ sondern auch an benachbarten Stellen auswertet und diese Steigungen geeignet zu einer Durchschnittssteigung zusammenfasst, erhält man eine genauere Approximation des Kurvenverlaufs als beim Verfahren von Euler.

Eines dieser Verfahren stammt von CARL RUNGE (1856–1927) und WILHELM KUTTA (1867–1944) und lässt sich wie folgt beschreiben:

Ausgehend von einem Kurvenpunkt (x_i, y_i) berechnet man:

Ausgehend von einem Kurvenpunkt (x_i, y_i) berechnet man:

$$k_1 = hf(x_i, y_i)$$

Ausgehend von einem Kurvenpunkt (x_i, y_i) berechnet man:

$$k_1 = hf(x_i, y_i)$$

$$k_2 = hf(x_i + h/2, y_i + k_1/2)$$

Ausgehend von einem Kurvenpunkt (x_i, y_i) berechnet man:

$$k_1 = hf(x_i, y_i)$$

$$k_2 = hf(x_i + h/2, y_i + k_1/2)$$

$$k_3 = hf(x_i + h/2, y_i + k_2/2)$$

Ausgehend von einem Kurvenpunkt (x_i, y_i) berechnet man:

$$k_1 = hf(x_i, y_i)$$

$$k_2 = hf(x_i + h/2, y_i + k_1/2)$$

$$k_3 = hf(x_i + h/2, y_i + k_2/2)$$

$$k_4 = hf(x_i + h, y_i + k_3)$$

Ausgehend von einem Kurvenpunkt (x_i, y_i) berechnet man:

$$k_1 = hf(x_i, y_i)$$

$$k_2 = hf(x_i + h/2, y_i + k_1/2)$$

$$k_3 = hf(x_i + h/2, y_i + k_2/2)$$

$$k_4 = hf(x_i + h, y_i + k_3)$$

$$x_{i+1} = x_i + h$$

Ausgehend von einem Kurvenpunkt (x_i, y_i) berechnet man:

$$k_1 = hf(x_i, y_i)$$

$$k_2 = hf(x_i + h/2, y_i + k_1/2)$$

$$k_3 = hf(x_i + h/2, y_i + k_2/2)$$

$$k_4 = hf(x_i + h, y_i + k_3)$$

$$x_{i+1} = x_i + h$$

$$y_{i+1} = y_i + (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)/6$$

Beispiel 4.2: $y' = x + y$; $x_0 = 0$, $y_0 = 0$; $h = 1$

$$k_1 = hf(x_0, y_0) =$$

Beispiel 4.2: $y' = x + y$; $x_0 = 0$, $y_0 = 0$; $h = 1$

$$k_1 = hf(x_0, y_0) = 1 \cdot (0 + 0) = 0$$

Beispiel 4.2: $y' = x + y$; $x_0 = 0$, $y_0 = 0$; $h = 1$

$$k_1 = hf(x_0, y_0) = 1 \cdot (0 + 0) = 0$$

$$k_2 = hf\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_1}{2}\right) =$$

Beispiel 4.2: $y' = x + y$; $x_0 = 0$, $y_0 = 0$; $h = 1$

$$k_1 = hf(x_0, y_0) = 1 \cdot (0 + 0) = 0$$

$$k_2 = hf\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_1}{2}\right) = 1 \cdot \left(\frac{1}{2} + 0\right) = \frac{1}{2}$$

Beispiel 4.2: $y' = x + y$; $x_0 = 0$, $y_0 = 0$; $h = 1$

$$k_1 = hf(x_0, y_0) = 1 \cdot (0 + 0) = 0$$

$$k_2 = hf\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_1}{2}\right) = 1 \cdot \left(\frac{1}{2} + 0\right) = \frac{1}{2}$$

$$k_3 = hf\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_2}{2}\right) =$$

Beispiel 4.2: $y' = x + y$; $x_0 = 0$, $y_0 = 0$; $h = 1$

$$k_1 = hf(x_0, y_0) = 1 \cdot (0 + 0) = 0$$

$$k_2 = hf\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_1}{2}\right) = 1 \cdot \left(\frac{1}{2} + 0\right) = \frac{1}{2}$$

$$k_3 = hf\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_2}{2}\right) = 1 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) = \frac{3}{4}$$

Beispiel 4.2: $y' = x + y$; $x_0 = 0$, $y_0 = 0$; $h = 1$

$$k_1 = hf(x_0, y_0) = 1 \cdot (0 + 0) = 0$$

$$k_2 = hf\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_1}{2}\right) = 1 \cdot \left(\frac{1}{2} + 0\right) = \frac{1}{2}$$

$$k_3 = hf\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_2}{2}\right) = 1 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) = \frac{3}{4}$$

$$k_4 = hf(x_0 + h, y_0 + k_3) =$$

Beispiel 4.2: $y' = x + y$; $x_0 = 0$, $y_0 = 0$; $h = 1$

$$k_1 = hf(x_0, y_0) = 1 \cdot (0 + 0) = 0$$

$$k_2 = hf\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_1}{2}\right) = 1 \cdot \left(\frac{1}{2} + 0\right) = \frac{1}{2}$$

$$k_3 = hf\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_2}{2}\right) = 1 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) = \frac{3}{4}$$

$$k_4 = hf(x_0 + h, y_0 + k_3) = 1 \cdot \left(1 + \frac{3}{4}\right) = \frac{7}{4}$$

Beispiel 4.2: $y' = x + y$; $x_0 = 0$, $y_0 = 0$; $h = 1$

$$k_1 = hf(x_0, y_0) = 1 \cdot (0 + 0) = 0$$

$$k_2 = hf\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_1}{2}\right) = 1 \cdot \left(\frac{1}{2} + 0\right) = \frac{1}{2}$$

$$k_3 = hf\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_2}{2}\right) = 1 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) = \frac{3}{4}$$

$$k_4 = hf(x_0 + h, y_0 + k_3) = 1 \cdot \left(1 + \frac{3}{4}\right) = \frac{7}{4}$$

$$x_1 = x_0 + h =$$

Beispiel 4.2: $y' = x + y$; $x_0 = 0$, $y_0 = 0$; $h = 1$

$$k_1 = hf(x_0, y_0) = 1 \cdot (0 + 0) = 0$$

$$k_2 = hf\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_1}{2}\right) = 1 \cdot \left(\frac{1}{2} + 0\right) = \frac{1}{2}$$

$$k_3 = hf\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_2}{2}\right) = 1 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) = \frac{3}{4}$$

$$k_4 = hf(x_0 + h, y_0 + k_3) = 1 \cdot \left(1 + \frac{3}{4}\right) = \frac{7}{4}$$

$$x_1 = x_0 + h = 0 + 1 = 1$$

Beispiel 4.2: $y' = x + y$; $x_0 = 0$, $y_0 = 0$; $h = 1$

$$k_1 = hf(x_0, y_0) = 1 \cdot (0 + 0) = 0$$

$$k_2 = hf\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_1}{2}\right) = 1 \cdot \left(\frac{1}{2} + 0\right) = \frac{1}{2}$$

$$k_3 = hf\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_2}{2}\right) = 1 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) = \frac{3}{4}$$

$$k_4 = hf(x_0 + h, y_0 + k_3) = 1 \cdot \left(1 + \frac{3}{4}\right) = \frac{7}{4}$$

$$x_1 = x_0 + h = 0 + 1 = 1$$

$$y_1 = y_0 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) =$$

Beispiel 4.2: $y' = x + y$; $x_0 = 0$, $y_0 = 0$; $h = 1$

$$k_1 = hf(x_0, y_0) = 1 \cdot (0 + 0) = 0$$

$$k_2 = hf\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_1}{2}\right) = 1 \cdot \left(\frac{1}{2} + 0\right) = \frac{1}{2}$$

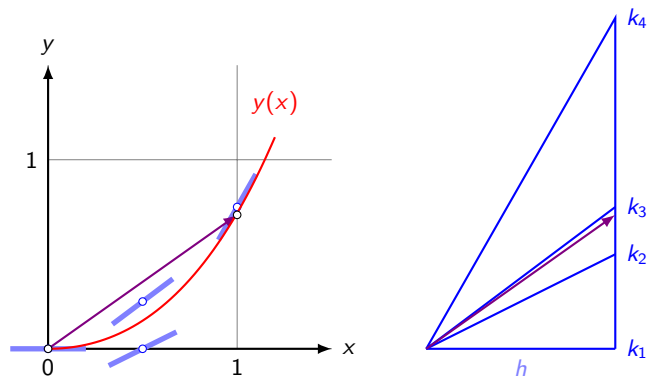
$$k_3 = hf\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_2}{2}\right) = 1 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) = \frac{3}{4}$$

$$k_4 = hf(x_0 + h, y_0 + k_3) = 1 \cdot \left(1 + \frac{3}{4}\right) = \frac{7}{4}$$

$$x_1 = x_0 + h = 0 + 1 = 1$$

$$y_1 = y_0 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = 0 + \frac{1}{6} \cdot \frac{17}{4} = \frac{17}{24}$$

Visualisierung eines Iterationsschritts

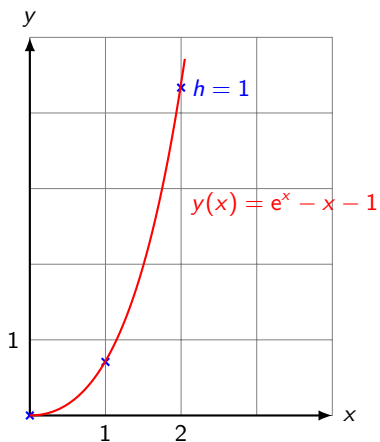


Implementierung in TI-84-Basic

PROGRAM:RUNKUT

:Input "X0=",U	:U+H/2→X
:Input "Y0=",V	:V+A/2→Y
:Input "H=",H	:prgmDGL
:Input "N=",N	:H*F→B
:N+1→dim(L ₁)	:V+B/2→Y
:N+1→dim(L ₂)	:H*F→C
:For(K,1,N+1)	:U+H→X
:U→L ₁ (K)	:V+C→Y
:V→L ₂ (K)	:prgmDGL
:U→X	:H*F→D
:V→Y	:U+H→U
:prgmDGL	:V+(A+2B+2C+D)/6→V
:H*F→A	:End

Grafische Darstellung



Konvergenz (Runge–Kutta)

$y' = x + y$; $x_0 = 0$, $y_0 = 0$ mit der Lösung $y = e^x - x - 1$

x	y	$h = 1$	$h = 0.1$	$h = 0.01$
0	0	0	0	0
1	0.718281828	0.708333333	0.718279744	0.718281828
2	4.38905610	4.33506944	4.38904477	4.38905610
3	16.0855369	15.8658130	16.0854907	16.0855369
4	49.5981500	48.8032438	49.5979826	49.5981500

Konvergenzordnung

Das Verfahren von Runge und Kutta hat die **Konvergenzordnung** $p = 4$. Grob gesagt bedeutet dies, dass sich bei einer Reduktion der Schrittweite mit dem Faktor k , der Fehler ungefähr mit dem Faktor k^4 verkleinert.

Zum Vergleich: Das Verfahren von Euler hat die Konvergenzordnung $p = 1$.

Lineare Unabhängigkeit

Zwei Funktionen $y_1(x)$ und $y_2(x)$ werden **linear unabhängig** genannt, wenn für die reellen Konstante C_1 und C_2 die Gleichung

$$C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) \equiv 0$$

nur für $C_1 = C_2 = 0$ erfüllt ist.

Beispiele

(a) $y_1(x) = x$ und $y_2(x) = x^2$:

Beispiele

(a) $y_1(x) = x$ und $y_2(x) = x^2$: linear unabhängig

Beispiele

(a) $y_1(x) = x$ und $y_2(x) = x^2$: linear unabhängig

(b) $y_1(x) = x^3$ und $y_2(x) = 2x^3$:

Beispiele

(a) $y_1(x) = x$ und $y_2(x) = x^2$: linear unabhängig

(b) $y_1(x) = x^3$ und $y_2(x) = 2x^3$: linear abhängig

Beispiele

(a) $y_1(x) = x$ und $y_2(x) = x^2$: linear unabhängig

(b) $y_1(x) = x^3$ und $y_2(x) = 2x^3$: linear abhängig

(c) $y_1(x) = e^x$ und $y_2(x) = e^{-x}$:

Beispiele

(a) $y_1(x) = x$ und $y_2(x) = x^2$: linear unabhängig

(b) $y_1(x) = x^3$ und $y_2(x) = 2x^3$: linear abhängig

(c) $y_1(x) = e^x$ und $y_2(x) = e^{-x}$: linear unabhängig

Wronski-Determinante

Zwei (einmal) differenzierbare Funktionen $y_1(x)$ und $y_2(x)$ sind auf einem Intervall I linear unabhängig, wenn ihre

Wronski-Determinante

$$W(y_1, y_2) = \det \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$$

nicht für alle $x \in I$ verschwindet.

Beispiele

(a) $y_1(x) = x$ und $y_2(x) = x^2$:

Beispiele

(a) $y_1(x) = x$ und $y_2(x) = x^2$:

$$\begin{vmatrix} x & x^2 \\ 1 & 2x \end{vmatrix}$$

Beispiele

(a) $y_1(x) = x$ und $y_2(x) = x^2$:

$$\begin{vmatrix} x & x^2 \\ 1 & 2x \end{vmatrix} = 2x^2 - x^2$$

Beispiele

(a) $y_1(x) = x$ und $y_2(x) = x^2$:

$$\begin{vmatrix} x & x^2 \\ 1 & 2x \end{vmatrix} = 2x^2 - x^2 = x^2 \neq 0$$

Beispiele

(a) $y_1(x) = x$ und $y_2(x) = x^2$:

$$\begin{vmatrix} x & x^2 \\ 1 & 2x \end{vmatrix} = 2x^2 - x^2 = x^2 \neq 0 \quad \text{linear unabhängig}$$

Beispiele

(a) $y_1(x) = x$ und $y_2(x) = x^2$:

$$\begin{vmatrix} x & x^2 \\ 1 & 2x \end{vmatrix} = 2x^2 - x^2 = x^2 \neq 0 \quad \text{linear unabhängig}$$

(b) $y_1(x) = x^3$ und $y_2(x) = 2x^3$:

Beispiele

(a) $y_1(x) = x$ und $y_2(x) = x^2$:

$$\begin{vmatrix} x & x^2 \\ 1 & 2x \end{vmatrix} = 2x^2 - x^2 = x^2 \neq 0 \quad \text{linear unabhängig}$$

(b) $y_1(x) = x^3$ und $y_2(x) = 2x^3$:

$$\begin{vmatrix} x^3 & 2x^3 \\ 3x^2 & 6x^2 \end{vmatrix}$$

Beispiele

(a) $y_1(x) = x$ und $y_2(x) = x^2$:

$$\begin{vmatrix} x & x^2 \\ 1 & 2x \end{vmatrix} = 2x^2 - x^2 = x^2 \neq 0 \quad \text{linear unabhängig}$$

(b) $y_1(x) = x^3$ und $y_2(x) = 2x^3$:

$$\begin{vmatrix} x^3 & 2x^3 \\ 3x^2 & 6x^2 \end{vmatrix} = 6x^5 - 6x^5 \equiv 0$$

Beispiele

(a) $y_1(x) = x$ und $y_2(x) = x^2$:

$$\begin{vmatrix} x & x^2 \\ 1 & 2x \end{vmatrix} = 2x^2 - x^2 = x^2 \neq 0 \quad \text{linear unabhängig}$$

(b) $y_1(x) = x^3$ und $y_2(x) = 2x^3$:

$$\begin{vmatrix} x^3 & 2x^3 \\ 3x^2 & 6x^2 \end{vmatrix} = 6x^5 - 6x^5 \equiv 0 \quad \text{linear abhängig}$$

Beispiele

(a) $y_1(x) = x$ und $y_2(x) = x^2$:

$$\begin{vmatrix} x & x^2 \\ 1 & 2x \end{vmatrix} = 2x^2 - x^2 = x^2 \neq 0 \quad \text{linear unabhängig}$$

(b) $y_1(x) = x^3$ und $y_2(x) = 2x^3$:

$$\begin{vmatrix} x^3 & 2x^3 \\ 3x^2 & 6x^2 \end{vmatrix} = 6x^5 - 6x^5 \equiv 0 \quad \text{linear abhängig}$$

(c) $y_1(x) = e^x$ und $y_2(x) = e^{-x}$:

Beispiele

(a) $y_1(x) = x$ und $y_2(x) = x^2$:

$$\begin{vmatrix} x & x^2 \\ 1 & 2x \end{vmatrix} = 2x^2 - x^2 = x^2 \neq 0 \quad \text{linear unabhängig}$$

(b) $y_1(x) = x^3$ und $y_2(x) = 2x^3$:

$$\begin{vmatrix} x^3 & 2x^3 \\ 3x^2 & 6x^2 \end{vmatrix} = 6x^5 - 6x^5 \equiv 0 \quad \text{linear abhängig}$$

(c) $y_1(x) = e^x$ und $y_2(x) = e^{-x}$:

$$\begin{vmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^{-x} \end{vmatrix}$$

Beispiele

(a) $y_1(x) = x$ und $y_2(x) = x^2$:

$$\begin{vmatrix} x & x^2 \\ 1 & 2x \end{vmatrix} = 2x^2 - x^2 = x^2 \neq 0 \quad \text{linear unabhängig}$$

(b) $y_1(x) = x^3$ und $y_2(x) = 2x^3$:

$$\begin{vmatrix} x^3 & 2x^3 \\ 3x^2 & 6x^2 \end{vmatrix} = 6x^5 - 6x^5 \equiv 0 \quad \text{linear abhängig}$$

(c) $y_1(x) = e^x$ und $y_2(x) = e^{-x}$:

$$\begin{vmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^{-x} \end{vmatrix} = -e^x e^{-x} - e^x e^{-x}$$

Beispiele

(a) $y_1(x) = x$ und $y_2(x) = x^2$:

$$\begin{vmatrix} x & x^2 \\ 1 & 2x \end{vmatrix} = 2x^2 - x^2 = x^2 \neq 0 \quad \text{linear unabhängig}$$

(b) $y_1(x) = x^3$ und $y_2(x) = 2x^3$:

$$\begin{vmatrix} x^3 & 2x^3 \\ 3x^2 & 6x^2 \end{vmatrix} = 6x^5 - 6x^5 \equiv 0 \quad \text{linear abhängig}$$

(c) $y_1(x) = e^x$ und $y_2(x) = e^{-x}$:

$$\begin{vmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^{-x} \end{vmatrix} = -e^x e^{-x} - e^x e^{-x} = -2$$

Beispiele

(a) $y_1(x) = x$ und $y_2(x) = x^2$:

$$\begin{vmatrix} x & x^2 \\ 1 & 2x \end{vmatrix} = 2x^2 - x^2 = x^2 \neq 0 \quad \text{linear unabhängig}$$

(b) $y_1(x) = x^3$ und $y_2(x) = 2x^3$:

$$\begin{vmatrix} x^3 & 2x^3 \\ 3x^2 & 6x^2 \end{vmatrix} = 6x^5 - 6x^5 \equiv 0 \quad \text{linear abhängig}$$

(c) $y_1(x) = e^x$ und $y_2(x) = e^{-x}$:

$$\begin{vmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^{-x} \end{vmatrix} = -e^x e^{-x} - e^x e^{-x} = -2 \neq 0$$

Beispiele

(a) $y_1(x) = x$ und $y_2(x) = x^2$:

$$\begin{vmatrix} x & x^2 \\ 1 & 2x \end{vmatrix} = 2x^2 - x^2 = x^2 \neq 0 \quad \text{linear unabhängig}$$

(b) $y_1(x) = x^3$ und $y_2(x) = 2x^3$:

$$\begin{vmatrix} x^3 & 2x^3 \\ 3x^2 & 6x^2 \end{vmatrix} = 6x^5 - 6x^5 \equiv 0 \quad \text{linear abhängig}$$

(c) $y_1(x) = e^x$ und $y_2(x) = e^{-x}$:

$$\begin{vmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^{-x} \end{vmatrix} = -e^x e^{-x} - e^x e^{-x} = -2 \neq 0 \quad \text{linear unabhängig}$$

Satz 5.1 (Superpositionsprinzip)

Sind y_1 und y_2 Lösungen der homogenen linearen DGL zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$ay'' + by' + cy = 0 \quad (1)$$

so ist für jede Wahl reeller Konstanten C_1 und C_2 die Funktion

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$

eine Lösung von (1).

Beweis

Es seien y_1 und y_2 zwei Lösungen von (1) und C_1 bzw. C_2 zwei beliebige reelle Konstanten. Dann folgt aus der Linearität der Ableitung:

$$\begin{aligned} & ay'' + by' + cy \\ &= a(C_1y_1 + C_2y_2)'' + b(C_1y_1 + C_2y_2)' + c(C_1y_1 + C_2y_2) \\ &= aC_1y_1'' + aC_2y_2'' + bC_1y_1' + bC_2y_2' + cC_1y_1 + cC_2y_2 \\ &= C_1 \underbrace{(ay_1'' + by_1' + cy_1)}_0 + C_2 \underbrace{(ay_2'' + by_2' + cy_2)}_0 \\ &= C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

Satz 5.2 (Fundamentalsystem)

Jede homogene lineare DGL 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$ay'' + by' + cy = 0 \quad (2)$$

hat eine Basis aus zwei Funktionen y_1, y_2 (**Fundamentalsystem**), so dass jede Lösung von (2) als Linearkombination

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$

dargestellt werden kann. [ohne Beweis]

Setzt man die Funktion $y = e^{\lambda x}$ und ihre Ableitungen

$$y' = \lambda e^{\lambda x}$$

$$y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$$

Setzt man die Funktion $y = e^{\lambda x}$ und ihre Ableitungen

$$y' = \lambda e^{\lambda x}$$

$$y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$$

in die DGL (2) ein, so erhält man

Setzt man die Funktion $y = e^{\lambda x}$ und ihre Ableitungen

$$y' = \lambda e^{\lambda x}$$

$$y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$$

in die DGL (2) ein, so erhält man

$$ay'' + by' + cy = 0$$

$$a\lambda^2 e^{\lambda x} + b\lambda e^{\lambda x} + ce^{\lambda x} = 0$$

$$(a\lambda^2 + b\lambda + c)e^{\lambda x} = 0 \quad || : e^{\lambda x} \neq 0$$

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0 \quad \text{charakteristische Gleichung}$$

Da die Anzahl der Lösungen der charakteristischen Gleichung von der Diskriminante

$$D = b^2 - 4ac$$

abhängig ist, unterscheiden wir drei Fälle:

$$(1) \ D > 0: \lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \in \mathbb{R} \quad (\lambda_1 \neq \lambda_2)$$

Da die Anzahl der Lösungen der charakteristischen Gleichung von der Diskriminante

$$D = b^2 - 4ac$$

abhängig ist, unterscheiden wir drei Fälle:

$$(1) \quad D > 0: \lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \in \mathbb{R} \quad (\lambda_1 \neq \lambda_2)$$

$$(2) \quad D = 0: \lambda_{1,2} = \frac{-b}{2a} \in \mathbb{R} \quad (\lambda_1 = \lambda_2)$$

Da die Anzahl der Lösungen der charakteristischen Gleichung von der Diskriminante

$$D = b^2 - 4ac$$

abhängig ist, unterscheiden wir drei Fälle:

$$(1) \quad D > 0: \lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \in \mathbb{R} \quad (\lambda_1 \neq \lambda_2)$$

$$(2) \quad D = 0: \lambda_{1,2} = \frac{-b}{2a} \in \mathbb{R} \quad (\lambda_1 = \lambda_2)$$

$$(3) \quad D < 0: \lambda_{1,2} = \frac{-b \pm i\sqrt{4ac - b^2}}{2a} \in \mathbb{C} \quad (\lambda_1 = \overline{\lambda_2})$$

Fall (1)

$$y'' + 3y' + 2y = 0$$

charakteristische Gleichung:

$$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$$

$$(\lambda + 1)(\lambda + 2) = 0$$

$$\lambda_1 = -1$$

$$\lambda_2 = -2$$

Fall (1)

$$y'' + 3y' + 2y = 0$$

charakteristische Gleichung:

$$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$$

$$(\lambda + 1)(\lambda + 2) = 0$$

$$\lambda_1 = -1$$

$$\lambda_2 = -2$$

Fundamentalsystem: $y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x}$

$$\text{AWP: } y(0) = 1, y'(0) = 2$$

$$\text{AWP: } y(0) = 1, y'(0) = 2$$

$$y'(x) = -C_1 e^{-x} - 2C_2 e^{-2x}$$

$$\text{AWP: } y(0) = 1, y'(0) = 2$$

$$y'(x) = -C_1 e^{-x} - 2C_2 e^{-2x}$$

$$\left. \begin{array}{l} y(0) = C_1 + C_2 = 1 \\ y'(0) = -C_1 - 2C_2 = 2 \end{array} \right\}$$

$$\text{AWP: } y(0) = 1, y'(0) = 2$$

$$y'(x) = -C_1 e^{-x} - 2C_2 e^{-2x}$$

$$\left. \begin{array}{l} y(0) = C_1 + C_2 = 1 \\ y'(0) = -C_1 - 2C_2 = 2 \end{array} \right\} C_1 = 4, C_2 = -3$$

$$\text{AWP: } y(0) = 1, y'(0) = 2$$

$$y'(x) = -C_1 e^{-x} - 2C_2 e^{-2x}$$

$$\left. \begin{array}{l} y(0) = C_1 + C_2 = 1 \\ y'(0) = -C_1 - 2C_2 = 2 \end{array} \right\} C_1 = 4, C_2 = -3$$

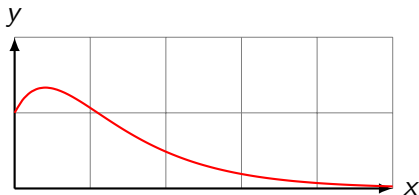
$$y(x) = 4e^{-x} - 3e^{-2x}$$

$$\text{AWP: } y(0) = 1, y'(0) = 2$$

$$y'(x) = -C_1 e^{-x} - 2C_2 e^{-2x}$$

$$\left. \begin{array}{l} y(0) = C_1 + C_2 = 1 \\ y'(0) = -C_1 - 2C_2 = 2 \end{array} \right\} \quad C_1 = 4, C_2 = -3$$

$$y(x) = 4e^{-x} - 3e^{-2x}$$



Fall (2)

$$y'' + 4y' + 4y = 0$$

charakteristische Gleichung:

$$\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$$

$$(\lambda + 2)^2 = 0$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -2$$

Fall (2)

$$y'' + 4y' + 4y = 0$$

charakteristische Gleichung:

$$\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$$

$$(\lambda + 2)^2 = 0$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -2$$

$y(x) = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-2x}$ kein Fundamentalsystem

Fall (2)

$$y'' + 4y' + 4y = 0$$

charakteristische Gleichung:

$$\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$$

$$(\lambda + 2)^2 = 0$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -2$$

$y(x) = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-2x}$ kein Fundamentalsystem

Fundamentalsystem: $y(x) = (C_1 + C_2 x) e^{-2x}$

Fall (2)

$$y'' + 4y' + 4y = 0$$

charakteristische Gleichung:

$$\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$$

$$(\lambda + 2)^2 = 0$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -2$$

$y(x) = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-2x}$ kein Fundamentalsystem

Fundamentalsystem: $y(x) = (C_1 + C_2 x) e^{-2x}$

Nachweis: in den Übungen

$$\text{AWP: } y(0) = 1, y'(0) = 2$$

$$\text{AWP: } y(0) = 1, y'(0) = 2$$

$$y(x) = (C_1 + C_2 x)e^{-2x}$$

$$\text{AWP: } y(0) = 1, y'(0) = 2$$

$$y(x) = (C_1 + C_2 x)e^{-2x}$$

$$y'(x) = C_2 e^{-2x} - 2(C_1 + C_2 x)e^{-2x} = (C_2 - 2C_1 - 2C_2 x)e^{-2x}$$

$$\text{AWP: } y(0) = 1, y'(0) = 2$$

$$y(x) = (C_1 + C_2 x)e^{-2x}$$

$$y'(x) = C_2 e^{-2x} - 2(C_1 + C_2 x)e^{-2x} = (C_2 - 2C_1 - 2C_2 x)e^{-2x}$$

$$\left. \begin{array}{l} y(0) = C_1 = 1 \\ y'(0) = C_2 - 2C_1 = 2 \end{array} \right\}$$

$$\text{AWP: } y(0) = 1, y'(0) = 2$$

$$y(x) = (C_1 + C_2 x)e^{-2x}$$

$$y'(x) = C_2 e^{-2x} - 2(C_1 + C_2 x)e^{-2x} = (C_2 - 2C_1 - 2C_2 x)e^{-2x}$$

$$\left. \begin{array}{l} y(0) = C_1 = 1 \\ y'(0) = C_2 - 2C_1 = 2 \end{array} \right\} \quad C_1 = 1, C_2 = 4$$

$$\text{AWP: } y(0) = 1, y'(0) = 2$$

$$y(x) = (C_1 + C_2 x)e^{-2x}$$

$$y'(x) = C_2 e^{-2x} - 2(C_1 + C_2 x)e^{-2x} = (C_2 - 2C_1 - 2C_2 x)e^{-2x}$$

$$\left. \begin{array}{l} y(0) = C_1 = 1 \\ y'(0) = C_2 - 2C_1 = 2 \end{array} \right\} \quad C_1 = 1, C_2 = 4$$

$$y(x) = (1 + 4x)e^{-2x}$$

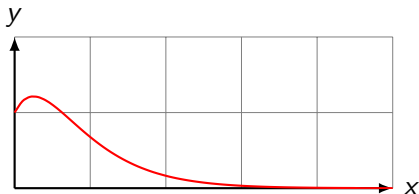
$$\text{AWP: } y(0) = 1, y'(0) = 2$$

$$y(x) = (C_1 + C_2 x)e^{-2x}$$

$$y'(x) = C_2 e^{-2x} - 2(C_1 + C_2 x)e^{-2x} = (C_2 - 2C_1 - 2C_2 x)e^{-2x}$$

$$\left. \begin{array}{l} y(0) = C_1 = 1 \\ y'(0) = C_2 - 2C_1 = 2 \end{array} \right\} \quad C_1 = 1, C_2 = 4$$

$$y(x) = (1 + 4x)e^{-2x}$$



Fall (3)

$$y'' + 2y' + 17y = 0$$

charakteristische Gleichung:

$$\lambda^2 + 2\lambda + 17 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 1 \cdot 17}}{2} = -1 \pm 4i$$

Fall (3)

$$y'' + 2y' + 17y = 0$$

charakteristische Gleichung:

$$\lambda^2 + 2\lambda + 17 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 1 \cdot 17}}{2} = -1 \pm 4i$$

$$\tilde{y}(x) = \tilde{C}_1 e^{(-1+4i)x} + \tilde{C}_2 e^{(-1-4i)x} \quad (\text{unschön})$$

$$\text{pro memoria: } e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \sin \alpha; \quad \begin{aligned} \cos(-\alpha) &= \cos(\alpha) \\ \sin(-\alpha) &= -\sin(\alpha) \end{aligned}$$

$$\text{pro memoria: } e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \sin \alpha; \quad \cos(-\alpha) = \cos(\alpha) \\ \sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$$

$$\tilde{y}_1(x) = e^{(-1+4i)x} = e^{-x} e^{i \cdot 4x} = e^{-x} (\cos 4x + i \sin 4x)$$

$$\text{pro memoria: } e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \sin \alpha; \quad \cos(-\alpha) = \cos(\alpha) \\ \sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$$

$$\tilde{y}_1(x) = e^{(-1+4i)x} = e^{-x} e^{i \cdot 4x} = e^{-x} (\cos 4x + i \sin 4x)$$

$$\tilde{y}_2(x) = e^{(-1-4i)x} = e^{-x} e^{i \cdot (-4x)} = e^{-x} (\cos 4x - i \sin 4x)$$

$$\text{pro memoria: } e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \sin \alpha; \quad \cos(-\alpha) = \cos(\alpha) \\ \sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$$

$$\tilde{y}_1(x) = e^{(-1+4i)x} = e^{-x} e^{i \cdot 4x} = e^{-x} (\cos 4x + i \sin 4x)$$

$$\tilde{y}_2(x) = e^{(-1-4i)x} = e^{-x} e^{i \cdot (-4x)} = e^{-x} (\cos 4x - i \sin 4x)$$

Superpositionsprinzip:

$$\text{pro memoria: } e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \sin \alpha; \quad \cos(-\alpha) = \cos(\alpha) \\ \sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$$

$$\tilde{y}_1(x) = e^{(-1+4i)x} = e^{-x} e^{i \cdot 4x} = e^{-x} (\cos 4x + i \sin 4x)$$

$$\tilde{y}_2(x) = e^{(-1-4i)x} = e^{-x} e^{i \cdot (-4x)} = e^{-x} (\cos 4x - i \sin 4x)$$

Superpositionsprinzip:

$$y_1(x) = \frac{1}{2i} (\tilde{y}_1 - \tilde{y}_2) = e^{-x} \sin 4x$$

$$\text{pro memoria: } e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \sin \alpha; \quad \cos(-\alpha) = \cos(\alpha) \\ \sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$$

$$\tilde{y}_1(x) = e^{(-1+4i)x} = e^{-x} e^{i \cdot 4x} = e^{-x} (\cos 4x + i \sin 4x)$$

$$\tilde{y}_2(x) = e^{(-1-4i)x} = e^{-x} e^{i \cdot (-4x)} = e^{-x} (\cos 4x - i \sin 4x)$$

Superpositionsprinzip:

$$y_1(x) = \frac{1}{2i} (\tilde{y}_1 - \tilde{y}_2) = e^{-x} \sin 4x$$

$$y_2(x) = \frac{1}{2} (\tilde{y}_1 + \tilde{y}_2) = e^{-x} \cos 4x$$

$$\text{pro memoria: } e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \sin \alpha; \quad \cos(-\alpha) = \cos(\alpha) \\ \sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$$

$$\tilde{y}_1(x) = e^{(-1+4i)x} = e^{-x} e^{i \cdot 4x} = e^{-x} (\cos 4x + i \sin 4x)$$

$$\tilde{y}_2(x) = e^{(-1-4i)x} = e^{-x} e^{i \cdot (-4x)} = e^{-x} (\cos 4x - i \sin 4x)$$

Superpositionsprinzip:

$$y_1(x) = \frac{1}{2i} (\tilde{y}_1 - \tilde{y}_2) = e^{-x} \sin 4x$$

$$y_2(x) = \frac{1}{2} (\tilde{y}_1 + \tilde{y}_2) = e^{-x} \cos 4x$$

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) = e^{-x} (C_1 \sin 4x + C_2 \cos 4x)$$

$$\text{AWP: } y(0) = 1, y'(0) = 3$$

$$\text{AWP: } y(0) = 1, y'(0) = 3$$

$$y(x) = e^{-x} (C_1 \sin 4x + C_2 \cos 4x)$$

$$\text{AWP: } y(0) = 1, y'(0) = 3$$

$$y(x) = e^{-x} (C_1 \sin 4x + C_2 \cos 4x)$$

$$y'(x) = -e^{-x} (C_1 \sin 4x + C_2 \cos 4x) + e^{-x} (4C_1 \cos 4x - 4C_2 \sin 4x)$$

$$\text{AWP: } y(0) = 1, y'(0) = 3$$

$$y(x) = e^{-x} (C_1 \sin 4x + C_2 \cos 4x)$$

$$\begin{aligned} y'(x) &= -e^{-x} (C_1 \sin 4x + C_2 \cos 4x) + e^{-x} (4C_1 \cos 4x - 4C_2 \sin 4x) \\ &= e^{-x} ([-C_1 - 4C_2] \sin 4x + [4C_1 - C_2] \cos 4x) \end{aligned}$$

$$\text{AWP: } y(0) = 1, y'(0) = 3$$

$$y(x) = e^{-x} (C_1 \sin 4x + C_2 \cos 4x)$$

$$\begin{aligned} y'(x) &= -e^{-x} (C_1 \sin 4x + C_2 \cos 4x) + e^{-x} (4C_1 \cos 4x - 4C_2 \sin 4x) \\ &= e^{-x} ([-C_1 - 4C_2] \sin 4x + [4C_1 - C_2] \cos 4x) \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} y(0) &= C_2 = 1 \\ y'(0) &= 4C_1 - C_2 = 3 \end{aligned} \right\}$$

$$\text{AWP: } y(0) = 1, y'(0) = 3$$

$$y(x) = e^{-x} (C_1 \sin 4x + C_2 \cos 4x)$$

$$\begin{aligned} y'(x) &= -e^{-x} (C_1 \sin 4x + C_2 \cos 4x) + e^{-x} (4C_1 \cos 4x - 4C_2 \sin 4x) \\ &= e^{-x} ([-C_1 - 4C_2] \sin 4x + [4C_1 - C_2] \cos 4x) \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} y(0) &= C_2 = 1 \\ y'(0) &= 4C_1 - C_2 = 3 \end{aligned} \right\} \quad C_1 = 1, C_2 = 1$$

$$\text{AWP: } y(0) = 1, y'(0) = 3$$

$$y(x) = e^{-x} (C_1 \sin 4x + C_2 \cos 4x)$$

$$\begin{aligned} y'(x) &= -e^{-x} (C_1 \sin 4x + C_2 \cos 4x) + e^{-x} (4C_1 \cos 4x - 4C_2 \sin 4x) \\ &= e^{-x} ([-C_1 - 4C_2] \sin 4x + [4C_1 - C_2] \cos 4x) \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} y(0) &= C_2 = 1 \\ y'(0) &= 4C_1 - C_2 = 3 \end{aligned} \right\} \quad C_1 = 1, C_2 = 1$$

$$y(x) = e^{-x} (\cos 4x + \sin 4x)$$

$$\sqrt{C_1^2 + C_2^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$\sqrt{C_1^2 + C_2^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$1 \cdot \sin 4x + 1 \cdot \cos 4x = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin 4x + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos 4x \right)$$

$$\sqrt{C_1^2 + C_2^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$\begin{aligned} 1 \cdot \sin 4x + 1 \cdot \cos 4x &= \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin 4x + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos 4x \right) \\ &= \sqrt{2} \left(\sin 4x \cdot \cos \frac{\pi}{4} + \cos 4x \cdot \sin \frac{\pi}{4} \right) \end{aligned}$$

$$\sqrt{C_1^2 + C_2^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

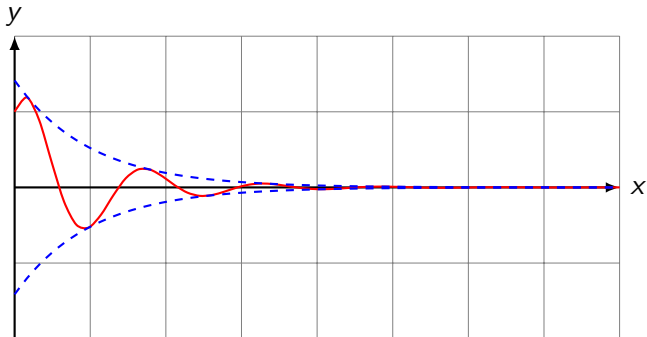
$$\begin{aligned} 1 \cdot \sin 4x + 1 \cdot \cos 4x &= \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin 4x + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos 4x \right) \\ &= \sqrt{2} \left(\sin 4x \cdot \cos \frac{\pi}{4} + \cos 4x \cdot \sin \frac{\pi}{4} \right) \\ &= \sqrt{2} \sin \left(4x + \frac{\pi}{4} \right) \end{aligned}$$

$$\sqrt{C_1^2 + C_2^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$\begin{aligned} 1 \cdot \sin 4x + 1 \cdot \cos 4x &= \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin 4x + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos 4x \right) \\ &= \sqrt{2} \left(\sin 4x \cdot \cos \frac{\pi}{4} + \cos 4x \cdot \sin \frac{\pi}{4} \right) \\ &= \sqrt{2} \sin \left(4x + \frac{\pi}{4} \right) \end{aligned}$$

$$y(x) = \sqrt{2} e^{-x} \sin \left(4x + \frac{\pi}{4} \right)$$

Graph von $y(x)$:



Zusammenfassung

Die Lösung einer homogenen linearen DGL mit konstanten Koeffizienten

$$ay'' + by' + cy = 0$$

mit der zugehörigen charakteristischen Gleichung

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0,$$

die durch λ_1 und λ_2 erfüllt wird, lautet:

Zusammenfassung

Die Lösung einer homogenen linearen DGL mit konstanten Koeffizienten

$$ay'' + by' + cy = 0$$

mit der zugehörigen charakteristischen Gleichung

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0,$$

die durch λ_1 und λ_2 erfüllt wird, lautet:

(1) $y(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$, falls $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ und $\lambda_1 \neq \lambda_2$

Zusammenfassung

Die Lösung einer homogenen linearen DGL mit konstanten Koeffizienten

$$ay'' + by' + cy = 0$$

mit der zugehörigen charakteristischen Gleichung

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0,$$

die durch λ_1 und λ_2 erfüllt wird, lautet:

(1) $y(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$, falls $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ und $\lambda_1 \neq \lambda_2$

(2) $y(x) = (C_1 + C_2 x) e^{\lambda_1 x}$, falls $\lambda_1 = \lambda_2 \in \mathbb{R}$

Zusammenfassung

Die Lösung einer homogenen linearen DGL mit konstanten Koeffizienten

$$ay'' + by' + cy = 0$$

mit der zugehörigen charakteristischen Gleichung

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0,$$

die durch λ_1 und λ_2 erfüllt wird, lautet:

(1) $y(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$, falls $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ und $\lambda_1 \neq \lambda_2$

(2) $y(x) = (C_1 + C_2 x) e^{\lambda_1 x}$, falls $\lambda_1 = \lambda_2 \in \mathbb{R}$

(3) $y(x) = e^{\alpha x} (C_1 \sin \beta x + C_2 \cos \beta x)$, falls $\lambda_1 = \alpha + i\beta = \bar{\lambda}_2 \in \mathbb{C}$

Im Fall (3) lässt sich der trigonometrisch Term anders darstellen:

$$\text{Mit } A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} \text{ gilt: } \left(\frac{C_1}{A}\right)^2 + \left(\frac{C_2}{A}\right)^2 = 1$$

Also existiert ein $\varphi \in [0, 2\pi)$ mit $\cos \varphi = \frac{C_1}{A}$ und $\sin \varphi = \frac{C_2}{A}$.

$$\begin{aligned} C_1 \sin \beta x + C_2 \cos \beta x &= A \left(\frac{C_1}{A} \sin \beta x + \frac{C_2}{A} \cos \beta x \right) \\ &= A(\cos \varphi \sin \beta x + \sin \varphi \cos \beta) \quad (\text{FBT S. 99}) \\ &= A \sin(\beta x + \varphi) \end{aligned}$$

Die beiden Konstanten C_1 und C_2 können daher alternativ auch als Amplitude A und Phasenwinkel φ bestimmt werden.

Analog würde man mit $\sin \varphi = C_1/A$ und $\cos \varphi = C_2/A$ sowie dem entsprechenden Additionstheorem die Lösungsform $y(x) = A \cos(\beta x + \varphi)$ erhalten.

Das Lösungskonzept

Bei der inhomogenen DGL

$$ay'' + by' + cy = f(x)$$

bestimmt man wie im letzten Abschnitt die allgemeine Lösung $y_h(x)$ der zugehörigen homogenen DGL

$$ay'' + by' + cy = 0$$

und versucht anschliessend, *eine* Lösung $y_i(x)$ der inhomogenen DGL zu finden. Letztere wird auch **partikuläre** Lösung der inhomogenen DGL genannt. Die allgemeine Lösung der inhomogenen DGL besteht dann aus der Summe

$$y(x) = y_h(x) + y_i(x).$$

Methode der unbestimmten Koeffizienten

Die nun vorgestellte Methode hängt von der Struktur der Störfunktion $f(x)$ ab und kann nicht in jedem Fall angewendet werden. Sie besteht darin, dass man die richtige Lösung bis auf eine noch zu bestimmende Konstante errät.

Weitere Methoden, um inhomogene lineare Differenzialgleichungen zu lösen sind:

- ▶ Variation der Konstanten
- ▶ Laplace-Transformation
- ▶ Fourier-Transformation

Beispiel 5.3.1

$$y'' - 5y' + 6y = 10e^{4x}$$

Beispiel 5.3.1

$$y'' - 5y' + 6y = 10e^{4x}$$

(a) Lösung der homogenen DGL:

Beispiel 5.3.1

$$y'' - 5y' + 6y = 10e^{4x}$$

(a) Lösung der homogenen DGL:

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$$

Beispiel 5.3.1

$$y'' - 5y' + 6y = 10e^{4x}$$

(a) *Lösung der homogenen DGL:*

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$$

$$(\lambda - 2)(\lambda - 3) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3$$

Beispiel 5.3.1

$$y'' - 5y' + 6y = 10e^{4x}$$

(a) *Lösung der homogenen DGL:*

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$$

$$(\lambda - 2)(\lambda - 3) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3$$

$$y_h(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$$

Beispiel 5.3.1

$$y'' - 5y' + 6y = 10e^{4x}$$

(a) *Lösung der homogenen DGL:*

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$$

$$(\lambda - 2)(\lambda - 3) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3$$

$$y_h(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$$

(b) Lösung der inhomogenen DGL:

(b) Lösung der inhomogenen DGL:

$$\text{Ansatz: } y = Ce^{4x}; y' = 4Ce^{4x}; y'' = 16Ce^{4x}$$

(b) Lösung der inhomogenen DGL:

$$\text{Ansatz: } y = Ce^{4x}; y' = 4Ce^{4x}; y'' = 16Ce^{4x}$$

in die inhomogene DGL einsetzen:

(b) Lösung der inhomogenen DGL:

$$\text{Ansatz: } y = Ce^{4x}; y' = 4Ce^{4x}; y'' = 16Ce^{4x}$$

in die inhomogene DGL einsetzen:

$$y'' - 5y' + 6y = 10e^{4x}$$

$$16Ce^{4x} - 20Ce^{4x} + 6Ce^{4x} = 10e^{4x}$$

$$2Ce^{4x} = 10e^{4x} \quad (\text{Koeffizientenvergleich})$$

$$2C = 10 \quad \Rightarrow \quad C = 5$$

(b) Lösung der inhomogenen DGL:

$$\text{Ansatz: } y = Ce^{4x}; y' = 4Ce^{4x}; y'' = 16Ce^{4x}$$

in die inhomogene DGL einsetzen:

$$y'' - 5y' + 6y = 10e^{4x}$$

$$16Ce^{4x} - 20Ce^{4x} + 6Ce^{4x} = 10e^{4x}$$

$$2Ce^{4x} = 10e^{4x} \quad (\text{Koeffizientenvergleich})$$

$$2C = 10 \quad \Rightarrow \quad C = 5$$

partikuläre Lösung: $y_i(x) = 5e^{4x}$

(b) Lösung der inhomogenen DGL:

$$\text{Ansatz: } y = Ce^{4x}; y' = 4Ce^{4x}; y'' = 16Ce^{4x}$$

in die inhomogene DGL einsetzen:

$$y'' - 5y' + 6y = 10e^{4x}$$

$$16Ce^{4x} - 20Ce^{4x} + 6Ce^{4x} = 10e^{4x}$$

$$2Ce^{4x} = 10e^{4x} \quad (\text{Koeffizientenvergleich})$$

$$2C = 10 \quad \Rightarrow \quad C = 5$$

partikuläre Lösung: $y_i(x) = 5e^{4x}$

(c) Allgemeine Lösung der inhomogenen DGL:

(b) Lösung der inhomogenen DGL:

$$\text{Ansatz: } y = Ce^{4x}; y' = 4Ce^{4x}; y'' = 16Ce^{4x}$$

in die inhomogene DGL einsetzen:

$$y'' - 5y' + 6y = 10e^{4x}$$

$$16Ce^{4x} - 20Ce^{4x} + 6Ce^{4x} = 10e^{4x}$$

$$2Ce^{4x} = 10e^{4x} \quad (\text{Koeffizientenvergleich})$$

$$2C = 10 \quad \Rightarrow \quad C = 5$$

partikuläre Lösung: $y_i(x) = 5e^{4x}$

(c) Allgemeine Lösung der inhomogenen DGL:

$$y(x) = y_h(x) + y_i(x) = \underbrace{C_1e^{2x} + C_2e^{3x}}_{y_h(x)} + \underbrace{5e^{4x}}_{y_i(x)}$$

Beispiel 5.3.2

$$\ddot{y} + p\dot{y} + qy = A \cos \omega t \quad (\text{periodische Störfunktion} \rightarrow \text{Physik})$$

Beispiel 5.3.2

$$\ddot{y} + p\dot{y} + qy = A \cos \omega t \quad (\text{periodische Störfunktion} \rightarrow \text{Physik})$$

(a) Lösung der homogenen DGL:

Beispiel 5.3.2

$$\ddot{y} + p\dot{y} + qy = A \cos \omega t \quad (\text{periodische Störfunktion} \rightarrow \text{Physik})$$

(a) *Lösung der homogenen DGL:*

$y_h(t)$ gemäss Formelsammlung auf S. 82 bestimmen

(b) Lösung der inhomogenen DGL:

(b) Lösung der inhomogenen DGL:

$$\text{Ansatz: } y(t) = U \sin \omega t + V \cos \omega t$$

$$\dot{y}(t) = U\omega \cos \omega t - V\omega \sin \omega t$$

$$\ddot{y}(t) = -U\omega^2 \sin \omega t - V\omega^2 \cos \omega t$$

(b) Lösung der inhomogenen DGL:

$$\text{Ansatz: } y(t) = U \sin \omega t + V \cos \omega t$$

$$\dot{y}(t) = U\omega \cos \omega t - V\omega \sin \omega t$$

$$\ddot{y}(t) = -U\omega^2 \sin \omega t - V\omega^2 \cos \omega t$$

in die inhomogene DGL einsetzen:

(b) Lösung der inhomogenen DGL:

$$\text{Ansatz: } y(t) = U \sin \omega t + V \cos \omega t$$

$$\dot{y}(t) = U\omega \cos \omega t - V\omega \sin \omega t$$

$$\ddot{y}(t) = -U\omega^2 \sin \omega t - V\omega^2 \cos \omega t$$

in die inhomogene DGL einsetzen:

$$\ddot{y} + p\dot{y} + qy = A \cos \omega t$$

$$- U\omega^2 \sin \omega t - V\omega^2 \cos \omega t$$

$$+ pU\omega \cos \omega t - pV\omega \sin \omega t$$

$$+ qU \sin \omega t + qV \cos \omega t = A \cdot \cos \omega t + 0 \cdot \sin \omega t$$

(b) Lösung der inhomogenen DGL:

$$\text{Ansatz: } y(t) = U \sin \omega t + V \cos \omega t$$

$$\dot{y}(t) = U\omega \cos \omega t - V\omega \sin \omega t$$

$$\ddot{y}(t) = -U\omega^2 \sin \omega t - V\omega^2 \cos \omega t$$

in die inhomogene DGL einsetzen:

$$\ddot{y} + p\dot{y} + qy = A \cos \omega t$$

$$- U\omega^2 \sin \omega t - V\omega^2 \cos \omega t$$

$$+ pU\omega \cos \omega t - pV\omega \sin \omega t$$

$$+ qU \sin \omega t + qV \cos \omega t = A \cdot \cos \omega t + 0 \cdot \sin \omega t$$

$$\text{Koeffizientenvergleich: } -V\omega^2 + pU\omega + qV = A$$

$$-U\omega^2 - pV\omega + qU = 0$$

$$\begin{aligned}p\omega U + (q - \omega^2)V &= A \\(q - \omega^2)U - p\omega V &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}p\omega U + (q - \omega^2)V &= A \\(q - \omega^2)U - p\omega V &= 0\end{aligned}$$

Substituiere $p\omega = a$ und $(q - \omega^2) = b$:

$$\begin{aligned} p\omega U + (q - \omega^2)V &= A \\ (q - \omega^2)U - p\omega V &= 0 \end{aligned}$$

Substituiere $p\omega = a$ und $(q - \omega^2) = b$:

$$aU + bV = A \tag{3}$$

$$bU - aV = 0 \tag{4}$$

$$\begin{aligned}p\omega U + (q - \omega^2)V &= A \\(q - \omega^2)U - p\omega V &= 0\end{aligned}$$

Substituiere $p\omega = a$ und $(q - \omega^2) = b$:

$$aU + bV = A \tag{3}$$

$$bU - aV = 0 \tag{4}$$

Addiere das a -fache von (3) zum b -fachen von (4):

$$\begin{aligned}p\omega U + (q - \omega^2)V &= A \\(q - \omega^2)U - p\omega V &= 0\end{aligned}$$

Substituiere $p\omega = a$ und $(q - \omega^2) = b$:

$$aU + bV = A \tag{3}$$

$$bU - aV = 0 \tag{4}$$

Addiere das a -fache von (3) zum b -fachen von (4):

$$a^2U + b^2U = aA$$

$$U = \frac{aA}{a^2 + b^2}$$

Subtrahiere das b -fache von (4) von dem a -fachen von (3):

$$b^2 V + a^2 V = bA$$

$$V = \frac{bA}{a^2 + b^2}$$

Subtrahiere das b -fache von (4) von dem a -fachen von (3):

$$b^2 V + a^2 V = bA$$

$$V = \frac{bA}{a^2 + b^2}$$

$$y_i(t) = A \left(\frac{a}{a^2 + b^2} \cdot \sin \omega t + \frac{b}{a^2 + b^2} \cdot \cos \omega t \right) \quad (5)$$

mit $a = p\omega$ und $b = q - \omega^2$

Da der Punkt

$$\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)$$

auf dem Einheitskreis liegt, existiert ein Winkel γ mit

$$\sin \gamma = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad \text{und} \quad \cos \gamma = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Setzt man dies in (5) ein, erhält man mit dem entsprechenden Additionstheorem (S. 99)

$$\begin{aligned} y_i(t) &= \frac{A}{\sqrt{a^2 + b^2}} (\sin \omega t \cos \gamma + \cos \omega t \sin \gamma) \\ &= \frac{A}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin(\omega t + \gamma) \end{aligned}$$

$$\text{mit } \tan \gamma = \frac{\sin \gamma}{\cos \gamma} = \frac{a}{b}$$

Ersetzen von γ durch $-\gamma$ liefert eine Cosinus-Darstellung von $y_i(t)$:

$$\sin(-\gamma) = -\sin \gamma = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\cos(-\gamma) = \cos \gamma = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Setzt man dies wieder in (5) ein, erhält man

$$\begin{aligned} y_i(t) &= \frac{A}{\sqrt{a^2 + b^2}} (-\sin \omega t \sin \gamma + \cos \omega t \cos \gamma) \\ &= \frac{A}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos(\omega t + \gamma) \end{aligned}$$

$$\text{mit } \tan(-\gamma) = \frac{\sin(-\gamma)}{\cos(-\gamma)} = \frac{a}{b}$$

(c) Allgemeine Lösung der inhomogenen DGL:

(c) Allgemeine Lösung der inhomogenen DGL:

$$y(t) = y_h(t) + y_i(t)$$

$$= y_h(t) + \frac{A}{\sqrt{p^2\omega^2 + (q - \omega^2)^2}} \cos(\omega t + \gamma)$$

$$\text{mit } \tan(-\gamma) = \frac{p\omega}{q - \omega^2} \text{ bzw. } \tan \gamma = \frac{p\omega}{\omega^2 - q}$$

Die DGL der freien ungedämpften Schwingung

$$\ddot{y} + \omega_0^2 y = 0$$

Die DGL der freien ungedämpften Schwingung

$$\ddot{y} + \omega_0^2 y = 0$$

charakteristische Gleichung: $\lambda^2 + \omega_0^2 = 0$

$$\lambda^2 = (\omega_0 i)^2$$

$$\lambda_{1,2} = \pm \omega_0 i$$

Die DGL der freien ungedämpften Schwingung

$$\ddot{y} + \omega_0^2 y = 0$$

charakteristische Gleichung: $\lambda^2 + \omega_0^2 = 0$

$$\lambda^2 = (\omega_0 i)^2$$

$$\lambda_{1,2} = \pm \omega_0 i$$

Realteile von $\lambda_{1,2}$ sind null $\Leftrightarrow$ keine Dämpfung

Die DGL der freien ungedämpften Schwingung

$$\ddot{y} + \omega_0^2 y = 0$$

charakteristische Gleichung: $\lambda^2 + \omega_0^2 = 0$

$$\lambda^2 = (\omega_0 i)^2$$

$$\lambda_{1,2} = \pm \omega_0 i$$

Realteile von $\lambda_{1,2}$ sind null $\Leftrightarrow$ keine Dämpfung

$$y(t) = C_1 \sin \omega_0 t + C_2 \cos \omega_0 t = C \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

Die DGL der freien gedämpften Schwingung

$$\ddot{y} + 2\delta\dot{y} + \omega_0^2 y = 0$$

Die DGL der freien gedämpften Schwingung

$$\ddot{y} + 2\delta\dot{y} + \omega_0^2 y = 0$$

$$D = 4\delta^2 - 4\omega_0^2$$

Die DGL der freien gedämpften Schwingung

$$\ddot{y} + 2\delta\dot{y} + \omega_0^2 y = 0$$

$$D = 4\delta^2 - 4\omega_0^2 = 4(\delta^2 - \omega_0^2)$$

Die DGL der freien gedämpften Schwingung

$$\ddot{y} + 2\delta\dot{y} + \omega_0^2 y = 0$$

$$D = 4\delta^2 - 4\omega_0^2 = 4(\delta^2 - \omega_0^2) = -4 \underbrace{(\omega_0^2 - \delta^2)}_{\omega^2}$$

Die DGL der freien gedämpften Schwingung

$$\ddot{y} + 2\delta\dot{y} + \omega_0^2 y = 0$$

$$D = 4\delta^2 - 4\omega_0^2 = 4(\delta^2 - \omega_0^2) = -4 \underbrace{(\omega_0^2 - \delta^2)}_{\omega^2}$$

(1) $D > 0$ wenn $\delta > \omega_0$: **starke Dämpfung**

Die DGL der freien gedämpften Schwingung

$$\ddot{y} + 2\delta\dot{y} + \omega_0^2 y = 0$$

$$D = 4\delta^2 - 4\omega_0^2 = 4(\delta^2 - \omega_0^2) = -4 \underbrace{(\omega_0^2 - \delta^2)}_{\omega^2}$$

(1) $D > 0$ wenn $\delta > \omega_0$: **starke Dämpfung**

$$y(t) = C_1 e^{(-\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2})t} + C_2 e^{(-\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2})t}$$

Die DGL der freien gedämpften Schwingung

$$\ddot{y} + 2\delta\dot{y} + \omega_0^2 y = 0$$

$$D = 4\delta^2 - 4\omega_0^2 = 4(\delta^2 - \omega_0^2) = -4 \underbrace{(\omega_0^2 - \delta^2)}_{\omega^2}$$

(1) $D > 0$ wenn $\delta > \omega_0$: **starke Dämpfung**

$$y(t) = C_1 e^{(-\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2})t} + C_2 e^{(-\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2})t}$$

(2) $D = 0$ wenn $\delta = \omega_0$: **kritische Dämpfung**

Die DGL der freien gedämpften Schwingung

$$\ddot{y} + 2\delta\dot{y} + \omega_0^2 y = 0$$

$$D = 4\delta^2 - 4\omega_0^2 = 4(\delta^2 - \omega_0^2) = -4 \underbrace{(\omega_0^2 - \delta^2)}_{\omega^2}$$

(1) $D > 0$ wenn $\delta > \omega_0$: **starke Dämpfung**

$$y(t) = C_1 e^{(-\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2})t} + C_2 e^{(-\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2})t}$$

(2) $D = 0$ wenn $\delta = \omega_0$: **kritische Dämpfung**

$$y(t) = (C_1 + C_2 t) e^{-\delta t}$$

Die DGL der freien gedämpften Schwingung

$$\ddot{y} + 2\delta\dot{y} + \omega_0^2 y = 0$$

$$D = 4\delta^2 - 4\omega_0^2 = 4(\delta^2 - \omega_0^2) = -4 \underbrace{(\omega_0^2 - \delta^2)}_{\omega^2}$$

(1) $D > 0$ wenn $\delta > \omega_0$: **starke Dämpfung**

$$y(t) = C_1 e^{(-\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2})t} + C_2 e^{(-\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2})t}$$

(2) $D = 0$ wenn $\delta = \omega_0$: **kritische Dämpfung**

$$y(t) = (C_1 + C_2 t) e^{-\delta t}$$

(3) $D < 0$ wenn $\delta < \omega_0$: **schwache Dämpfung**

Die DGL der freien gedämpften Schwingung

$$\ddot{y} + 2\delta\dot{y} + \omega_0^2 y = 0$$

$$D = 4\delta^2 - 4\omega_0^2 = 4(\delta^2 - \omega_0^2) = -4 \underbrace{(\omega_0^2 - \delta^2)}_{\omega^2}$$

(1) $D > 0$ wenn $\delta > \omega_0$: **starke Dämpfung**

$$y(t) = C_1 e^{(-\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2})t} + C_2 e^{(-\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2})t}$$

(2) $D = 0$ wenn $\delta = \omega_0$: **kritische Dämpfung**

$$y(t) = (C_1 + C_2 t) e^{-\delta t}$$

(3) $D < 0$ wenn $\delta < \omega_0$: **schwache Dämpfung**

$$y(t) = C_1 e^{-\delta t} (C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t) = C e^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi)$$

Die DGL der erzwungenen gedämpften Schwingung

Wirkt auf ein gedämpftes schwingendes System eine periodische Störkraft, so führt dies auf folgende DGL:

$$\ddot{y} + 2\delta\dot{y} + \omega^2 y = A \cos \omega_1 t$$

Da der homogene Teil $y_h(t)$ der Lösung durch die Dämpfung früher oder später verschwindet, dominiert nach einer gewissen Zeit die partikuläre Lösung:

Die DGL der erzwungenen gedämpften Schwingung

Wirkt auf ein gedämpftes schwingendes System eine periodische Störkraft, so führt dies auf folgende DGL:

$$\ddot{y} + 2\delta\dot{y} + \omega^2 y = A \cos \omega_1 t$$

Da der homogene Teil $y_h(t)$ der Lösung durch die Dämpfung früher oder später verschwindet, dominiert nach einer gewissen Zeit die partikuläre Lösung:

$$y(t) = y_h(t) + \frac{A}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_1^2)^2 + 4\delta^2\omega_1^2}} \cos(\omega_1 t + \gamma) \quad (6)$$

Beispiel

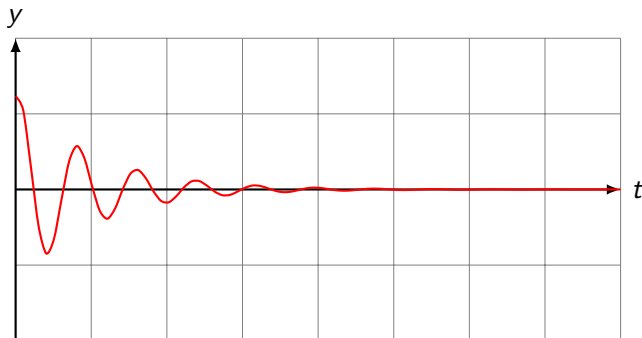
$$\ddot{y} + 2\dot{y} + 65y = 20 \cos(12t); \quad y(0) = 1, \dot{y}(0) = 3$$

Beispiel

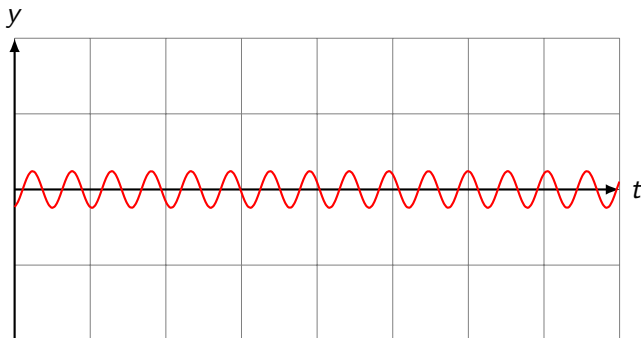
$$\ddot{y} + 2\dot{y} + 65y = 20 \cos(12t); \quad y(0) = 1, \dot{y}(0) = 3$$

$$y(t) = e^{-x}(0.42 \sin 8t + 1.2 \cos 8t) + 0.07 \sin 12t - 0.23 \cos 12t$$

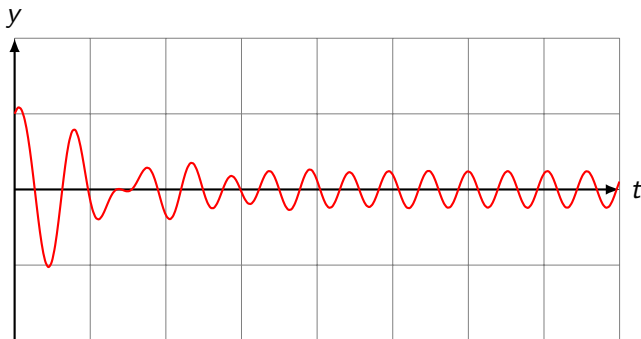
Graph von $y_h(x) = e^{-x}(0.42 \sin 8t + 1.2 \cos 8t)$:



Graph von $y_i(t) = 0.07 \sin 12t - 0.23 \cos 12t$:



Superposition: $y(t) = y_h(t) + y_i(t)$:



Die erzwungene ungedämpfte Schwingung ($\omega_0 \neq \omega_1$)

Für $\delta = 0$ und $\omega_1 \neq \omega_0$ ergibt sich DGL $\ddot{y} + \omega_0^2 y = A \cos \omega_1 t$.

Damit wird (6) zu:

$$y(t) = \underbrace{C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin \omega_0 t}_{y_h} + \underbrace{\frac{A}{\omega_0^2 - \omega_1^2} \cos \omega_1 t}_{y_i} \quad (7)$$

Für die Anfangsbedingung $y(0) = 0$ und $\dot{y}(0) = 0$ erhält man $C_1 = -A/(\omega_0^2 - \omega_1^2)$ und $C_2 = 0$. Insgesamt:

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{A}{\omega_0^2 - \omega_1^2} (\cos \omega_1 t - \cos \omega_0 t) \quad [\text{FBT S. 99}] \\ &= \frac{2A}{\omega_0^2 - \omega_1^2} \sin \frac{(\omega_0 + \omega_1)t}{2} \sin \frac{(\omega_0 - \omega_1)t}{2} \end{aligned} \quad (8)$$

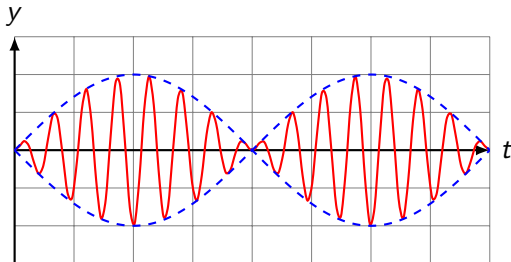
Die Sinusfunktionen mit der kleineren Kreisfrequenz moduliert die Amplitude der Überlagerungsschwingung.

Die Sinusfunktionen mit der kleineren Kreisfrequenz moduliert die Amplitude der Überlagerungsschwingung.

Beispiel mit $A = 60$, $\omega_0 = 16$ und $\omega_1 = 14$:

Die Sinusfunktionen mit der kleineren Kreisfrequenz moduliert die Amplitude der Überlagerungsschwingung.

Beispiel mit $A = 60$, $\omega_0 = 16$ und $\omega_1 = 14$:



Die erzwungene ungedämpfte Schwingung ($\omega_1 = \omega_0$)

Für $\delta = 0$ und $\omega_1 = \omega_0$ ergibt sich DGL $\ddot{y} + \omega_0^2 y = A \cos \omega_0 t$. In diesem Fall können wir wegen der Division durch Null die Lösung (6) nicht mehr wiederverwenden.

Man kann aber zeigen ($\rightarrow$ Übungen), dass die DGL von folgender Funktion gelöst wird:

$$y(t) = \underbrace{C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin \omega_0 t}_{y_h} + \underbrace{\frac{A}{2\omega_0} t \sin \omega_0 t}_{y_i} \quad (9)$$

Diesmal erhält man aus der Anfangsbedingung $y(0) = 0$ und $\dot{y}(0) = 0$ die Konstanten $C_1 = C_2 = 0$ und so:

$$y(t) = \frac{A}{2\omega_0} \cdot t \sin \omega_0 t \quad (10)$$

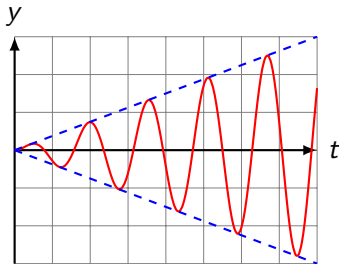
Der Faktor t verursacht ein lineares Anwachsen der Amplitude, was früher oder später zur Zerstörung des Oszillators führt.

Der Faktor t verursacht ein lineares Anwachsen der Amplitude, was früher oder später zur Zerstörung des Oszillators führt.

Beispiel mit $A = 3$ und $\omega_0 = 4$:

Der Faktor t verursacht ein lineares Anwachsen der Amplitude, was früher oder später zur Zerstörung des Oszillators führt.

Beispiel mit $A = 3$ und $\omega_0 = 4$:



Die erzwungene gedämpften Schwingung

Für die DGL der erzwungenen gedämpften Schwingung

$$\ddot{y} + 2\delta\dot{y} + \omega_0^2 y = A \cos \omega_1 t$$

haben wir in Abschnitt 3 die Lösung

$$y(t) = y_h(t) + \frac{A}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_1^2)^2 + 4\delta^2\omega_1^2}} \cos(\omega_1 t + \gamma) \quad (11)$$

hergeleitet. Man kann erkennen, dass die Amplitude

$$\frac{A}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_1^2)^2 + 4\delta^2\omega_1^2}} \quad (12)$$

gross wird, wenn sowohl $\omega_0^2 - \omega_1^2$ als auch δ und ω_1^2 klein sind.

Genauer: Die Amplitude wird maximal, wenn der Radikand

$$(\omega_0^2 - \omega_1^2)^2 + 4\delta^2\omega_1^2$$

minimal wird. Im Resonanzfall gilt notwendigerweise:

$$\frac{d}{d\omega_1} [(\omega_0^2 - \omega_1^2)^2 + 4\delta^2\omega_1^2] = 0$$

Genauer: Die Amplitude wird maximal, wenn der Radikand

$$(\omega_0^2 - \omega_1^2)^2 + 4\delta^2\omega_1^2$$

minimal wird. Im Resonanzfall gilt notwendigerweise:

$$\frac{d}{d\omega_1} [(\omega_0^2 - \omega_1^2)^2 + 4\delta^2\omega_1^2] = 0$$

$$2(\omega_0^2 - \omega_1^2) \cdot (-2\omega_1) + 4\delta^2 \cdot 2\omega_1 = 0$$

Genauer: Die Amplitude wird maximal, wenn der Radikand

$$(\omega_0^2 - \omega_1^2)^2 + 4\delta^2\omega_1^2$$

minimal wird. Im Resonanzfall gilt notwendigerweise:

$$\frac{d}{d\omega_1} [(\omega_0^2 - \omega_1^2)^2 + 4\delta^2\omega_1^2] = 0$$

$$2(\omega_0^2 - \omega_1^2) \cdot (-2\omega_1) + 4\delta^2 \cdot 2\omega_1 = 0$$

$$4\omega_1 [\omega_1^2 - \omega_0^2 + 2\delta^2] = 0 \quad (\omega_1 \neq 0)$$

Genauer: Die Amplitude wird maximal, wenn der Radikand

$$(\omega_0^2 - \omega_1^2)^2 + 4\delta^2\omega_1^2$$

minimal wird. Im Resonanzfall gilt notwendigerweise:

$$\frac{d}{d\omega_1} [(\omega_0^2 - \omega_1^2)^2 + 4\delta^2\omega_1^2] = 0$$

$$2(\omega_0^2 - \omega_1^2) \cdot (-2\omega_1) + 4\delta^2 \cdot 2\omega_1 = 0$$

$$4\omega_1 [\omega_1^2 - \omega_0^2 + 2\delta^2] = 0 \quad (\omega_1 \neq 0)$$

$$\omega_1^2 - \omega_0^2 + 2\delta^2 = 0$$

Genauer: Die Amplitude wird maximal, wenn der Radikand

$$(\omega_0^2 - \omega_1^2)^2 + 4\delta^2\omega_1^2$$

minimal wird. Im Resonanzfall gilt notwendigerweise:

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\omega_1} [(\omega_0^2 - \omega_1^2)^2 + 4\delta^2\omega_1^2] &= 0 \\ 2(\omega_0^2 - \omega_1^2) \cdot (-2\omega_1) + 4\delta^2 \cdot 2\omega_1 &= 0 \\ 4\omega_1 [\omega_1^2 - \omega_0^2 + 2\delta^2] &= 0 \quad (\omega_1 \neq 0) \\ \omega_1^2 - \omega_0^2 + 2\delta^2 &= 0 \\ \omega_1 = \omega_R &= \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}\end{aligned} \tag{13}$$

Genauer: Die Amplitude wird maximal, wenn der Radikand

$$(\omega_0^2 - \omega_1^2)^2 + 4\delta^2\omega_1^2$$

minimal wird. Im Resonanzfall gilt notwendigerweise:

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\omega_1} [(\omega_0^2 - \omega_1^2)^2 + 4\delta^2\omega_1^2] &= 0 \\ 2(\omega_0^2 - \omega_1^2) \cdot (-2\omega_1) + 4\delta^2 \cdot 2\omega_1 &= 0 \\ 4\omega_1 [\omega_1^2 - \omega_0^2 + 2\delta^2] &= 0 \quad (\omega_1 \neq 0) \quad (13) \\ \omega_1^2 - \omega_0^2 + 2\delta^2 &= 0 \\ \omega_1 = \omega_R &= \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}\end{aligned}$$

Ein Maximum ω_R existiert jedoch nur, wenn

Genauer: Die Amplitude wird maximal, wenn der Radikand

$$(\omega_0^2 - \omega_1^2)^2 + 4\delta^2\omega_1^2$$

minimal wird. Im Resonanzfall gilt notwendigerweise:

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\omega_1} [(\omega_0^2 - \omega_1^2)^2 + 4\delta^2\omega_1^2] &= 0 \\ 2(\omega_0^2 - \omega_1^2) \cdot (-2\omega_1) + 4\delta^2 \cdot 2\omega_1 &= 0 \\ 4\omega_1 [\omega_1^2 - \omega_0^2 + 2\delta^2] &= 0 \quad (\omega_1 \neq 0) \quad (13) \\ \omega_1^2 - \omega_0^2 + 2\delta^2 &= 0 \\ \omega_1 = \omega_R &= \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}\end{aligned}$$

Ein Maximum ω_R existiert jedoch nur, wenn $\delta < \omega_0/\sqrt{2}$ gilt.

Um das Verhalten der Amplitude (12) besser analysieren zu können, dividieren wir Zähler und Nenner durch ω_0^2 :

Um das Verhalten der Amplitude (12) besser analysieren zu können, dividieren wir Zähler und Nenner durch ω_0^2 :

$$\frac{A/\omega_0^2}{\sqrt{\left[1 - \frac{\omega_1^2}{\omega_0^2}\right]^2 + 4\delta^2 \frac{\omega_1^2}{\omega_0^4}}}$$

Dann substituieren wir $\omega_1/\omega_0 = \xi$ und $\delta/\omega_0 = u$:

Um das Verhalten der Amplitude (12) besser analysieren zu können, dividieren wir Zähler und Nenner durch ω_0^2 :

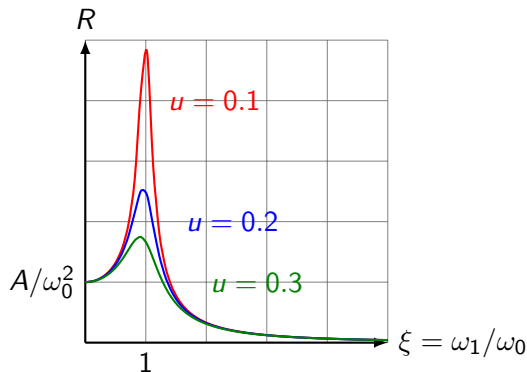
$$\frac{A/\omega_0^2}{\sqrt{\left[1 - \frac{\omega_1^2}{\omega_0^2}\right]^2 + 4\delta^2 \frac{\omega_1^2}{\omega_0^4}}}$$

Dann substituieren wir $\omega_1/\omega_0 = \xi$ und $\delta/\omega_0 = u$:

$$R_u(\xi) = \frac{A/\omega_0^2}{\sqrt{[1 - \xi^2]^2 + 4u^2\xi}}$$

Der (einheitenlose) Frequenzquotient ξ stellt ω_1 als Vielfaches von ω_0 dar. Ferner gilt $R_u(0) = A/\omega_0^2$.

Wählt man zusätzlich auf der y -Achse als Einheit A/ω_0^2 erhält man schliesslich die Resonanzfunktion $R_u(\xi)$, welche neben der Variablen $\xi = \omega_1/\omega_0$ nur noch den Parameter $u = \delta/\omega_0$ enthält.



Wie in (13) bestimmt man $\xi_{\max} = \sqrt{1 - 2u^2}$.

Beispiel 6.1

$$y' = y$$

$$\frac{dy}{dx} = y$$

Beispiel 6.1

$$y' = y$$

$$\frac{dy}{dx} = y$$

$$\frac{1}{y} \cdot dy = 1 \cdot dx$$

Beispiel 6.1

$$y' = y$$

$$\frac{dy}{dx} = y$$

$$\frac{1}{y} \cdot dy = 1 \cdot dx$$

$$\int \frac{1}{y} \cdot dy = \int 1 \cdot dx$$

Beispiel 6.1

$$y' = y$$

$$\frac{dy}{dx} = y$$

$$\frac{1}{y} \cdot dy = 1 \cdot dx$$

$$\int \frac{1}{y} \cdot dy = \int 1 \cdot dx$$

$$\ln |y| = x + C_1 \quad (\text{eine Konstante genügt})$$

Beispiel 6.1

$$y' = y$$

$$\frac{dy}{dx} = y$$

$$\frac{1}{y} \cdot dy = 1 \cdot dx$$

$$\int \frac{1}{y} \cdot dy = \int 1 \cdot dx$$

$$\ln |y| = x + C_1 \quad (\text{eine Konstante genügt})$$

$$e^{|\ln y|} = e^{x+C_1} = e^x \cdot e^{C_1}$$

Beispiel 6.1

$$y' = y$$

$$\frac{dy}{dx} = y$$

$$\frac{1}{y} \cdot dy = 1 \cdot dx$$

$$\int \frac{1}{y} \cdot dy = \int 1 \cdot dx$$

$$\ln |y| = x + C_1 \quad (\text{eine Konstante genügt})$$

$$e^{|\ln y|} = e^{x+C_1} = e^x \cdot e^{C_1}$$

$$y = Ce^x \quad (\text{mit } C = e^{C_1})$$

Beispiel 6.1

$$y' = y$$

$$\frac{dy}{dx} = y$$

$$\frac{1}{y} \cdot dy = 1 \cdot dx$$

$$\int \frac{1}{y} \cdot dy = \int 1 \cdot dx$$

$$\ln |y| = x + C_1 \quad (\text{eine Konstante genügt})$$

$$e^{|\ln y|} = e^{x+C_1} = e^x \cdot e^{C_1}$$

$$y = Ce^x \quad (\text{mit } C = e^{C_1})$$

Exponentialkurven

Beispiel 6.2

$$y' = -x/y$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

Beispiel 6.2

$$y' = -x/y$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

$$y \cdot dy = -x \cdot dx$$

Beispiel 6.2

$$y' = -x/y$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

$$y \cdot dy = -x \cdot dx$$

$$\int y \cdot dy = - \int x \cdot dx$$

Beispiel 6.2

$$y' = -x/y$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

$$y \cdot dy = -x \cdot dx$$

$$\int y \cdot dy = - \int x \cdot dx$$

$$\frac{1}{2}y^2 = -\frac{1}{2}x^2 + C_1$$

Beispiel 6.2

$$y' = -x/y$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

$$y \cdot dy = -x \cdot dx$$

$$\int y \cdot dy = - \int x \cdot dx$$

$$\frac{1}{2}y^2 = -\frac{1}{2}x^2 + C_1$$

$$y^2 = 2C_1 - x^2$$

Beispiel 6.2

$$y' = -x/y$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

$$y \cdot dy = -x \cdot dx$$

$$\int y \cdot dy = - \int x \cdot dx$$

$$\frac{1}{2}y^2 = -\frac{1}{2}x^2 + C_1$$

$$y^2 = 2C_1 - x^2$$

$$y = \pm \sqrt{C - x^2} \quad (\text{mit } C = 2C_1)$$

Beispiel 6.2

$$y' = -x/y$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

$$y \cdot dy = -x \cdot dx$$

$$\int y \cdot dy = - \int x \cdot dx$$

$$\frac{1}{2}y^2 = -\frac{1}{2}x^2 + C_1$$

$$y^2 = 2C_1 - x^2$$

$$y = \pm \sqrt{C - x^2} \quad (\text{mit } C = 2C_1)$$

Halbkreise mit $M(0,0)$ und $r = \sqrt{C}$

Beispiel 6.3

$$y' = x + y$$

$$\frac{dy}{dx} = x + y \quad \text{keine Trennung möglich!}$$

Beispiel 6.3

$$y' = x + y$$

$$\frac{dy}{dx} = x + y \quad \text{keine Trennung möglich!}$$

Trick: Substitution $u = x + y$ (1)

Beispiel 6.3

$$y' = x + y$$

$$\frac{dy}{dx} = x + y \quad \text{keine Trennung möglich!}$$

Trick: Substitution $u = x + y$ (1)

$$u' = 1 + y' \quad \Rightarrow \quad y' = u' - 1 \quad (2)$$

Beispiel 6.3

$$y' = x + y$$

$$\frac{dy}{dx} = x + y \quad \text{keine Trennung möglich!}$$

Trick: Substitution $u = x + y$ (1)

$$u' = 1 + y' \quad \Rightarrow \quad y' = u' - 1 \quad (2)$$

Setze in die Original-DGL rechts (1) und links (2) ein:

Beispiel 6.3

$$y' = x + y$$

$$\frac{dy}{dx} = x + y \quad \text{keine Trennung möglich!}$$

Trick: Substitution $u = x + y$ (1)

$$u' = 1 + y' \quad \Rightarrow \quad y' = u' - 1 \quad (2)$$

Setze in die Original-DGL rechts (1) und links (2) ein:

$$u' - 1 = u \quad (\text{separierbar})$$

Beispiel 6.3

$$y' = x + y$$

$$\frac{dy}{dx} = x + y \quad \text{keine Trennung möglich!}$$

Trick: Substitution $u = x + y$ (1)

$$u' = 1 + y' \quad \Rightarrow \quad y' = u' - 1 \quad (2)$$

Setze in die Original-DGL rechts (1) und links (2) ein:

$$u' - 1 = u \quad (\text{separierbar})$$

$$u' = u + 1$$

Beispiel 6.3

$$y' = x + y$$

$$\frac{dy}{dx} = x + y \quad \text{keine Trennung möglich!}$$

Trick: Substitution $u = x + y$ (1)

$$u' = 1 + y' \quad \Rightarrow \quad y' = u' - 1 \quad (2)$$

Setze in die Original-DGL rechts (1) und links (2) ein:

$$u' - 1 = u \quad (\text{separierbar})$$

$$u' = u + 1$$

$$\frac{du}{dx} = u + 1$$

$$du = (u + 1) \cdot dx$$

$$du = (u + 1) \cdot dx$$

$$\frac{1}{u + 1} du = 1 dx$$

$$du = (u + 1) \cdot dx$$

$$\frac{1}{u + 1} du = 1 dx$$

$$\int \frac{1}{u + 1} du = \int 1 dx$$

$$du = (u + 1) \cdot dx$$

$$\frac{1}{u + 1} du = 1 dx$$

$$\int \frac{1}{u + 1} du = \int 1 dx$$

$$\ln |1 + u| = x + C_1$$

$$|| \exp(\dots)$$

$$du = (u + 1) \cdot dx$$

$$\frac{1}{u + 1} du = 1 dx$$

$$\int \frac{1}{u + 1} du = \int 1 dx$$

$$\ln |1 + u| = x + C_1 \quad || \exp(\dots)$$

$$|1 + u| = e^{x+C_1} = e^x e^{C_1} = C_2 e^x \quad (C_2 = e^{C_1})$$

$$du = (u + 1) \cdot dx$$

$$\frac{1}{u + 1} du = 1 dx$$

$$\int \frac{1}{u + 1} du = \int 1 dx$$

$$\ln |1 + u| = x + C_1 \quad || \exp(\dots)$$

$$|1 + u| = e^{x+C_1} = e^x e^{C_1} = C_2 e^x \quad (C_2 = e^{C_1})$$

$$1 + u = \pm C_2 e^x = C e^x \quad (C = \pm C_2)$$

$$du = (u + 1) \cdot dx$$

$$\frac{1}{u + 1} du = 1 dx$$

$$\int \frac{1}{u + 1} du = \int 1 dx$$

$$\ln |1 + u| = x + C_1 \quad || \exp(\dots)$$

$$|1 + u| = e^{x+C_1} = e^x e^{C_1} = C_2 e^x \quad (C_2 = e^{C_1})$$

$$1 + u = \pm C_2 e^x = C e^x \quad (C = \pm C_2)$$

$$u = C e^x - 1$$

$$du = (u + 1) \cdot dx$$

$$\frac{1}{u + 1} du = 1 dx$$

$$\int \frac{1}{u + 1} du = \int 1 dx$$

$$\ln |1 + u| = x + C_1 \quad || \exp(\dots)$$

$$|1 + u| = e^{x+C_1} = e^x e^{C_1} = C_2 e^x \quad (C_2 = e^{C_1})$$

$$1 + u = \pm C_2 e^x = C e^x \quad (C = \pm C_2)$$

$$u = C e^x - 1$$

$$x + y = C e^x - 1$$

$$y = C e^x - x - 1$$

Allgemeine Form

Allgemeine Form der linearen DGL 1. Ordnung:

$$f(x) \cdot y' + g(x) \cdot y = h(x)$$

Diese Art von Differenzialgleichungen wird linear genannt, weil y' und y linear auftreten. Die Koeffizientenfunktionen $f(x)$ und $g(x)$ müssen jedoch nicht linear sein.

Normalform

Division durch $f(x)$ ergibt:

Normalform

Division durch $f(x)$ ergibt:

$$y' + \frac{g(x)}{f(x)} \cdot y = \frac{h(x)}{f(x)}$$

Normalform

Division durch $f(x)$ ergibt:

$$y' + \frac{g(x)}{f(x)} \cdot y = \frac{h(x)}{f(x)}$$

$$y' + u(x) \cdot y = v(x) \quad \text{Normalform}$$

Normalform

Division durch $f(x)$ ergibt:

$$y' + \frac{g(x)}{f(x)} \cdot y = \frac{h(x)}{f(x)}$$

$$y' + u(x) \cdot y = v(x) \quad \text{Normalform}$$

$v(x)$ wird *Störfunktion* genannt.

Normalform

Division durch $f(x)$ ergibt:

$$y' + \frac{g(x)}{f(x)} \cdot y = \frac{h(x)}{f(x)}$$

$$y' + u(x) \cdot y = v(x) \quad \text{Normalform}$$

$v(x)$ wird *Störfunktion* genannt.

Sind $h(x) \equiv 0$ bzw. $v(x) \equiv 0$, nennt man die lineare DGL *homogen*, sonst *inhomogen*.

Lösung der homogenen linearen DGL

$$y' + u(x) y = 0$$

Lösung der homogenen linearen DGL

$$y' + u(x) y = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -u(x) y$$

Lösung der homogenen linearen DGL

$$y' + u(x) y = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -u(x) y$$

$$\frac{1}{y} dy = -u(x) dx \quad [\text{Separation der Variablen}]$$

Lösung der homogenen linearen DGL

$$y' + u(x) y = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -u(x) y$$

$$\frac{1}{y} dy = -u(x) dx \quad [\text{Separation der Variablen}]$$

$$\int \frac{1}{y} dy = - \int u(x) dx$$

Lösung der homogenen linearen DGL

$$y' + u(x) y = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -u(x) y$$

$$\frac{1}{y} dy = -u(x) dx \quad [\text{Separation der Variablen}]$$

$$\int \frac{1}{y} dy = - \int u(x) dx$$

$$\ln y = -U(x) + K \quad [U \text{ ist Stammfunktion von } u]$$

Lösung der homogenen linearen DGL

$$y' + u(x) y = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -u(x) y$$

$$\frac{1}{y} dy = -u(x) dx \quad [\text{Separation der Variablen}]$$

$$\int \frac{1}{y} dy = - \int u(x) dx$$

$$\ln y = -U(x) + K \quad [U \text{ ist Stammfunktion von } u]$$

$$y = e^{-U(x)+K} = e^{-U(x)} \cdot e^K$$

Lösung der homogenen linearen DGL

$$y' + u(x) y = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -u(x) y$$

$$\frac{1}{y} dy = -u(x) dx \quad [\text{Separation der Variablen}]$$

$$\int \frac{1}{y} dy = - \int u(x) dx$$

$$\ln y = -U(x) + K \quad [U \text{ ist Stammfunktion von } u]$$

$$y = e^{-U(x)+K} = e^{-U(x)} \cdot e^K$$

$$y_h = C \cdot e^{-U(x)} \quad \text{allg. Lsg. der hom. DGL}$$

Wir fassen in der Lösung y_h der homogenen DGL die Konstante C als Funktion $G(x)$ auf und versuchen $G(x)$ so zu wählen, dass die inhomogene DGL erfüllt wird. Deshalb wird diese Methode *Variation der Konstanten* genannt.

Wir fassen in der Lösung y_h der homogenen DGL die Konstante C als Funktion $G(x)$ auf und versuchen $G(x)$ so zu wählen, dass die inhomogene DGL erfüllt wird. Deshalb wird diese Methode *Variation der Konstanten* genannt.

$$y_i = G(x) \cdot e^{-U(x)}$$

Den Lösungsansatz setzen wir in die *inhomogene* Gleichung ein und leiten ab:

Den Lösungsansatz setzen wir in die *inhomogene* Gleichung ein und leiten ab:

$$y' + u(x)y = v(x)$$

Den Lösungsansatz setzen wir in die *inhomogene* Gleichung ein und leiten ab:

$$y' + u(x)y = v(x)$$

$$\left[G(x) e^{-U(x)} \right]' + u(x) \cdot G(x) e^{-U(x)} = v(x)$$

Den Lösungsansatz setzen wir in die *inhomogene* Gleichung ein und leiten ab:

$$y' + u(x)y = v(x)$$

$$\left[G(x) e^{-U(x)} \right]' + u(x) \cdot G(x) e^{-U(x)} = v(x)$$

$$G'(x) e^{-U(x)} - U'(x) G(x) e^{-U(x)} + u(x) G(x) e^{-U(x)} = v(x)$$

Wegen $U'(x) = u(x)$ gilt:

Wegen $U'(x) = u(x)$ gilt:

$$G'(x) e^{-U(x)} - u(x) G(x) e^{-U(x)} + u(x) G(x) e^{-U(x)} = v(x)$$

Wegen $U'(x) = u(x)$ gilt:

$$G'(x) e^{-U(x)} - u(x) G(x) e^{-U(x)} + u(x) G(x) e^{-U(x)} = v(x)$$

$$G'(x) e^{-U(x)} = v(x)$$

Wegen $U'(x) = u(x)$ gilt:

$$G'(x) e^{-U(x)} - u(x) G(x) e^{-U(x)} + u(x) G(x) e^{-U(x)} = v(x)$$

$$G'(x) e^{-U(x)} = v(x) \quad || \cdot e^{U(x)}$$

Wegen $U'(x) = u(x)$ gilt:

$$G'(x) e^{-U(x)} - u(x) G(x) e^{-U(x)} + u(x) G(x) e^{-U(x)} = v(x)$$

$$G'(x) e^{-U(x)} = v(x) \quad || \cdot e^{U(x)}$$

$$G'(x) = v(x) \cdot e^{U(x)}$$

Wegen $U'(x) = u(x)$ gilt:

$$G'(x) e^{-U(x)} - u(x) G(x) e^{-U(x)} + u(x) G(x) e^{-U(x)} = v(x)$$

$$G'(x) e^{-U(x)} = v(x) \quad || \cdot e^{U(x)}$$

$$G'(x) = v(x) \cdot e^{U(x)}$$

$$G(x) = \int v(x) e^{U(x)} dx$$

Wegen $U'(x) = u(x)$ gilt:

$$G'(x) e^{-U(x)} - u(x) G(x) e^{-U(x)} + u(x) G(x) e^{-U(x)} = v(x)$$

$$G'(x) e^{-U(x)} = v(x) \quad || \cdot e^{U(x)}$$

$$G'(x) = v(x) \cdot e^{U(x)}$$

$$G(x) = \int v(x) e^{U(x)} dx$$

Wir können hier die Integrationskonstante weglassen, da wir nur an einer speziellen Lösung interessiert sind.

Zur Erinnerung: $G(x)$ ist so beschaffen, dass die Funktion

Zur Erinnerung: $G(x)$ ist so beschaffen, dass die Funktion

$$y_i = G(x) \cdot e^{-U(x)}$$

Zur Erinnerung: $G(x)$ ist so beschaffen, dass die Funktion

$$y_i = G(x) \cdot e^{-U(x)} = \int v(x) e^{U(x)} dx \cdot e^{-U(x)}$$

Zur Erinnerung: $G(x)$ ist so beschaffen, dass die Funktion

$$y_i = G(x) \cdot e^{-U(x)} = \int v(x) e^{U(x)} dx \cdot e^{-U(x)}$$

eine Lösung der inhomogenen linearen DGL 1. Ordnung ist. Also:

Zur Erinnerung: $G(x)$ ist so beschaffen, dass die Funktion

$$y_i = G(x) \cdot e^{-U(x)} = \int v(x) e^{U(x)} dx \cdot e^{-U(x)}$$

eine Lösung der inhomogenen linearen DGL 1. Ordnung ist. Also:

$$y(x) = y_h + y_i$$

Zur Erinnerung: $G(x)$ ist so beschaffen, dass die Funktion

$$y_i = G(x) \cdot e^{-U(x)} = \int v(x) e^{U(x)} dx \cdot e^{-U(x)}$$

eine Lösung der inhomogenen linearen DGL 1. Ordnung ist. Also:

$$\begin{aligned} y(x) &= y_h + y_i \\ &= Ce^{-U(x)} + \int v(x) e^{U(x)} dx \cdot e^{-U(x)} \end{aligned}$$

Zur Erinnerung: $G(x)$ ist so beschaffen, dass die Funktion

$$y_i = G(x) \cdot e^{-U(x)} = \int v(x) e^{U(x)} dx \cdot e^{-U(x)}$$

eine Lösung der inhomogenen linearen DGL 1. Ordnung ist. Also:

$$y(x) = y_h + y_i$$

$$= Ce^{-U(x)} + \int v(x) e^{U(x)} dx \cdot e^{-U(x)}$$

$$= e^{-U(x)} \left[C + \int v(x) e^{U(x)} dx \right] \quad (\text{FTB S. 82})$$

Zur Erinnerung: $G(x)$ ist so beschaffen, dass die Funktion

$$y_i = G(x) \cdot e^{-U(x)} = \int v(x) e^{U(x)} dx \cdot e^{-U(x)}$$

eine Lösung der inhomogenen linearen DGL 1. Ordnung ist. Also:

$$y(x) = y_h + y_i$$

$$= Ce^{-U(x)} + \int v(x) e^{U(x)} dx \cdot e^{-U(x)}$$

$$= e^{-U(x)} \left[C + \int v(x) e^{U(x)} dx \right] \quad (\text{FTB S. 82})$$

Die allgemeine Lösung der linearen inhomogenen DGL 1. Ordnung ist eine Summe aus der allgemeine Lösung y_h der homogenen DGL und einer speziellen Lösung y_i der inhomogenen DGL.

Beispiel 7.1

Bestimme die allgemeine Lösung der DGL $xy' + y = x^2$, ($x > 0$).

Beispiel 7.1

Bestimme die allgemeine Lösung der DGL $xy' + y = x^2$, ($x > 0$).

Normalform:

Beispiel 7.1

Bestimme die allgemeine Lösung der DGL $xy' + y = x^2$, ($x > 0$).

Normalform: $y' + \frac{1}{x} \cdot y = x$

Beispiel 7.1

Bestimme die allgemeine Lösung der DGL $xy' + y = x^2$, ($x > 0$).

Normalform: $y' + \frac{1}{x} \cdot y = x$

$u(x) = 1/x \Rightarrow U(x) = \ln x$

Beispiel 7.1

Bestimme die allgemeine Lösung der DGL $xy' + y = x^2$, ($x > 0$).

Normalform: $y' + \frac{1}{x} \cdot y = x$

$$u(x) = 1/x \quad \Rightarrow \quad U(x) = \ln x$$

$$y_h = C \cdot e^{-U(x)} = C \cdot e^{-\ln x} = C \cdot e^{\ln x^{-1}} = C \cdot x^{-1} = C/x$$

Beispiel 7.1

Bestimme die allgemeine Lösung der DGL $xy' + y = x^2$, ($x > 0$).

Normalform: $y' + \frac{1}{x} \cdot y = x$

$$u(x) = 1/x \quad \Rightarrow \quad U(x) = \ln x$$

$$y_h = C \cdot e^{-U(x)} = C \cdot e^{-\ln x} = C \cdot e^{\ln x^{-1}} = C \cdot x^{-1} = C/x$$

$$v(x) = x$$

Beispiel 7.1

Bestimme die allgemeine Lösung der DGL $xy' + y = x^2$, ($x > 0$).

Normalform: $y' + \frac{1}{x} \cdot y = x$

$$u(x) = 1/x \Rightarrow U(x) = \ln x$$

$$y_h = C \cdot e^{-U(x)} = C \cdot e^{-\ln x} = C \cdot e^{\ln x^{-1}} = C \cdot x^{-1} = C/x$$

$$v(x) = x$$

$$y_s = \int v(x) \cdot e^{U(x)} dx \cdot e^{-U(x)}$$

Beispiel 7.1

Bestimme die allgemeine Lösung der DGL $xy' + y = x^2$, ($x > 0$).

Normalform: $y' + \frac{1}{x} \cdot y = x$

$$u(x) = 1/x \Rightarrow U(x) = \ln x$$

$$y_h = C \cdot e^{-U(x)} = C \cdot e^{-\ln x} = C \cdot e^{\ln x^{-1}} = C \cdot x^{-1} = C/x$$

$$v(x) = x$$

$$y_s = \int v(x) \cdot e^{U(x)} dx \cdot e^{-U(x)} = \int x \cdot e^{\ln x} dx \cdot e^{-\ln x}$$

Beispiel 7.1

Bestimme die allgemeine Lösung der DGL $xy' + y = x^2$, ($x > 0$).

Normalform: $y' + \frac{1}{x} \cdot y = x$

$$u(x) = 1/x \Rightarrow U(x) = \ln x$$

$$y_h = C \cdot e^{-U(x)} = C \cdot e^{-\ln x} = C \cdot e^{\ln x^{-1}} = C \cdot x^{-1} = C/x$$

$$v(x) = x$$

$$y_s = \int v(x) \cdot e^{U(x)} dx \cdot e^{-U(x)} = \int x \cdot e^{\ln x} dx \cdot e^{-\ln x}$$

$$= \int x^2 dx \cdot \frac{1}{x}$$

Beispiel 7.1

Bestimme die allgemeine Lösung der DGL $xy' + y = x^2$, ($x > 0$).

Normalform: $y' + \frac{1}{x} \cdot y = x$

$$u(x) = 1/x \Rightarrow U(x) = \ln x$$

$$y_h = C \cdot e^{-U(x)} = C \cdot e^{-\ln x} = C \cdot e^{\ln x^{-1}} = C \cdot x^{-1} = C/x$$

$$v(x) = x$$

$$y_s = \int v(x) \cdot e^{U(x)} dx \cdot e^{-U(x)} = \int x \cdot e^{\ln x} dx \cdot e^{-\ln x}$$

$$= \int x^2 dx \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{3}x^2$$

$$y = y_h + y_i = \frac{C}{x} + \frac{1}{3}x^2$$

Beispiel 7.2

Befindet sich ein Körper in einem Medium mit der konstanten Temperatur T_U , so ist seine (zeitliche) Temperaturänderung proportional zur Temperaturdifferenz.

Gesucht: Temperaturverlauf $T(t)$ für die Anfangstemperatur T_0 .

$$\text{DGL: } \dot{T} = -k(T - T_U) \quad \Rightarrow \quad \dot{T} + kT = kT_U \quad [U = U(t)]$$

Beispiel 7.2

Befindet sich ein Körper in einem Medium mit der konstanten Temperatur T_U , so ist seine (zeitliche) Temperaturänderung proportional zur Temperaturdifferenz.

Gesucht: Temperaturverlauf $T(t)$ für die Anfangstemperatur T_0 .

$$\text{DGL: } \dot{T} = -k(T - T_U) \quad \Rightarrow \quad \dot{T} + kT = kT_U \quad [U = U(t)]$$

$$u(t) = k \quad \Rightarrow$$

Beispiel 7.2

Befindet sich ein Körper in einem Medium mit der konstanten Temperatur T_U , so ist seine (zeitliche) Temperaturänderung proportional zur Temperaturdifferenz.

Gesucht: Temperaturverlauf $T(t)$ für die Anfangstemperatur T_0 .

$$\text{DGL: } \dot{T} = -k(T - T_U) \quad \Rightarrow \quad \dot{T} + kT = kT_U \quad [U = U(t)]$$

$$u(t) = k \quad \Rightarrow \quad U(t) = kt$$

Beispiel 7.2

Befindet sich ein Körper in einem Medium mit der konstanten Temperatur T_U , so ist seine (zeitliche) Temperaturänderung proportional zur Temperaturdifferenz.

Gesucht: Temperaturverlauf $T(t)$ für die Anfangstemperatur T_0 .

$$\text{DGL: } \dot{T} = -k(T - T_U) \quad \Rightarrow \quad \dot{T} + kT = kT_U \quad [U = U(t)]$$

$$u(t) = k \quad \Rightarrow \quad U(t) = kt$$

Lösung der homogenen DGL:

Beispiel 7.2

Befindet sich ein Körper in einem Medium mit der konstanten Temperatur T_U , so ist seine (zeitliche) Temperaturänderung proportional zur Temperaturdifferenz.

Gesucht: Temperaturverlauf $T(t)$ für die Anfangstemperatur T_0 .

$$\text{DGL: } \dot{T} = -k(T - T_U) \quad \Rightarrow \quad \dot{T} + kT = kT_U \quad [U = U(t)]$$

$$u(t) = k \quad \Rightarrow \quad U(t) = kt$$

$$\text{Lösung der homogenen DGL: } T_h(t) = C e^{-U(t)} = C e^{-kt}$$

Störfunktion: $v(t) = kT_U$ (konstant)

Störfunktion: $v(t) = kT_U$ (konstant)

$G(t)$

Störfunktion: $v(t) = kT_U$ (konstant)

$$G(t) = \int v(x) e^{U(x)} dx$$

Störfunktion: $v(t) = kT_U$ (konstant)

$$G(t) = \int v(x) e^{U(x)} dx = \int kT_U e^{kt} dt$$

Störfunktion: $v(t) = kT_U$ (konstant)

$$G(t) = \int v(x) e^{U(x)} dx = \int kT_U e^{kt} dt = T_U e^{kt}$$

Störfunktion: $v(t) = kT_U$ (konstant)

$$G(t) = \int v(x) e^{U(x)} dx = \int kT_U e^{kt} dt = T_U e^{kt}$$

Störfunktion: $v(t) = kT_U$ (konstant)

$$G(t) = \int v(x) e^{U(x)} dx = \int kT_U e^{kt} dt = T_U e^{kt}$$

Allgemeine Lösung der inhomogenen DGL:

Störfunktion: $v(t) = kT_U$ (konstant)

$$G(t) = \int v(x) e^{U(x)} dx = \int kT_U e^{kt} dt = T_U e^{kt}$$

Allgemeine Lösung der inhomogenen DGL:

$$T(t)$$

Störfunktion: $v(t) = kT_U$ (konstant)

$$G(t) = \int v(x) e^{U(x)} dx = \int kT_U e^{kt} dt = T_U e^{kt}$$

Allgemeine Lösung der inhomogenen DGL:

$$T(t) = (G(x) + C) e^{-U(x)}$$

Störfunktion: $v(t) = kT_U$ (konstant)

$$G(t) = \int v(x) e^{U(x)} dx = \int kT_U e^{kt} dt = T_U e^{kt}$$

Allgemeine Lösung der inhomogenen DGL:

$$T(t) = (G(x) + C)e^{-U(x)} = (T_U e^{kt} + C)e^{-kt}$$

Störfunktion: $v(t) = kT_U$ (konstant)

$$G(t) = \int v(x) e^{U(x)} dx = \int kT_U e^{kt} dt = T_U e^{kt}$$

Allgemeine Lösung der inhomogenen DGL:

$$T(t) = (G(x) + C)e^{-U(x)} = (T_U e^{kt} + C)e^{-kt} = T_U + Ce^{-kt}$$

Störfunktion: $v(t) = kT_U$ (konstant)

$$G(t) = \int v(x) e^{U(x)} dx = \int kT_U e^{kt} dt = T_U e^{kt}$$

Allgemeine Lösung der inhomogenen DGL:

$$T(t) = (G(x) + C)e^{-U(x)} = (T_U e^{kt} + C)e^{-kt} = T_U + Ce^{-kt}$$

Anfangswert für $t = 0$: $T(0) = T_0$

Störfunktion: $v(t) = kT_U$ (konstant)

$$G(t) = \int v(x) e^{U(x)} dx = \int kT_U e^{kt} dt = T_U e^{kt}$$

Allgemeine Lösung der inhomogenen DGL:

$$T(t) = (G(x) + C)e^{-U(x)} = (T_U e^{kt} + C)e^{-kt} = T_U + Ce^{-kt}$$

Anfangswert für $t = 0$: $T(0) = T_0$

$$T_0 = T(0) = T_U + C$$

Störfunktion: $v(t) = kT_U$ (konstant)

$$G(t) = \int v(x) e^{U(x)} dx = \int kT_U e^{kt} dt = T_U e^{kt}$$

Allgemeine Lösung der inhomogenen DGL:

$$T(t) = (G(x) + C)e^{-U(x)} = (T_U e^{kt} + C)e^{-kt} = T_U + Ce^{-kt}$$

Anfangswert für $t = 0$: $T(0) = T_0$

$$T_0 = T(0) = T_U + C$$

$$C = T_0 - T_U$$

Störfunktion: $v(t) = kT_U$ (konstant)

$$G(t) = \int v(x) e^{U(x)} dx = \int kT_U e^{kt} dt = T_U e^{kt}$$

Allgemeine Lösung der inhomogenen DGL:

$$T(t) = (G(x) + C)e^{-U(x)} = (T_U e^{kt} + C)e^{-kt} = T_U + Ce^{-kt}$$

Anfangswert für $t = 0$: $T(0) = T_0$

$$T_0 = T(0) = T_U + C$$

$$C = T_0 - T_U$$

$$T(t) = T_U + (T_0 - T_U)e^{-kt}$$

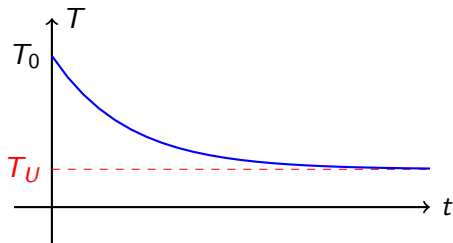
Asymptotisches Verhalten:

Asymptotisches Verhalten:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} T(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} [(T_0 - T_U)e^{-kt} + T_U] = 0 + T_U = T_U$$

Asymptotisches Verhalten:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} T(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} [(T_0 - T_U)e^{-kt} + T_U] = 0 + T_U = T_U$$



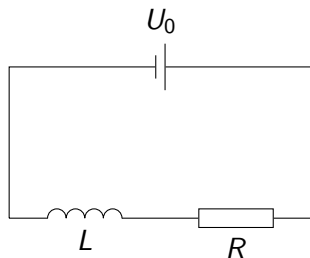
Bemerkung: Für Temperaturen in Kelvin wird $T(t)$ geschrieben; für Temperaturen in $^{\circ}\text{C}$ hingegen $\vartheta(t)$.

Beispiel 7.3

Im skizzierten Stromkreis

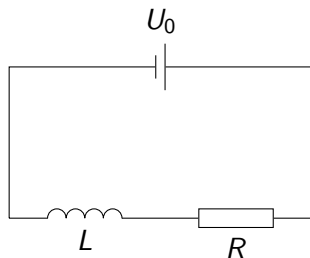
Beispiel 7.3

Im skizzierten Stromkreis



Beispiel 7.3

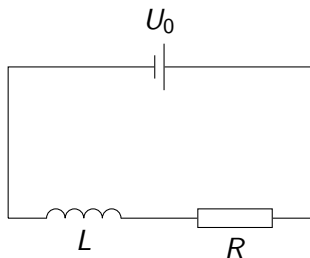
Im skizzierten Stromkreis



gilt nach Kirchhoff:

Beispiel 7.3

Im skizzierten Stromkreis



gilt nach Kirchhoff:

$$L \frac{dI}{dt} + R \cdot I = U_0$$

Normalform:

Normalform:

$$\dot{i} + \frac{R}{L} \cdot I = \frac{U_0}{L}$$

Normalform:

$$\dot{i} + \frac{R}{L} \cdot i = \frac{U_0}{L}$$

$$u(t) = \frac{R}{L} \Rightarrow U(t) = \frac{R}{L} \cdot t$$

Normalform:

$$\dot{i} + \frac{R}{L} \cdot i = \frac{U_0}{L}$$

$$u(t) = \frac{R}{L} \Rightarrow U(t) = \frac{R}{L} \cdot t$$

Lösung der homogenen Gleichung:

Normalform:

$$\dot{I} + \frac{R}{L} \cdot I = \frac{U_0}{L}$$

$$u(t) = \frac{R}{L} \Rightarrow U(t) = \frac{R}{L} \cdot t$$

Lösung der homogenen Gleichung:

$$I_h(t) = C e^{-U(t)} = C e^{-\frac{R}{L} \cdot t}$$

Störfunktion:

Störfunktion:

Störfunktion:

$$v(t) = U_0/L \quad [\text{konstant!}]$$

Störfunktion:

$$v(t) = U_0/L \quad [\text{konstant!}]$$

$$G(t) = \int v(t) e^{U(t)} dt = \frac{U_0}{L} \int e^{\frac{R}{L} \cdot t} dt$$

$$= \frac{U_0}{L} \cdot \frac{L}{R} e^{\frac{R}{L} \cdot t} = \frac{U_0}{R} e^{\frac{R}{L} \cdot t}$$

Störfunktion:

$$v(t) = U_0/L \quad [\text{konstant!}]$$

$$\begin{aligned} G(t) &= \int v(t) e^{U(t)} dt = \frac{U_0}{L} \int e^{\frac{R}{L} \cdot t} dt \\ &= \frac{U_0}{L} \cdot \frac{L}{R} e^{\frac{R}{L} \cdot t} = \frac{U_0}{R} e^{\frac{R}{L} \cdot t} \end{aligned}$$

Allgemeine Lösung:

Störfunktion:

$$v(t) = U_0/L \quad [\text{konstant!}]$$

$$\begin{aligned} G(t) &= \int v(t) e^{U(t)} dt = \frac{U_0}{L} \int e^{\frac{R}{L} \cdot t} dt \\ &= \frac{U_0}{L} \cdot \frac{L}{R} e^{\frac{R}{L} \cdot t} = \frac{U_0}{R} e^{\frac{R}{L} \cdot t} \end{aligned}$$

Allgemeine Lösung:

$$\begin{aligned} I(t) &= (G(x) + C) e^{-U(x)} = \left(\frac{U_0}{R} e^{\frac{R}{L} \cdot t} + C \right) e^{-\frac{R}{L} t} \\ &= \frac{U_0}{R} + C e^{-\frac{R}{L} t} \end{aligned}$$

Anfangswertproblem (AWP):

Zum Zeitpunkt $t = 0$ soll kein Strom fließen: $I_0 = I(0) = 0$

Anfangswertproblem (AWP):

Zum Zeitpunkt $t = 0$ soll kein Strom fließen: $I_0 = I(0) = 0$

$$I_0 = I(0) = \frac{U_0}{R} + C = 0 \quad \Rightarrow$$

Anfangswertproblem (AWP):

Zum Zeitpunkt $t = 0$ soll kein Strom fließen: $I_0 = I(0) = 0$

$$I_0 = I(0) = \frac{U_0}{R} + C = 0 \quad \Rightarrow \quad C = -\frac{U_0}{R}$$

Anfangswertproblem (AWP):

Zum Zeitpunkt $t = 0$ soll kein Strom fließen: $I_0 = I(0) = 0$

$$I_0 = I(0) = \frac{U_0}{R} + C = 0 \quad \Rightarrow \quad C = -\frac{U_0}{R}$$

Lösung des AWP:

Anfangswertproblem (AWP):

Zum Zeitpunkt $t = 0$ soll kein Strom fließen: $I_0 = I(0) = 0$

$$I_0 = I(0) = \frac{U_0}{R} + C = 0 \quad \Rightarrow \quad C = -\frac{U_0}{R}$$

Lösung des AWP:

$$I(t) = \frac{U_0}{R} - \frac{U_0}{R} e^{-\frac{R}{L}t} = \frac{U_0}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)$$

Beispiel 7.4

Bewegt sich eine Kugel in einer zähen Flüssigkeit, so ist die Widerstandskraft nach Stokes proportional zur Geschwindigkeit.

Für die Sinkgeschwindigkeit der Kugel infolge ihres Gewichts erhält man nach dem Newtonschen Grundgesetz die Bewegungsgleichung:

Beispiel 7.4

Bewegt sich eine Kugel in einer zähen Flüssigkeit, so ist die Widerstandskraft nach Stokes proportional zur Geschwindigkeit.

Für die Sinkgeschwindigkeit der Kugel infolge ihres Gewichts erhält man nach dem Newtonschen Grundgesetz die Bewegungsgleichung:

$$m \cdot a = F$$

Beispiel 7.4

Bewegt sich eine Kugel in einer zähen Flüssigkeit, so ist die Widerstandskraft nach Stokes proportional zur Geschwindigkeit.

Für die Sinkgeschwindigkeit der Kugel infolge ihres Gewichts erhält man nach dem Newtonschen Grundgesetz die Bewegungsgleichung:

$$m \cdot a = F$$

$$m \cdot a = F_G - F_R$$

Beispiel 7.4

Bewegt sich eine Kugel in einer zähen Flüssigkeit, so ist die Widerstandskraft nach Stokes proportional zur Geschwindigkeit.

Für die Sinkgeschwindigkeit der Kugel infolge ihres Gewichts erhält man nach dem Newtonschen Grundgesetz die Bewegungsgleichung:

$$m \cdot a = F$$

$$m \cdot a = F_G - F_R$$

$$m \cdot \dot{v} = m \cdot g - c \cdot v$$

$$m \cdot \dot{v} = m \cdot g - c \cdot v$$

$$m \cdot \dot{v} = m \cdot g - c \cdot v$$

$$\dot{v} + \frac{c}{m}v = g \quad \text{Normalform}$$

$$m \cdot \dot{v} = m \cdot g - c \cdot v$$

$$\dot{v} + \frac{c}{m}v = g \quad \text{Normalform}$$

$$u(t) = \frac{c}{m} \Rightarrow$$

$$m \cdot \dot{v} = m \cdot g - c \cdot v$$

$$\dot{v} + \frac{c}{m} v = g \quad \text{Normalform}$$

$$u(t) = \frac{c}{m} \quad \Rightarrow \quad U(t) = \frac{c}{m} \cdot t$$

$$m \cdot \dot{v} = m \cdot g - c \cdot v$$

$$\dot{v} + \frac{c}{m}v = g \quad \text{Normalform}$$

$$u(t) = \frac{c}{m} \Rightarrow U(t) = \frac{c}{m} \cdot t$$

Lösung der homogenen Gleichung:

$$m \cdot \dot{v} = m \cdot g - c \cdot v$$

$$\dot{v} + \frac{c}{m}v = g \quad \text{Normalform}$$

$$u(t) = \frac{c}{m} \quad \Rightarrow \quad U(t) = \frac{c}{m} \cdot t$$

Lösung der homogenen Gleichung: $v_h = C e^{-\frac{c}{m}t}$

Störfunktion:

Störfunktion: $v(t) = g$ [konstant]

Störfunktion: $v(t) = g$ [konstant]

$$G(t) = \int v(t) e^{U(t)} dt = g \int e^{\frac{c}{m} \cdot t} dt = \frac{gm}{c} \cdot e^{\frac{c}{m} \cdot t}$$

Störfunktion: $v(t) = g$ [konstant]

$$G(t) = \int v(t) e^{U(t)} dt = g \int e^{\frac{c}{m} \cdot t} dt = \frac{gm}{c} \cdot e^{\frac{c}{m} \cdot t}$$

Allgemeine Lösung:

Störfunktion: $v(t) = g$ [konstant]

$$G(t) = \int v(t) e^{U(t)} dt = g \int e^{\frac{c}{m} \cdot t} dt = \frac{gm}{c} \cdot e^{\frac{c}{m} \cdot t}$$

Allgemeine Lösung:

$$v(t) = (G(x) + C) e^{-U(x)} = \left(\frac{gm}{c} e^{\frac{c}{m} \cdot t} + C \right) e^{-\frac{c}{m} t} = \frac{gm}{c} + C e^{-\frac{c}{m} t}$$

Anfangswertproblem (AWP):

Anfangswertproblem (AWP):

$t = 0 \Rightarrow v(0) = v_0 = 0$ (Kugel ohne Anfangsgeschwindigkeit)

Anfangswertproblem (AWP):

$t = 0 \Rightarrow v(0) = v_0 = 0$ (Kugel ohne Anfangsgeschwindigkeit)

$$v_0 = v(0) = \frac{gm}{c} + C = 0 \Rightarrow$$

Anfangswertproblem (AWP):

$t = 0 \Rightarrow v(0) = v_0 = 0$ (Kugel ohne Anfangsgeschwindigkeit)

$$v_0 = v(0) = \frac{gm}{c} + C = 0 \quad \Rightarrow \quad C = -\frac{gm}{c}$$

Anfangswertproblem (AWP):

$t = 0 \Rightarrow v(0) = v_0 = 0$ (Kugel ohne Anfangsgeschwindigkeit)

$$v_0 = v(0) = \frac{gm}{c} + C = 0 \quad \Rightarrow \quad C = -\frac{gm}{c}$$

Lösung des AWP:

Anfangswertproblem (AWP):

$t = 0 \Rightarrow v(0) = v_0 = 0$ (Kugel ohne Anfangsgeschwindigkeit)

$$v_0 = v(0) = \frac{gm}{c} + C = 0 \quad \Rightarrow \quad C = -\frac{gm}{c}$$

Lösung des AWP:

$v(t)$

Anfangswertproblem (AWP):

$t = 0 \Rightarrow v(0) = v_0 = 0$ (Kugel ohne Anfangsgeschwindigkeit)

$$v_0 = v(0) = \frac{gm}{c} + C = 0 \quad \Rightarrow \quad C = -\frac{gm}{c}$$

Lösung des AWP:

$$v(t) = \frac{gm}{c} - \frac{gm}{c} e^{-\frac{c}{m}t}$$

Anfangswertproblem (AWP):

$t = 0 \Rightarrow v(0) = v_0 = 0$ (Kugel ohne Anfangsgeschwindigkeit)

$$v_0 = v(0) = \frac{gm}{c} + C = 0 \quad \Rightarrow \quad C = -\frac{gm}{c}$$

Lösung des AWP:

$$v(t) = \frac{gm}{c} - \frac{gm}{c} e^{-\frac{c}{m}t} = \frac{gm}{c} \left(1 - e^{-\frac{c}{m}t}\right)$$